

令和7年度大学院入学試験問題 I (3時間)

注意

- (1) 問題I-1 から I-4 の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ.
- (2) 問題I-1 から I-3 の解答には裏面を用いてもよい.
- (3) 問題I-4 は独立した2つの小問I-4A, I-4B からなる. それぞれの小問の解答は解答用紙の指定された場所に記入せよ.
- (4) 各解答用紙は横長に使用して, 表側の左上部(線より上)に受験番号, 氏名を記入せよ. 解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない. 解答用紙上部の線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない.
- (5) 解答用紙は4問(計4枚)すべて提出すること. なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない.
- (6) 問題冊子は表紙や白紙を含めて10ページまでである.

I-1 (力学) (100 点)

2次元の中心力ポテンシャル中での質点の運動を考える．極座標として原点からの距離 r と原点周りに x 軸から測った角度 φ を導入する．この系のハミルトニアン H は r と φ を力学変数とし， r と φ に共役な一般化運動量を p_r と p_φ とすると

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + U(r),$$

と与えられる．ただし，質点の質量を m とし，中心力ポテンシャルを $U(r)$ と表した．

- (1) φ と p_φ が満たす正準運動方程式を求め， p_φ が保存することを示せ．
- (2) ϵ を無限小の定数として， $r' = r$ ， $\varphi' = \varphi + \epsilon$ ， $p'_r = p_r$ ， $p'_\varphi = p_\varphi$ のように原点を中心とした回転を表す正準変換を考える．ここで $'$ がついた変数が新しい正準変数である．この正準変換の母関数を $W(r, \varphi, p'_r, p'_\varphi)$ とすると $r' = \frac{\partial W}{\partial p'_r}$ ， $\varphi' = \frac{\partial W}{\partial p'_\varphi}$ ， $p_r = \frac{\partial W}{\partial r}$ ， $p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi}$ が正準変換を表している．母関数 $W(r, \varphi, p'_r, p'_\varphi)$ を求めよ．
- (3) 質点が， $p_\varphi = 0$ で x 軸上の正の領域を x 軸の負の向きに運動している．ハミルトン・ヤコビの理論では，(簡約化された) ハミルトンの主関数（作用とも呼ばれる） $S(r)$ は

$$\frac{dS}{dr} = p_r,$$

の微分方程式を満たす．質点が正のエネルギー E_0 を持ち，ポテンシャルが c, k を正の定数として $U(r) = E_0(1 - c^2 e^{-2kr})$ で与えられる時， $S(r)$ を求めよ．答えは， r, m, E_0, c, k のうち必要なものを用いて表せ．

ここで，質点の運動に対する屈折率の概念を導入するために，図1のような質点の運動を考えよう．速さ v_1 で等速直線運動している質量 m の質点が，ポテンシャル 0 の半平面から，ポテンシャル一定で負の値 U_0 を持つ半平面に入ると，速さ v_2 になった．境界面の法線と質点の軌跡のなす角度を α, β とする．

- (4) 質点の運動の屈折率を $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ と定義する． n を v_1, m, U_0 を用いて表せ．

(次ページに続く)

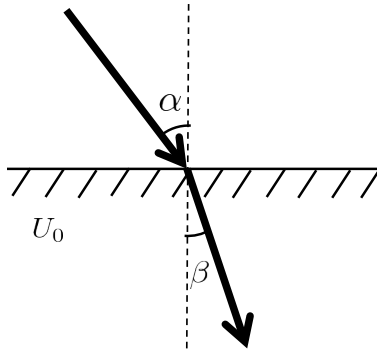


図 1

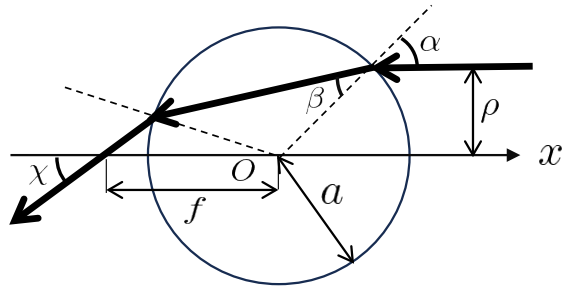


図 2

次に、図 2 のように、2次元の原点を中心とした半径 a の円形の井戸型ポテンシャルを考え、質点の散乱を議論する。ポテンシャルは、原点からの距離を r として $r > a$ で 0, $r \leq a$ で一定の負の値 U_0 である。質量 m の質点がポテンシャルの井戸に、速さ v_1 で x 軸に平行に、距離 ρ だけ離れて、 x 軸の負の向きに入射する。この ρ を衝突パラメータと呼ぶ。散乱後の質点の軌跡が x 軸となす角度を散乱角と呼び χ で表し、円の法線と質点の軌跡がなす角度を α, β とする。

- (5) 質点が井戸の中にある間の原点まわりの角運動量を求めよ。答えは、 a, U_0, m, v_1, ρ から必要なものを用いて表せ。
- (6) 質点の散乱角 χ は、幾何学的な考察から $\chi = 2(\alpha - \beta)$ と表される。これを利用して、衝突パラメータ ρ を a, n, χ の関数として求めよ。ここで、 n は小問 (4) で定義した質点の運動の屈折率である。

図 2 で衝突パラメータ ρ が a に比べて小さい極限では、 α と β が小さいため、運動の解析がより簡単になる。この極限では、質点が x 軸と交わる点は ρ に依存しなくなり、質点の運動における「焦点」の役割を果たす。質点が x 軸と交わる点と原点との間の距離を f とする。

- (7) この極限で、 $f > a$ つまり、井戸の外で質点が x 軸と交わる必要十分条件は、 $n < n_c$ である。数値 n_c を求めよ。
- (8) $n < n_c$ のときの f を求めよ。答えは a と n を用いて表せ。

(この公式はデカルトに由来する。デカルトは光を質点だと考え、質点の運動を考察することで、この公式に代表されるレンズの様々な性質を導いたとされる。)

I-2 (電磁気学) (100 点)

図 1 のように，誘電率 ε の媒質との境界付近の真空中 ($x > 0$) に点電荷 q が置かれている．境界面は y, z 方向に無限に広い $x = 0$ 面とし，点電荷は x 軸上の点 $\vec{d} = (d, 0, 0)$ にあるとする．媒質 ($x \leq 0$) に真電荷 (外部電荷) はなく，真空の誘電率は ε_0 とする．この問題を通じて， $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{R} = (X, Y, 0)$, $\vec{R}^- = (-X, Y, 0)$ ($X > 0$) とする．また，解答には SI 単位系を用いよ．

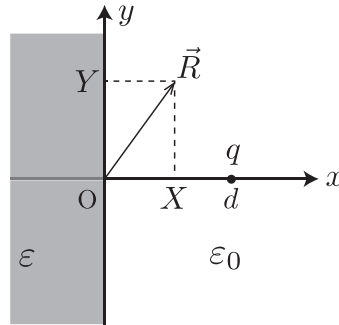


図 1

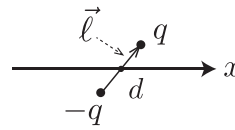


図 2

- (1) 静電ポテンシャル $\phi(x, y, z)$ と電場の x 成分 $E_x(x, y, z)$ が図 1 の $x = 0$ で満たすべき境界条件を与えよ (答えのみでよい)．ただし， $x > 0$ ($x < 0$) の側から $x = 0$ に近づけたときの ϕ, E_x はそれぞれ， $\phi(+0, y, z)$ ($\phi(-0, y, z)$)， $E_x(+0, y, z)$ ($E_x(-0, y, z)$) と表せ．なお，静電場に関するマクスウェル方程式を微小区間 $|x| < \delta$ にわたって積分して，境界条件を導出してよい．
- (2) 図 1 で， $x > 0$ での ϕ は点電荷 q に加えて $x < 0$ の側の対称点 $-\vec{d}$ に仮想点電荷 q' があると想定して書き表され， $x < 0$ での ϕ は点 $\vec{d}$ に電荷 q の代わりに仮想点電荷 q'' のみがあると想定して書き表される．そして，仮想点電荷の値 q', q'' は小問 (1) の境界条件から決定される． q' と q'' を， $q, \varepsilon_0, \varepsilon$ を用いて表せ．

次に，図 1 の点電荷 q を，図 2 のように x - y 面 ($z = 0$ 面) 内に横たわる電気双極子モーメント $\vec{p}$ で置き換えたときの電場分布を調べる． $\vec{p}$ の中心は点 $\vec{d}$ にあり， $\vec{p}$ は電荷 $\pm q$ とベクトル $\vec{\ell}$ を用いて $\vec{p} = q\vec{\ell}$ と表される．

- (3) $x \leq 0$ に媒質がなく，全空間が真空であるときの点 $\vec{r}$ での静電ポテンシャル $\phi_0(\vec{r})$ を， $\varepsilon_0, \vec{r}, \vec{d}, \vec{p}$ のみを用いて具体的に与えよ．ただし， $|\vec{r} - \vec{d}| \gg |\vec{\ell}|$ を仮定してよいとする．必要があれば，近似式 $\frac{1}{|\vec{w} - \vec{s}|} \simeq \frac{1}{|\vec{w}|} \left(1 + \frac{\vec{s} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2} \right)$ が $|\vec{w}| \gg |\vec{s}|$ のときに成り立つことを用いてよい．

(次ページに続く)

- (4) 再び, $x \leq 0$ が誘電率 ε の媒質で占められた状況を考える. 小問 (2) の鏡像法を利用するため, q', q'' の代わりに仮想双極子モーメント $\vec{p}', \vec{p}''$ を x 軸上に置くことにより, 点 $\vec{R}$ における全ポテンシャル $\phi(\vec{R})$ を, $\phi_0(\vec{R}), \phi_0(\vec{R}^-)$, $\varepsilon, \varepsilon_0$ のみで表される形で求めよ.

以下では, 図 2 の点 $\vec{d}$ に $\vec{p}$ の代わりに磁気モーメント $\vec{m}$ を置いたときの磁場分布を考える. $x \leq 0$ に媒質がない場合, 真空中の点 $\vec{r}$ での磁束密度は,

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\vec{m} \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{d}|} \right), \quad (\text{A})$$

と表される. ここで, μ_0 は真空中の透磁率, $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ である.

- (5) $\vec{r} \neq \vec{d}$ で 式 (A) は, スカラーポテンシャル $\phi_m(\vec{r})$ を用いた形 $\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{\nabla} \phi_m(\vec{r})$ で表される. $\phi_m(\vec{r})$ を $\vec{\nabla}$ を用いない形で表せ. 必要あれば, ベクトルの公式 $\vec{E} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F}(\vec{E} \cdot \vec{G}) - (\vec{F} \cdot \vec{E})\vec{G}$ を用いよ.

次に, $x \leq 0$ が透磁率 μ の媒質で占められた状況を考える. 媒質中に外部電流が生じていない限り, 点 $\vec{d}$ に置かれた磁気モーメント $\vec{m}$ によって点 $\vec{R}$ に生じる磁場 $\vec{H}(\vec{R})$ は, 小問 (4) で用いた手続きと同様な方法で得ることができる.

- (6) $\vec{H}(\vec{R})$ を与えるポテンシャル $\phi_m(\vec{R})$ は, 小問 (4) の $\phi(\vec{R})$ の表式において $\vec{p}$ を $\boxed{(イ)}$ に, $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ を $\boxed{(ロ)}$ に, それぞれ置き換えた形になる. 空欄 (イ), (ロ) に適当な式を入れよ. また, 磁場 $\vec{H}(\vec{R}) = (H_x(\vec{R}), H_y(\vec{R}), 0)$ を, μ, μ_0 および $\vec{B}(\vec{R})$ と $\vec{B}(\vec{R}^-)$ の成分のみを用いて表せ. ここで, $\vec{B}(\vec{r}) = (B_x(\vec{r}), B_y(\vec{r}), B_z(\vec{r}))$ は式 (A) で与えられている.

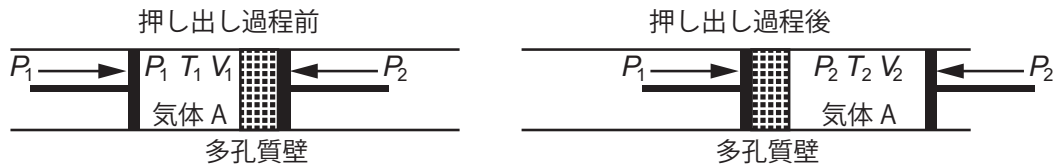
(なおここで得られる磁場を用いると, 磁気モーメント $\vec{m}$ が, $x \leq 0$ の媒質が強磁性に近い状態 ($\mu \gg \mu_0$) では媒質に引きつけられ, 超伝導に近い状態 ($\mu \ll \mu_0$) では反発するなどの興味深い現象が導かれる.)

I-3 (統計力学・熱力学) (50 点)

以下の設問に答えよ．ただし， P, V, T, h, k_B, H, U, S をそれぞれ圧力，体積，温度，プランク定数，ボルツマン定数，エントロピー，内部エネルギー，エントロピーとする．また，解答は逆温度 $\beta = \frac{1}{k_B T}$ を使ってもよい．

- (1) 質量 m の単原子分子 N 個 ($N \gg 1$) からなる理想気体が温度 T ，体積 V の平衡状態にある．古典統計力学に基づき，分配関数を求めよ．
- (2) 小問 (1) で求めた分配関数を使い，スターリングの公式 $\ln N! \sim N \ln N - N$ を用いて，自由エネルギー，エントロピーおよび状態方程式を求めよ．

次に，粒子間相互作用を持つ非理想気体 A を用いた実験を考察する．下図に示すように，温度 T_1 ，圧力 P_1 ，体積 V_1 の気体 A を多孔質壁を通じて，もう片方の空間に準静的に押し出す断熱過程を考える．押し出された気体の圧力は P_2 である．それぞれの空間での気体の圧力 P_1, P_2 は，一定に保つようにピストンで調整されている．また， P_1 と P_2 の間には $P_2 < P_1$ の関係がある．なお，押し出し過程後の気体 A の温度，体積はそれぞれ T_2, V_2 となった．



- (3) エンタルピー H は， $H = U + PV$ と定義される．この過程が等エンタルピー過程であることを示せ．
- (4) 等エンタルピー変化 $dH = 0$ から，以下の一般的な関係式を示せ．

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = \frac{1}{C_P} \left[T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P - V \right].$$

ただし， $C_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P$ は定圧熱容量であり，必要なら， $\left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$ の関係を用いてもよい．

- (5) 気体 A が，以下の状態方程式に従う場合を考える．

$$\frac{P}{k_B T} \left(\frac{V}{N} \right)^2 - \left(\frac{V}{N} \right) - B(T) = 0.$$

$B(T)$ が微小である場合， $V \sim N \left[\frac{k_B T}{P} + B(T) \right]$ と近似できることを示せ．

さらに， $B(T) = b - \frac{a}{k_B T}$ ($a > 0, b > 0$) の場合，押し出された気体 A の温度 T_2 は， T_1 より高いか低いかを答えよ．

(このページは白紙である)

I-4A (量子力学) (25 点)

ハミルトニアン $\hat{H}$ は時間に依存せず、状態 $|\psi(t)\rangle$ は以下のシュレディンガー方程式に従う。

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle.$$

ここで $\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。

- (1) 時刻 $t = 0$ に $|\psi(0)\rangle$ が固有値 E のエネルギー固有状態であったとき、時刻 t での状態 $|\psi(t)\rangle = c(t) |\psi(0)\rangle$ について、係数 $c(t)$ を答えよ。

以下ではエネルギーの異なる 2 つのエネルギー固有状態 $|1\rangle$ と $|2\rangle$ を考える。ここで $|1\rangle$ と $|2\rangle$ は規格化されており、それぞれのエネルギー固有値を $-\hbar\omega$ と $\hbar\omega$ とする。ただし、 $\omega \neq 0$ である。初期時刻 $t = 0$ で、状態は $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |2\rangle$ にあった。

- (2) 時刻 t での状態を $|\psi(t)\rangle = c_1(t) |1\rangle + c_2(t) |2\rangle$ と表すとき、係数 $c_1(t)$ および $c_2(t)$ を答えよ。

- (3) 演算子 $\hat{A}$ について、 $|1\rangle$ と $|2\rangle$ に関する要素が

$$\begin{aligned} \langle 1 | \hat{A} | 1 \rangle &= 0, & \langle 1 | \hat{A} | 2 \rangle &= 1, \\ \langle 2 | \hat{A} | 1 \rangle &= 1, & \langle 2 | \hat{A} | 2 \rangle &= 0, \end{aligned}$$

であるとする。初期時刻 $t = 0$ での演算子 $\hat{A}$ の期待値 $\langle \psi(0) | \hat{A} | \psi(0) \rangle$ を求めよ。

- (4) 小問 (3) の演算子 $\hat{A}$ に対して、時刻 t での期待値 $\langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle$ を計算せよ。また、時刻 t での $\hat{A}$ に関するゆらぎ ΔA を求めよ。ただし、 $\hat{A}$ のゆらぎは、 $\hat{A}$ の期待値 $\langle \hat{A} \rangle$ と $\hat{A}^2$ の期待値 $\langle \hat{A}^2 \rangle$ を用いて以下のように定義される。

$$\Delta A = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}.$$

I-4B (物理数学) (25 点)

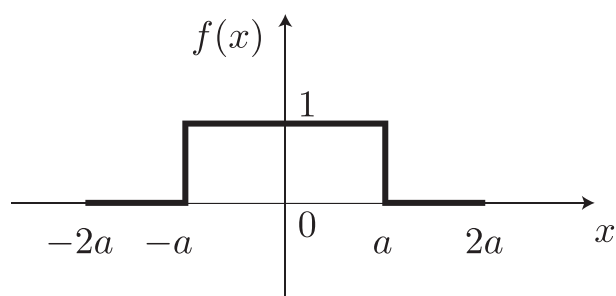
- (1) $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ は原点周りに傾いた楕円を表す. この式は対称行列 A を用いて, 以下のように表現できる.

$$(x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.$$

次の には行列を, から に適切な数を入れよ.

この対称行列 A は であり, この行列の固有値は と である. したがって, この楕円の面積は である.

- (2) 下図の周期 $4a$ である $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.



- (3) 始点 $(0, 1)$ から終点 $(1, 2)$ までの任意の経路 C において, 以下の線積分が経路に依らないように α と β を求めよ.

$$\int_C [(\alpha x^4 y + \beta x^2 y^3 - y^5) dx + (2x^5 + 2x^3 y^2 - 5xy^4) dy].$$

(このページは白紙である)

令和7年度大学院入学試験問題 II (3時間)

注意

- (1) 問題 II-1 から II-5 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ.
- (2) 問題 II-1 から II-4 の解答には裏面を用いてもよい.
- (3) 問題 II-5 は独立した 2 つの小問 II-5A, II-5B からなる. それぞれの小問の解答は解答用紙の指定された場所に記入せよ.
- (4) 各解答用紙は横長に使用して, 表側の左上部 (線より上) に受験番号, 氏名を記入せよ. 解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない. 解答用紙上部の線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない.
- (5) 解答用紙は 5 問 (計 5 枚) すべて提出すること. なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない.
- (6) 問題冊子は表紙や白紙を含めて 10 ページまでである.

II-1 (量子力学) (100 点)

z 軸を向いた一様な磁束密度 $B = \frac{\partial A_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x, y)}{\partial y}$ の下で, 質量 μ と電荷 q を持った荷電粒子が運動している. 粒子は x - y 平面内を運動しているものとして, 完全に分離できる z 方向の自由度は考えないことにすると, 運動はハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu}(\hat{p}_x - qA_x(\hat{x}, \hat{y}))^2 + \frac{1}{2\mu}(\hat{p}_y - qA_y(\hat{x}, \hat{y}))^2, \quad (\text{A})$$

で記述される. 以下 $B > 0$ かつ $q > 0$ とし, $\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである.

- (1) 一般化運動量 $\hat{\Pi}_x = \hat{p}_x - qA_x(\hat{x}, \hat{y})$ と $\hat{\Pi}_y = \hat{p}_y - qA_y(\hat{x}, \hat{y})$ を用いて, 演算子 $\hat{a}$ を

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar q B}}(\hat{\Pi}_x + i\hat{\Pi}_y),$$

と定義したとき, $\hat{a}$ とそのエルミート共役 $\hat{a}^\dagger$ が生成消滅演算子の交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を満たすことを示せ.

[ヒント] 任意の関数 $f(x)$ に対して $[\hat{p}_x, f(\hat{x})] = -i\hbar \frac{df}{dx}(\hat{x})$ が成り立つ.

- (2) $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ を用いてハミルトニアン (A) を書き直せ.

ハミルトニアン (A) の固有値は縮退しており, 波動関数を定めるにはもう 1 つ保存量が必要になる.

- (3) ベクトルポテンシャルを

$$(A_x, A_y) = \left(-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx \right), \quad (\text{B})$$

と選んだとき, 角運動量 $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ と $\hat{a}$ の交換関係 $[\hat{L}_z, \hat{a}]$ を計算し, $\hat{L}_z$ が保存量であることを示せ.

エネルギーと角運動量が同時に対角化できることが分かると, それらの固有値で状態を指定できる. $\hat{N}$ の固有値 n は 0 または正の整数であり, $\hat{L}_z$ の固有値は m を整数として $m\hbar$ であることが示せるので, 以下では, これを $|(n, m)\rangle$ と書くことにする.

- (4) 基底状態 $|(0, m)\rangle$ は $\hat{a}|(0, m)\rangle = 0$ を満たすことを示せ.

- (5) $|(n', m')\rangle = \hat{a}|(n, m)\rangle$ と $|(n'', m'')\rangle = \hat{a}^\dagger|(n, m)\rangle$ は, それぞれ再びエネルギーと角運動量の固有状態である. (n', m') と (n'', m'') を求めよ.

(次ページに続く)

ベクトルポテンシャルを式 (B) と選んだとき, $\hat{L}_z$, $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ を 2 次元の極座標 $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ を用いて表すと

$$\begin{aligned}\hat{L}_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \hat{a} &= -\frac{i}{2}e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{i}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \rho \right), \\ \hat{a}^\dagger &= \frac{i}{2}e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{i}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \rho \right),\end{aligned}$$

となる. ただし, 変数 r の代わりに $\rho = \sqrt{\frac{qB}{2\hbar}}r$ を用いた. これらを用いて以下の小問に答えよ.

(6) 小問 (4) の条件を用いて, $|(0, 0)\rangle$ の座標表示である波動関数 $\psi_{(0,0)}(\rho, \varphi)$ を求めよ. ただし, 規格化定数を求める必要はない.

(7) 一般の角運動量 $m\hbar$ を持つ基底状態の波動関数が, 規格化定数を除いて

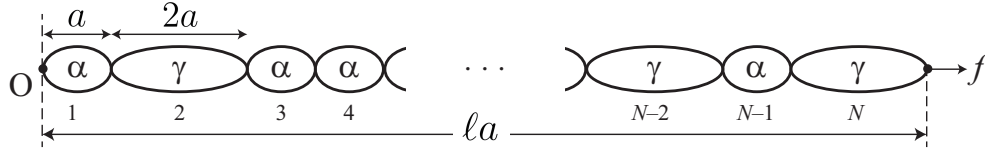
$$\psi_{(0,m)}(\rho, \varphi) = \rho^m e^{im\varphi} \psi_{(0,0)}(\rho, \varphi),$$

と書けることを示せ. ただし, 原点 $\rho = 0$ での正則性から $m \geq 0$ でなければならない.

(8) 励起状態の波動関数 $\psi_{(n,m)}(\rho, \varphi)$ の場合は, 原点 $\rho = 0$ における正則性から $m + n \geq 0$ でなければならない. 最低の角運動量 $m\hbar = -n\hbar$ を持つ波動関数 $\psi_{(n,-n)}(\rho, \varphi)$ を求めよ. ただし, 規格化定数を求める必要はない.

II-2 (統計力学) (50 点)

図のように、 N 個の要素からなる 1 次元鎖が、左端を原点に固定され右端は力 f を受けながら温度 T の平衡状態にある。各要素は、収縮状態 α と伸張状態 γ の 2 状態をとり得る。状態 α のときの長さは a ，状態 γ のときの長さは $2a$ であり，状態 α と γ のエネルギーは無視できる。全長 ℓa のときの外力 f のポテンシャルエネルギー U_{ex} は， $U_{\text{ex}} = -f\ell a$ で表される。ボルツマン定数を k_B ，逆温度を $\beta = \frac{1}{k_B T}$ とする。



[A] 最初に、要素間の相互作用エネルギーが無い場合を考える。

- (1) 全長が ℓa のときのエントロピーを求めよ。ただし， $\ell - N \gg 1$ ， $N \gg 1$ ， $2N - \ell \gg 1$ として， $x \gg 1$ に対して成り立つスターリングの公式 $\ln x! \sim x \ln x - x$ を用いて計算せよ。
- (2) 全長一定のもとでのヘルムホルツの自由エネルギーを求め，さらに自由エネルギーを全長に関して最小にすることで， f と平均の ℓ との間の関係を求めよ。

[B] 次に、隣接する要素間に相互作用エネルギーがある場合を考える。状態 α と状態 α の間には w ，状態 γ と状態 γ の間には $-w$ の相互作用エネルギーがある。状態 α と状態 γ の間の相互作用エネルギーは 0 である。全エネルギーは，相互作用エネルギーと外力のポテンシャルエネルギー U_{ex} の和で表される。

- (3) $N = 2$ のときの分配関数を求めよ。また， $f = 0$ のときの熱容量を計算し，温度依存性を図示せよ。その際，低温と高温での漸近的な温度依存性も示せ。
- (4) 要素数 N で力 f のもとでの分配関数 Z_N は， 2×2 の行列 Q を用いて，

$$Z_N = (e^{\beta f a/2}, e^{\beta f a}) Q^{N-1} \begin{pmatrix} e^{\beta f a/2} \\ e^{\beta f a} \end{pmatrix},$$

で表される。このときの Q を求めよ。

- (5) $N \gg 1$ で $f = 0$ のとき，単位要素あたりの自由エネルギー $g = -\frac{k_B T}{N} \ln Z_N$ を求めよ。

II-3 (物理数学) (50 点)

関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ は

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad (\text{A})$$

で定義される．ここで s は複素数であり，右辺の広義積分が収束するような s のみを考える．また，逆に関数 $f(t)$ は逆ラプラス変換を用いて

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-ip}^{c+ip} F(s)e^{st}ds, \quad (\text{B})$$

により求められる．ここで c, p は実数であり， c は複素平面上で $F(s)$ のすべての特異点の実部の値よりも大きくなるようにとる．

(1) 関数 $f(t) = \sin(kt)$ のラプラス変換 $F(s)$ を求めよ．

(2) $F(s) = 1/(s-a)^3$ を逆ラプラス変換し，もとの関数 $f(t)$ を求めよ．

[ヒント] 複素平面上で $F(s)$ の極をすべて囲むような積分経路を考えよ．

(3) ラプラス変換に対して次式が成り立つことを示せ．

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0). \quad (\text{C})$$

(4) ヘビサイド関数 (単位階段関数) を

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & (t \leq a), \\ 1 & (t > a), \end{cases} \quad (\text{D})$$

と定義する．ただし $a > 0$ である．このとき次式が成り立つことを示せ．

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as}F(s). \quad (\text{E})$$

(5) 以下に示す微分方程式の解 $x(t)$ についてラプラス変換 $X(s)$ を求めよ．

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = u(t-3). \quad (\text{F})$$

ただし $t=0$ で $x=0$ かつ $\frac{dx}{dt}=0$ である．[ヒント] 小問 (3) を用いよ．

(6) 微分方程式 (F) の解を求めよ．解答にヘビサイド関数を用いてもよい．

II-4 (実験) (50 点)

シリコンなどの原子に X 線が衝突すると、光電効果により X 線は吸収される (光電吸収)。1 つの原子のある範囲内に X 線が入射すると光電吸収が起こるとする。その範囲の面積を「吸収断面積」と呼ぶ。

- (1) 厚さ $\ell = 300 \mu\text{m}$ のシリコン板に X 線エネルギー 13 keV の X 線を垂直に入射させる。光電吸収される割合を有効数字 1 桁で求めよ。ただし、X 線エネルギー 13 keV での吸収断面積は $\sigma = 6.7 \times 10^{-22} \text{ cm}^2$ 、シリコンの数密度は $n = 5.0 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ とする。必要ならネイピア数は $e = 2.7$ を使って良い。光電吸収以外の相互作用は無視できるものとする。ヒントとして図 1 を与える。

図 2 は X 線検出に用いられるシリコンフォトダイオードの模式図である。このシリコンフォトダイオードは不純物濃度の高い P 型半導体の P 層と、不純物濃度の低い N 型半導体の N 層から構成されており、それぞれ電極が取り付けられている。P 層とその電極は十分薄く、X 線の吸収は無視できる。P 層側電極に 0 V を、N 層側電極に一定の電圧 (バイアス電圧 V_b) を印加することで、空乏層が形成される。このシリコンフォトダイオードの P 層側から X 線を垂直に入射させる。その X 線が空乏層内で光電吸収されると、幾つかの物理過程を経て最終的に入射 X 線のエネルギーに比例した数の電子・ホールペアが作られる。その一方は P 層側へ移動し、もう一方は N 層側の中性領域へ移動する。

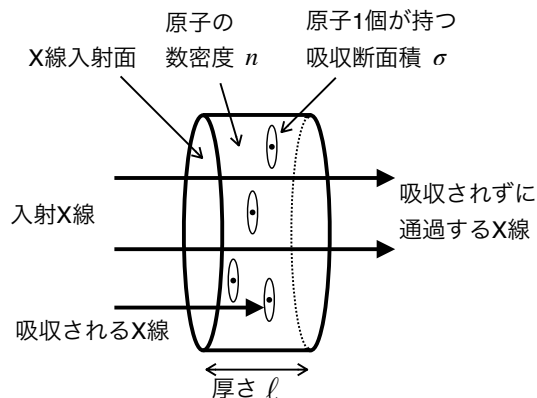


図 1

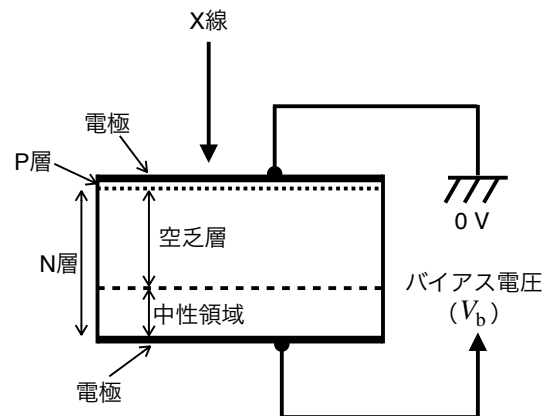


図 2

- (2) 次の文章の { } 内の用語としてどちらが適切か答えよ。

N 層側電極に印加すべきバイアス電圧は { プラス, マイナス } 電圧であり、P 層側へ収集されるのは { 電子, ホール } である。光電吸収される X 線の割合を大きくするには、空乏層の厚さを { 薄く, 厚く } すれば良い。そのためには $|V_b|$ を { 大きく, 小さく } する。

シリコンフォトダイオードの読み出し回路として電荷有感アンプを用いる(図3)．フィードバックコンデンサーの容量とフィードバック抵抗の抵抗値はそれぞれ C_f と R_f である．

(3) 次の文章の [] に入る式を答えよ．

入射 X 線のエネルギーの一部が電子・ホールペアの生成に使われる．生成に使われなかったエネルギーも含めて，平均的にエネルギー ε 毎に1つの電子・ホールペアが生ずる．従って，エネルギー E_X の X 線が1つ吸収されると，[あ] 個の電子・ホールペアが生じ，信号電荷となる．その信号電荷が電荷有感アンプに入力されると，電荷有感アンプは初期値 [い]，減衰時間（出力電圧が $1/e$ になる時間）[う] のパルス信号を出力する．ただし，電気素量を q (> 0) とし，オペアンプのオープンループゲインは十分大きく，周波数特性も十分良いものとする．シリコンフォトダイオードからの暗電流や回路のノイズは無視できるものとする．また，信号電荷は十分短い時間で電荷有感アンプに入力されるとする．

(4) $E_X = 13.0 \text{ keV}$ ， $\varepsilon = 3.60 \text{ eV}$ ， $q = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ ， $C_f = 1.00 \times 10^{-13} \text{ F}$ ， $R_f = 5.00 \times 10^9 \Omega$ として，小問(3)の [あ]，[い]，[う] を有効数字2桁で求めよ（単位も記載すること）．

シリコンフォトダイオードからの暗電流が無視できないので，暗電流を減らすために 0°C 以下に冷却をすることにした．

(5) 冷却することでシリコンフォトダイオードに対して起こり得る問題を述べよ．さらに，その問題を解決する方法を提案せよ．

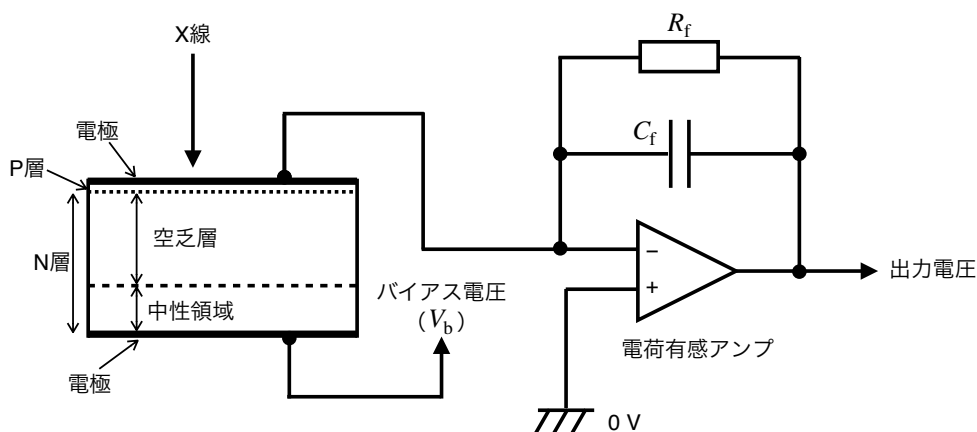


図3

II-5A (力学) (25 点)

- (1) 角速度 $\dot{\theta}$ をもつ剛体の回転軸まわりの慣性モーメントが I のとき，回転のエネルギーを書け．
- (2) 質量 M ，半径 a の線密度一定の円環について，円環の中心を通り円環に垂直な軸に関する慣性モーメントを求めよ．

以下では，板の上の球の運動について考える．水平面から傾き α の斜面がある．斜面の上に板を置き，板の上に重さ M ，半径 b の均一な球がある．球の中心軸周りの慣性モーメントは $\frac{2}{5}Mb^2$ である．球は板の上を滑らずに転がる．図 1, 2 のように，座標を斜面上を平行下向きを正にしてとり，球の重心位置を x とする．また，中心軸周りの回転角を θ とする．重力加速度の大きさを g とし，向きは鉛直下向きである．

- (3) 板を固定した状態で $x = 0$ に静止させた球を静かに放すと，図 1 のように球が転がり落ちて位置 x に達した．この時の球の重心の速度 $\dot{x}$ を，エネルギー保存と滑らずに転がる条件式を使い， x の関数として求めよ．

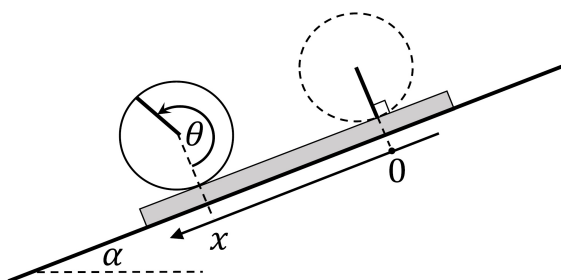


図 1

- (4) 次に，図 2 のように板を斜面に平行に引っ張る場合を考える． $x = 0$ に静止させた球を静かに放すと同時に板を引っ張り始め，球の重心が $x = 0$ から移動しないように板によって球を回転運動させた．球の角加速度 $\ddot{\theta}$ (一定) を求めよ．

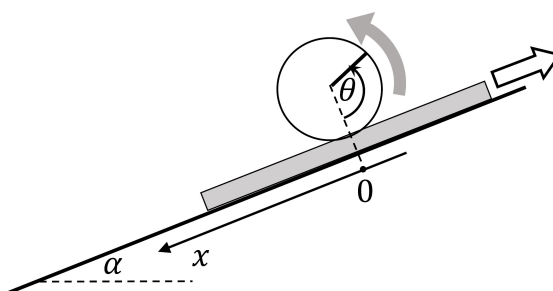


図 2

II-5B (電磁気学) (25 点)

x 軸の正方向に進む電磁波の電場が次式で与えられているとき、以下の設問に答えよ。解答は SI 単位系とする。

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_y \sin\left(\frac{\pi z}{z_0}\right) \cos(kx - \omega t).$$

ただし、 $\vec{e}_j$ ($j = x, y, z$) は基底ベクトルである。直交座標系において、任意の位置ベクトルは基底ベクトルを用いて $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ と表されるものとする。

- (1) この電磁波の特徴について次の と に適切な式を、 と に適切な語句を入れよ。

この電磁波の波長は で、位相速度は である。またこの電磁波の電場は 軸方向に 偏光している。

- (2) 真空中のマクスウェル方程式を用いて k と ω の分散関係を求め、 に当てはまる式を答えよ。

$$k = \frac{\omega}{c} \quad \text{オ}$$

なお、真空中のマクスウェル方程式と光速 c は以下のとおりである。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ c &= 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}.\end{aligned}$$

- (3) この電磁波の位相速度 v_p と群速度 $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ の光速に対する比率 (v_p/c と v_g/c) を求めよ。
- (4) 小問 (3) をもとに、エネルギーの伝達速度は位相速度と群速度のどちらと考えられるか、理由とともに答えよ。

(このページは白紙である)