令和５年度大学院入学試験問題　Ⅰ（２時間）

注意

(1) 問題I-1，I-2，I-3 の解答はそれぞれ指定された解答用紙１枚に記入せよ.

(2) 問題I-1，I-2 の解答には裏面を用いてもよい.

(3) 問題I-3は独立した2つの小問I-3A，I-3B からなる．それぞれの小問の解答は解答用紙の指定された場所に記入せよ.

(4) 各解答用紙は横長に使用して，表側の左上部（線より上）に受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の他の部分に受験番号，氏名を書いてはいけない．解答用紙上部の線より上の欄には表，裏とも解答を書いてはいけない.

(5) 解答用紙は3問（計3枚）すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない.

(6) 問題冊子は表紙を含めて7ページまである.

I-1 (力学) (100 点)

質量に比して半径が非常に小さいコンパクト星(ブラックホール，中性子星，白色矮星など)と，通常の恒星(以下では伴星と呼ぶ)が重力で引き合い，共通重心の周りを円運動している連星系が存在する．このような連星系では，ある条件下で伴星からコンパクト星へ継続的な質量移動が起こる．この条件を考察してみよう．

まず，コンパクト星と伴星がともに質点であるとして考える．図1のように，コンパクト星と伴星の質量をそれぞれ m_1, m_2，共通重心✕からそれぞれの星の重心までの距離を r_1, r_2 とし，紙面を公転面として反時計回りに公転しているとする．以下では，両星の自転及び相対論的効果については考慮しなくてよいものとする．

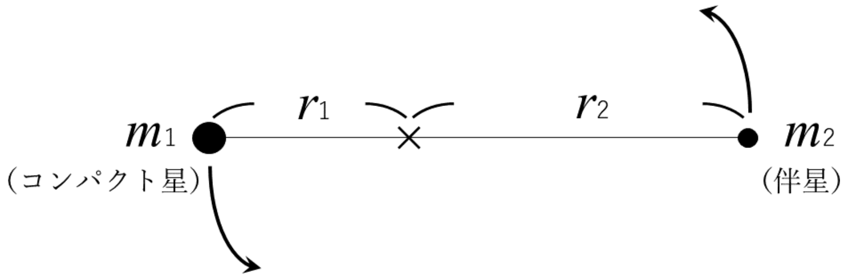

図1

(1) m_1, m_2, r_1, r_2 の関係式を書け．

(2) この連星系の公転運動の全角運動量 J を，公転周期を P として，m_1, m_2, r_1, r_2, P を用いて表せ．

(3) 連星間の距離を $r(= r_1 + r_2)$，2天体の全質量を $m(= m_1 + m_2)$，重力定数を G として，

$$P^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{Gm} \tag{A}$$

と書けることを示せ．

(4) 式(A)と小問(2)の結果から，

$$J = m_1 m_2 \left(\frac{Gr}{m}\right)^{1/2} \tag{B}$$

と書けることを示せ．

(5) 式(B)を対数微分し，$\dot{J}/J$ を $m, \dot{m}, m_1, \dot{m}_1, m_2, \dot{m}_2, r, \dot{r}$ を用いて表せ．ただし，$\dot{}$ (ドット)は時間微分を表すものとする．

(次ページに続く)

(6) 全角運動量が保存したまま，伴星からコンパクト星へ，m_1, m_2 に比べて微小な質量の移動が起こったとする．このとき，連星間距離はどうなるか，$m_1 > m_2$ の場合と $m_1 < m_2$ の場合で分けて答えよ．ただし，伴星から移動した質量は全てコンパクト星に移り，連星系から抜けていくことはないものとする．

次に，伴星が質点ではないことを考慮する (図 2)．この場合も，式 (A)，(B) は成り立つものとする．両星を取り囲む，横向きの 8 の字型の曲線は，両星の重力と公転運動を考慮した等ポテンシャル面を表している．この等ポテンシャル面と両星の重心を結ぶ直線の交点を L_1 点という．以下では，連星系から質量が抜けていくことはないとしてよい．

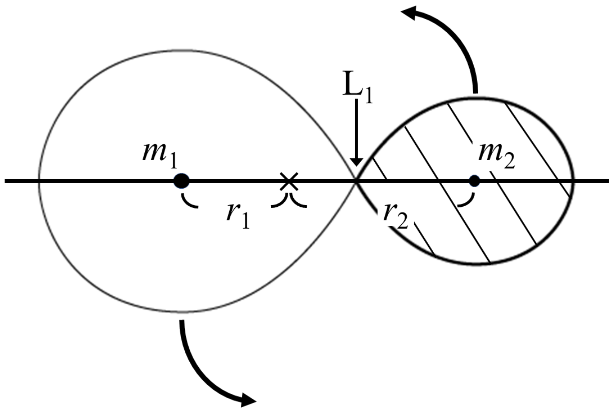

図 2

(7) このような系では，重力波などによって連星系から角運動量が抜けていく．そのため，連星間距離 r が小さくなっていき，斜線で示すようにやがて伴星は変形して L_1 点を通る等ポテンシャル面の内側を全て満たしたガス体とみなせる．この等ポテンシャル面で囲まれた斜線領域の体積を V_{R} とすると，ある定数 α を用いて

$$V_{\mathrm{R}} = \alpha r^3 \cdot \frac{m_2}{m} \tag{C}$$

と近似できることが知られている．式 (C) をもとに $\dot{V}_{\mathrm{R}}/V_{\mathrm{R}}$ を $\dot{J}, J, m_1, m_2, \dot{m}_2$ を用いて表せ．

(8) さらに連星間距離が小さくなり，伴星が等ポテンシャル面からあふれると，その分の質量は全て L_1 点を通してコンパクト星に流れ込んでいくと考えてよい．伴星の質量 m_2 はその体積 V_{s} と，ある定数 β を用いて

$$m_2 = \beta V_{\mathrm{s}}^{1/3} \tag{D}$$

という関係があるものとし，小問 (6)，(7) の結果をもとに，伴星からコンパクト星への質量移動が起こった $m_1 > m_2$ の連星系で，質量移動が継続するために必要な $|\dot{J}/J|$ についての条件を $m_1, m_2, \dot{m}_2$ を使って求めよ．ただし，質量移動量は十分小さいとする．

I-2 (電磁気学) (50 点)

真空中で円形コイルを流れる電流の作る磁場について考える．なお，解答はSI 単位系で述べよ．

(1) 図 1 に示すように半径 a のコイルに定電流 I を流す．コイル中心を通りコイルに垂直な z 軸上の位置 $(0, 0, z)$ での磁束密度を求めよ．位置 $\vec{r}$ における Biot-Savart の法則は次式で与えられる．

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3}. \tag{A}$$

ここで μ_0 を真空の透磁率，$\vec{s}$ はコイル上の点の位置ベクトル，$d\vec{s}$ はコイル上の線要素ベクトルである．

(2) 小問 (1) において， コイルを十分離れた遠方からみると磁気双極子として観測され，任意の点 $\vec{r}$ $(r \equiv |\vec{r}| \gg a)$ における磁束密度は

$$\vec{B} = -K \left[\vec{m} - 3\left(\vec{m} \cdot \hat{r}\right)\hat{r}\right], \tag{B}$$

の形で書くことができる．ここで $K = K(r)$ は正の実数，$\vec{m} = IS\hat{n}$ は磁気双極子モーメント，S はコイルの面積，$\hat{n}$ はその単位法線ベクトル，$\hat{r}$ は $\vec{r}$ 方向の単位ベクトルである．$K(r)$ を答えよ．

以下では磁気双極子間相互作用について考える．磁気双極子の作る磁束密度を使う必要がある時は, 式 (B) の K はそのまま使用してもよい．また，磁束密度 $\vec{B}$ 中に磁気双極子モーメント $\vec{m}$ が置かれているときのポテンシャルエネルギーは $U = -\vec{B} \cdot \vec{m}$ である．

(3) 図 2 のように二つの磁気双極子 $\vec{m_1}$，$\vec{m_2}$ が z 軸上で距離 d 離れて置かれている． 二つの双極子は，モーメントの大きさは等しく $(|\vec{m}_1| = |\vec{m}_2| = m)$，位置は固定されているが，$z - x$ 平面内で回転できる．$\vec{m_1}$，$\vec{m_2}$ の向きを z 軸から測った角度を θ_1，θ_2 とする．二つの磁気双極子間のエネルギー U_1 を θ_1，θ_2 の関数として求め，U_1 が最小となる配置を答えよ．また，$\theta_1 = 0, \pi/2$ の時の U_1 を θ_2 を横軸として図示せよ．

(4) 小問 (3) の配置に対して，x 軸方向に一様な磁束密度 B_0 をかけた場合を考える．系のエネルギー U_2 を求めよ．θ_1，θ_2 に対する U_2 の変分を二次まで考慮することで，$\cos\theta_1 = \cos\theta_2 = 0$ が安定な配置となるために必要な B_0 の条件を求めよ．

(次ページに続く)

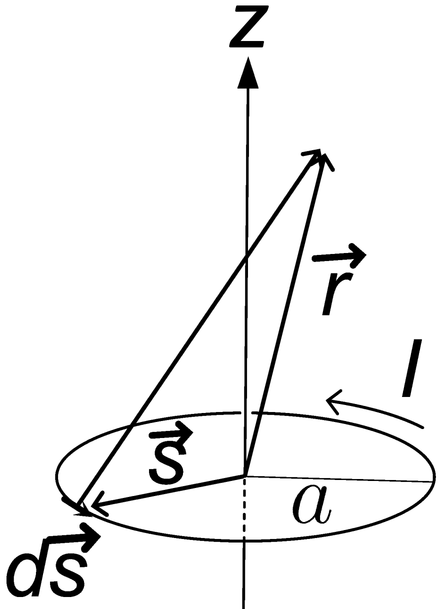

図1

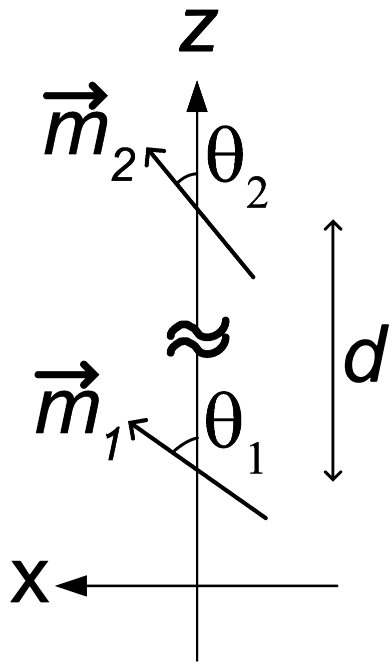

図2

I-3A (物理数学) (25 点)

(1) 以下のように行列 A を定める．n を自然数とし，固有値, 固有ベクトルを求めた上で A^n を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}. \tag{A}$$

(2) 実 3 次元空間内の楕円体 $x^2/4 + y^2/9 + z^2 = 1$ を考える．Lagrange の未定係数法を用いて，楕円体表面上での $F = xyz$ の最大値とその最大値を与える (x, y, z) をすべて求めよ．

I-3B （量子力学） (25 点)

ボソンの生成演算子を $a^\dagger$, 消滅演算子を a とする．$[a, a^\dagger] = 1$ が成り立つ．ボソン数演算子を $N = a^\dagger a$ と定義するとき

(1) $[N, a]$ を a のみを使って表せ.

(2) $[N, a^\dagger]$ を $a^\dagger$ のみを使って表せ.

ボソンが n 個ある状態, つまり N の固有値 n の（規格化された）固有状態を $|n\rangle$ と書く．a はボソンを一つ消滅させる演算子であるので $a|n\rangle = c|n-1\rangle$ と書ける．ただし c は正の実数とする.

(3) c を求めよ.

$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ を満たす（規格化された）状態 $|\alpha\rangle$ はコヒーレント状態と呼ばれている.（ただし α は複素数.）

(4) コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ におけるボソンの個数の揺らぎ $\langle\alpha|N^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|N|\alpha\rangle^2$ を求めよ.

令和５年度大学院入学試験問題　II（2.5時間）

注意

(1) 問題II-1からII-4の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ．

(2) 問題II-1からII-3の解答には裏面を用いてもよい．

(3) 問題II-4は解答用紙の指定された場所に記入せよ．

(4) 各解答用紙は横長に使用して，表側の左上部（線より上）に受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の他の部分に受験番号，氏名を書いてはいけない．解答用紙上部の線より上の欄には表，裏とも解答を書いてはいけない．

(5) 解答用紙は4問（計4枚）すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない．

(6) 問題冊子は表紙を含めて11ページまである．

II-1 (統計力学) (100 点)

グラフ上に存在する Ising 模型を考える．グラフは図 1 のように，◯で表された「頂点」を – で表された「辺」で結合したもので表現される．各々の「頂点」上にはイジングスピンが存在し，± 1 の 2 値をとる．「辺」で結合された「頂点」上のイジングスピン s_1 と s_2 の間には，実数 $J>0$ による相互作用ポテンシャル $-Js_1s_2$ が生じる．T を温度，k_B を Boltzmann 定数，$\beta = J/(k_\mathrm{B}T)$ として以下の小問に答えよ．

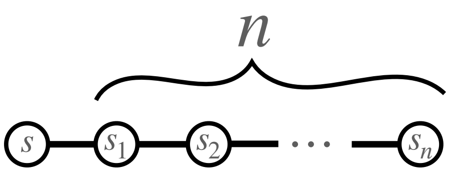

図 1

図 1 のような鎖状のグラフを考え，左端のイジングスピンを s にとる分配関数，

$$Z_n(s) = \sum_{s_1=\pm 1} \cdots \sum_{s_n=\pm 1} e^{\beta(ss_1+s_1s_2+\cdots+s_{n-1}s_n)} Z_0(s_n), \tag{A}$$

を任意の整数 $n \geq 1$ について s の関数として定義する．ここで，図 1 のグラフの右端のイジングスピンについての $Z_0(s)$ は，$Z_0(1)+Z_0(-1)=1$，$Z_0(1)>0$，$Z_0(-1)>0$ を満たすとする．

(1) $Z_n(s)$ と $Z_{n-1}(s)$ $(n \geq 1)$ の間には漸化式，

$$Z_n(s) = \sum_{s_1=\pm 1} e^{\beta s s_1} Z_{n-1}(s_1), \tag{B}$$

が成り立つことを示せ．

(2) $Z_n(1) = z^n\, Z_0(1)$，$Z_n(-1) = z^n\, Z_0(-1)$ を仮定して漸化式 (B) を解くことにより，z と $Z_0(1)/Z_0(-1)$ を求めよ．解が複数求まる場合には理由を述べて適切な解を選択せよ．
（上記の仮定は熱力学的極限 $n \to \infty$ において有効と期待される．）

(3) 左端のイジングスピンについても和をとった

$$\bar{Z}_n = Z_n(1) + Z_n(-1) \tag{C}$$

をこの系全体の分配関数とする．小問 (2) の結果を使い，熱力学的極限 $n \to \infty$ でのイジングスピン 1 つあたりのエントロピーを求めよ．

（次ページに続く）

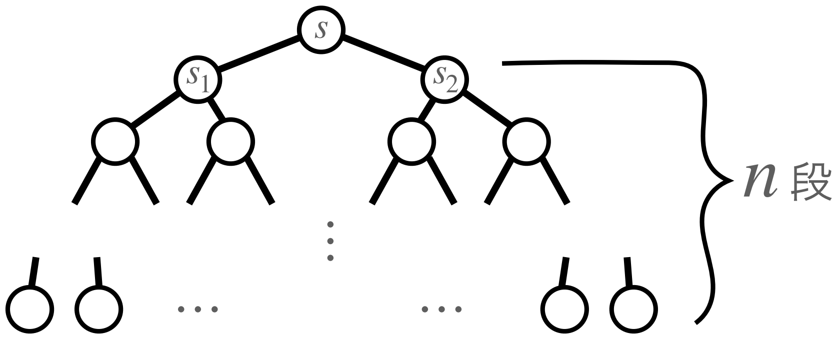

図 2

次に，図 2 のように，上から順に 2 つずつ n 回枝分かれしている樹木状のグラフを考える．最上部のイジングスピンが s である分配関数を $Z_n^{\rm tree}(s)$ と定義する．最下段のイジングスピンについての $Z_0^{\rm tree}(s)$ は全て同一とし，$Z_0^{\rm tree}(1)+Z_0^{\rm tree}(-1)=1$，$Z_0^{\rm tree}(1)>0$，$Z_0^{\rm tree}(-1)>0$ を満たすとする．

(4) $Z_n^{\rm tree}(s)$ と $Z_{n-1}^{\rm tree}(s)$ $(n \geq 1)$ の間の漸化式が

$$Z_n^{\rm tree}(s) = \sum_{s_1=\pm1}\sum_{s_2=\pm1} e^{\beta s(s_1+s_2)} Z_{n-1}^{\rm tree}(s_1) Z_{n-1}^{\rm tree}(s_2) \tag{D}$$

で与えられることを示せ．

以下の小問では $\frac{Z_n^{\rm tree}(1)}{Z_n^{\rm tree}(-1)}$ が n に依存しないと仮定して，この系の性質を調べる．

(5) 漸化式 (D) から，$y = \frac{Z_n^{\rm tree}(1)}{Z_n^{\rm tree}(-1)}$ と $a = e^{2\beta}$ との間に成り立つ関係式を求めよ．

(6) 小問 (5) で求めた関係式を解いて，y を a の関数として表せ．ただし，ある $a_{\rm c}$ を境として $a > a_{\rm c}$ では解が複数存在することに注意せよ．
（［ヒント］ $y=1$ が解の一つである．）

(7) $y=1$ の解との比較で考えたとき，$y \neq 1$ の解で生じる物理現象を簡単に説明せよ．また，$a = a_c$ に対応する温度 T_c は何と呼ばれるか．

II-2 (量子力学) (50 点)

左右に空間的に離れた 2 点を考える．それぞれの点のまわりにおける束縛ポテンシャルは左右とも同じ形状であり，それぞれに粒子の束縛状態が 1 つずつ存在するとする．それぞれのポテンシャルに束縛された Bose 粒子を考える．粒子の内部自由度（スピン等）は考えない．以下の問いに答えよ．必要なら Planck 定数を 2π で割った定数 $\hbar$ を用いよ．
1 粒子状態の固有エネルギーと固有状態を考えよう．系全体の基底状態および励起状態は左に粒子が局在している状態 $|L\rangle$ および右に粒子が局在している状態 $|R\rangle$ の重ね合わせで書くことができるとする．１粒子状態の全ハミルトニアン $\hat{H}$ に対し，

$$\begin{aligned} E_0 &= \langle L|\,\hat{H}\,|L\rangle = \langle R|\,\hat{H}\,|R\rangle > 0 \\ -K &= \langle L|\,\hat{H}\,|R\rangle = \langle R|\,\hat{H}\,|L\rangle < 0 \end{aligned}$$

と E_0 と K を定義する．$|L\rangle$，$|R\rangle$ は規格化されているものとし，$\langle L|R\rangle = 0$ とする．

(1) $|L\rangle, |R\rangle$ を基底として用いてハミルトニアンを行列表示せよ．

(2) 系の基底状態とそのエネルギーを求めよ．状態は規格化せよ．

(3) 系の第一励起状態とそのエネルギーを求めよ．状態は規格化せよ．

(4) 時刻 $t = 0$ で $|L\rangle$ の状態からの系の時間発展を $|L\rangle$ と $|R\rangle$ の基底を用いて示せ．

2 つの同種 Bose 粒子があるときを考える．以下では 2 粒子状態を $|\cdot\rangle_1\,|\cdot\rangle_2$ と記述する．例えば，1 つめの粒子が左にあり，2 つめの粒子が右にある場合は $|L\rangle_1\,|R\rangle_2$ である．

(5) 2 粒子状態としては，$|A\rangle = |L\rangle_1\,|L\rangle_2$ および $|B\rangle = |R\rangle_1\,|R\rangle_2$ 以外に，これらに直交する状態 $|C\rangle$ を考えることができるがそれはどのような状態か．$|L\rangle_1$，$|L\rangle_2$，$|R\rangle_1$，$|R\rangle_2$ を用いて記述せよ．規格化も考慮すること．

2 粒子状態のハミルトニアンは粒子間相互作用を考慮し，$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_{12}$ と記述できる．ここで，$\hat{H}_i$ $(i = 1, 2)$ は i 番目の粒子に関する 1 粒子状態のハミルトニアンである．また，$\hat{H}_{12}$ は相互作用ハミルトニアンであり，$(\langle L|_1\,\langle L|_2)\hat{H}_{12}(|L\rangle_1\,|L\rangle_2) = (\langle R|_1\,\langle R|_2)\hat{H}_{12}(|R\rangle_1\,|R\rangle_2) = U$ で，それ以外の行列要素は 0 とする．

(6) 小問 (5) の $|A\rangle, |B\rangle, |C\rangle$ を基底として用いて，2 粒子系のハミルトニアンを示せ．

(7) 2 粒子系の基底状態の固有エネルギーを求めよ．

（このページは白紙である）

II-3 (実験) (50点)

熱容量はエントロピーの温度微分と関係する熱力学量であり，多くの情報を含んだ重要な物理量である．ここでは熱容量の測定方法の1つを考察する．数値を答える問題では有効数字2桁で単位（SI単位系）も付けて答えよ．

図1のような熱容量計を考える．試料は熱容量Cを持ち，熱伝導Λを持つ細いワイヤーで一定温度T_{B}の熱浴につながれている．試料には温度計とヒーターが取り付けられている．温度計とヒーターは各瞬間において試料と熱平衡にあるとし，温度計で計測する温度は試料の温度Tと等しいとする．また，温度計・ヒーター・ワイヤーの熱容量は無視でき，ワイヤー以外の経路からの熱伝導（熱放射など）は無視できるとする．また，CやΛの温度依存性は無視できるものとする．

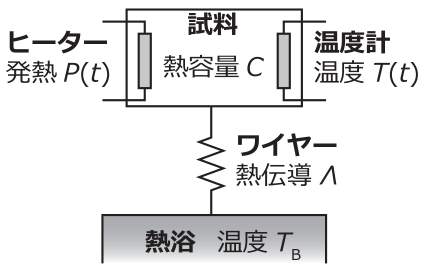

図1

(1) 熱伝導Λが1.0×10^{-5} W/Kとなっている熱容量計を作りたい．細いワイヤーとして，熱伝導率$\lambda = 3.0$ W/(K·m)を持つ合金製の直径2.0×10^{-4} mのワイヤーを用いる．この場合，必要なワイヤーの長さLをmの単位で求めよ．

(2) ヒーターの抵抗を$R_{\mathrm{H}} = 1000\ \Omega$とする．ここに$I_{\mathrm{H}}(t) = I_{\mathrm{H0}} \cos(\omega t/2)$（$I_{\mathrm{H0}} = 2.0 \times 10^{-4}$ A）の交流電流を流すと，$P(t) = P_0(\cos\omega t + 1)$（$\omega > 0$は時間に依存しない定数）のように時間振動する熱が発生する．ここで導入した時間に依存しない定数P_0の値をWの単位で求めよ．

次に，Tの時間依存性を測定・解析することで熱容量を求める方法について考える．以下の小問(3)から(5)ではΛやP_0などの物理量は記号のまま用いること．

(3) 微小時間Δtを考える．時刻tと$t + \Delta t$の間にヒーターから$P(t)\Delta t$の熱量が発生したとき，$\Lambda(T(t) - T_{\mathrm{B}})\Delta t$の熱が熱浴へ逃げ，残りの熱量は試料の温度上昇$\Delta T$に使われる．すると，試料温度$T(t)$の従う微分方程式が

$$C\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = P(t) - \Lambda\left[T(t) - T_{\mathrm{B}}\right] \tag{A}$$

と表せることを示せ．

（次ページに続く）

(4) 小問 (2) のような方法で，ヒーターに時間振動する熱 $P(t) = P_0(\cos\omega t+1)$ を発生させる．このとき，$T(t)$ が定常的な振動解 $T(t) = T_0\sin(\omega t+\delta)+T_{\rm offset}$ を持つと仮定する．ただし，T_0，δ，$T_{\rm offset}$ は時間に依存しない定数とし，$T_0 \geq 0$ とする．この場合，振動解の温度振幅 T_0 が

$$T_0 = \frac{P_0}{C}\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}} \tag{B}$$

の形で表せることを示せ．また，上式で新しく導入された量 ω_0 を C と $\mathit{\Lambda}$ を用いて表せ．ただし，$\omega_0 > 0$ とする．

(5) 小問 (4) で求めた解について，$\omega \ll \omega_0$ と $\omega \gg \omega_0$ の両方の極限の場合の T_0 の表式を，P_0，C，$\mathit{\Lambda}$，ω のうち必要なものを用いてそれぞれ表せ．また，T_0，P_0，ω の 3 つの値が既知または測定できるとき，これらの値から熱容量 C を得ることができるのはどちらの極限の方か答えよ．

最後に，小問 (3) から (5) で考えた方法を用いて実際に熱容量を測定する場合を考えよう．なお，測定は小問 (1) と (2) で考えた条件の下で行うとし，必要であればこれらの小問で出てきた値を用いよ．

(6) 未知の熱容量を持つ試料を熱容量計に載せ，ω を変えながら温度振幅 T_0 を測定した．その結果が表に示されている．これらの結果を用いて，試料の熱容量の値を有効数字 2 桁で J/K の単位で求めよ．なお，T_0 の測定の際の誤差は，表に示されているようにどの ω でも 0.0005 K であるとする．有効数字を考える際はこの誤差も考慮に入れること．

ω (s^{-1})	T_0 (K)
0.1	1.6454 ± 0.0005
0.2	1.1724 ± 0.0005
0.5	0.5560 ± 0.0005
1.0	0.2865 ± 0.0005
2.0	0.1443 ± 0.0005
5.0	0.0579 ± 0.0005
10.0	0.0289 ± 0.0005
20.0	0.0145 ± 0.0005
50.0	0.0058 ± 0.0005

II-4 （英語）(50 点)

Here is an excerpt adapted from................ Please read the passage carefully and answer the questions **(a)** to **(i)** with easy-to-understand English. Note that some words have been translated to Japanese in the footnotes.

（次ページに続く）

（次ページに続く）

Answer the following questions concerning the passage above.

(a) Which of the following words can best replace the underlined text without changing the meaning? Write one of a1, a2, a3 or a4 in the answer space.

a1) problem a2) power
a3) responsibility a4) fate

(b) Fill in an appropriate article (“the”, “an”, or “a”) in the underlined spaces (b1) to (b8) in the sentences. Capitalize your answers as necessary and if no article is needed write “ϕ” in the answer space.

(c) Which of the following words can best replace the underlined text without changing the meaning? Write one of c1, c2, c3 or c4 in the answer space.

c1) sharply reduce c2) largely increase
c3) eliminate c4) is irrelevant to

(d) Which of the following **cannot** replace the underlined text? Write one of d1, d2, d3, or d4 in the answer space.

d1) hole d2) gap
d3) vacuum d4) divergence

(e) The underlined words have been scrambled. Put them in the correct order.

(f) Complete the sentence by providing an appropriate word to fill in the underlined space.

(g) Complete the sentence by providing an appropriate word to fill in the underlined space.

(h) Which of the following is wrong regarding the viewpoints expressed in the essay? Write one of h1, h2, h3, or h4 in the answer space.

h1)

h2)

h3)

（次ページに続く）

h4)

(i)

State your opinion on whether this is a good or bad thing for Japan. Answer with more than 30 words.