令和４年度大学院入学試験問題　I（３時間）

注意

(1) 問題 I–1，I–2，I–3 の解答はそれぞれ指定された解答用紙 1 枚に記入せよ．

(2) 問題 I–1 の解答には裏面を用いてもよい．

(3) 問題 I–2 は独立した 2 つの小問 I–2A，I–2B から，問題 I–3 は独立した 4 つの小問 I–3A，I–3B，I–3C，I–3D からなる．それぞれの小問の解答は解答用紙の指定された場所（裏面を含む）に記入せよ．

(4) 各解答用紙は横長に使用して，表側の左上部（線より上）に受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の他の部分に受験番号，氏名を書いてはいけない．解答用紙上部の線より上の欄には表，裏とも解答を書いてはいけない．

(5) 解答用紙は 3 問（計 3 枚）すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない．

(6) 問題冊子は表紙を含めて 11 ページまである．

I-1 (量子力学) (100 点)

図 1 のように，質量 m 電荷 q の粒子が平面 (x, y) 上で非相対論的に運動している．粒子には中心力ポテンシャル

$$V(x, y) = \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) \tag{A}$$

がはたらいている．ここで ω は正の実数である．また，平面上には一様磁場 B $(B \geq 0)$ が奥から手前に向かって垂直にかけられていて，この磁場を与えるベクトルポテンシャルは

$$(A_x, A_y) = \frac{B}{2}(-y, x) \tag{B}$$

である．以下では，i は虚数単位，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものとする．また ^ のついた記号は量子力学的演算子を表すものとする．

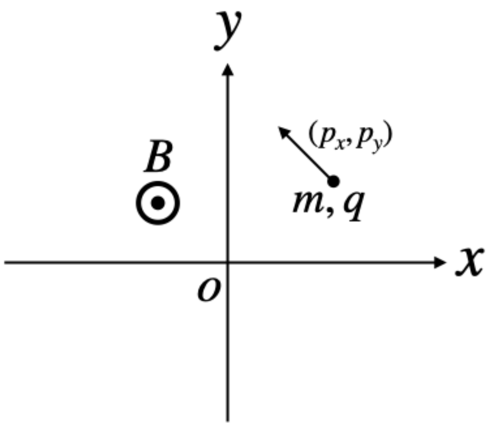

図1

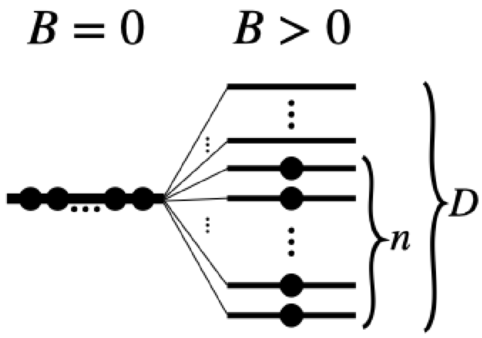

図2

まず $B = 0$ の場合を考える．

(1) この粒子の古典力学的ハミルトニアン $H_{B=0}$ を書け．ただし，粒子の運動量として (p_x, p_y) の記号を使うこと．

(2) $H_{B=0}$ を量子化して得られるハミルトニアン演算子 $\hat{H}_{B=0}$ について独立なエネルギー固有状態とエネルギー固有値を全て書け．ただし固有状態は以下のように各座標方向を量子化して導入した昇降演算子 $\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i$ $(i = x, y)$ を用いて表すこと．また，基底状態 $|0\rangle$ を $\hat{a}_x|0\rangle = \hat{a}_y|0\rangle = 0$ で導入する．状態のノルムの規格化は行わなくても良い．

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_x\right),\ \hat{p}_x = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}_x^\dagger - \hat{a}_x\right), \tag{C}$$

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_y\right),\ \hat{p}_y = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_y\right). \tag{D}$$

（次ページに続く）

(3) 角運動量演算子

$$\hat{L} = \hat{x}\,\hat{p}_y - \hat{y}\,\hat{p}_x, \tag{E}$$

及び,

$$\hat{M} = \hat{a}_x^\dagger + i\,\hat{a}_y^\dagger,\ \hat{N} = \hat{a}_x^\dagger - i\,\hat{a}_y^\dagger, \tag{F}$$

を導入する．以下の各交換関係,

$$[\hat{H}_{B=0}, \hat{L}],\ [\hat{H}_{B=0}, \hat{M}],\ [\hat{H}_{B=0}, \hat{N}],\ [\hat{L}, \hat{M}],\ [\hat{L}, \hat{N}],\ [\hat{M}, \hat{N}] \tag{G}$$

を全て求めよ．ただし，結果は $\hat{H}_{B=0}$, $\hat{L}$, $\hat{M}$, $\hat{N}$ で表すこと（結果を昇降演算子や位置や運動量の演算子で表さないこと）.

(4) $\hat{H}_{B=0}$ と $\hat{L}$ の独立な同時固有状態を $\hat{M}$ と $\hat{N}$ を使って全て書け．各状態の $\hat{H}_{B=0}$ と $\hat{L}$ の固有値も書け．状態のノルムの規格化は行わなくても良い.
（ヒント：$\hat{M}$ と $\hat{N}$ が $\hat{a}_x^\dagger$ と $\hat{a}_y^\dagger$ の替わりとして使えることに注意せよ。）

次に $B > 0$ の場合を考える．この場合の古典力学的ハミルトニアン H_B は $B = 0$ におけるハミルトニアン $H_{B=0}$ に対して,

$$p_x \to p_x - qA_x,\ p_y \to p_y - qA_y \tag{H}$$

という置き換えを行うことにより得られる.

(5) $H_{B=0}$ に対して式 (H) の置き換えを行った後に，式 (B) を代入することにより，H_B を書き下せ．ただし，角運動量 $L = x\,p_y - y\,p_x$ を使って見通しの良い形にすること.

(6) H_B を量子化した $\hat{H}_B$ について，エネルギー固有値を全て求めよ.

更に粒子が複数存在する場合を考える．粒子はパウリの排他律を満たす同種粒子とし，粒子間の相互作用を無視する．エネルギーの低い状態から順に１粒子により占有される．簡単のため，以下の小問では，粒子のスピンの自由度は無いものとし，また，$q > 0$ とする.

(7) 図２のように $B = 0$ において状態の縮退度が $D\,(D > 1)$ のエネルギー準位に，n $(0 < n \leq D)$ 個の粒子が存在していたとする．磁場を $B > 0$ に変化させたところ，状態のエネルギーの縮退が解け，粒子は D 個の状態の中でエネルギーの低い n 個の状態を占有した．これらの n 個の状態のエネルギーの総和を求めよ.

(8) (a) $n = D$ と (b) $0 < n < D$ のそれぞれの場合で，小問 (7) で求めたエネルギーの $B = 0$ 近傍での振る舞いを，それぞれの特徴がよくわかるように図示せよ.

I-2A (電磁気学) (50 点)

真空中に置かれた電気双極子と電気四重極子について次の小問に答えよ．ここで，真空の誘電率を ε_0 とし，SI 単位系を用いて解答せよ．なお，必要に応じて次の展開の式 (A) を用いてよい．

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)x^2/2 + \cdots (|x| \ll 1) \qquad \text{(A)}$$

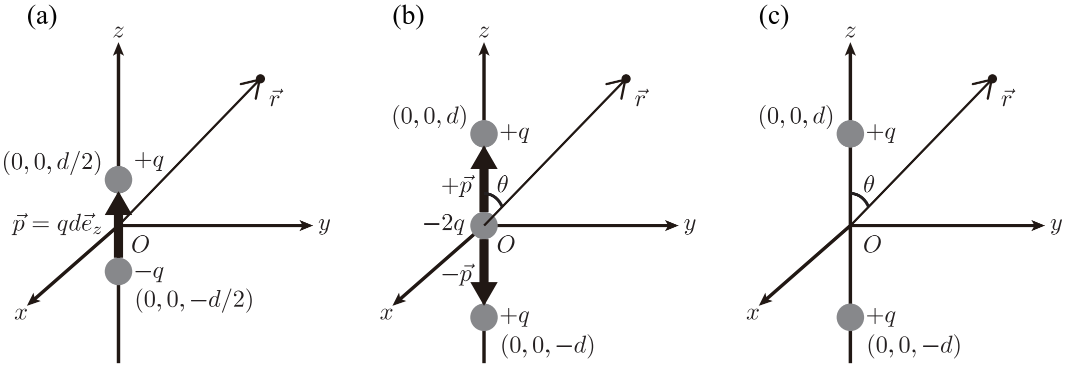

図 1

(1) 図 1(a) のように，電気量 $+q$ と $-q$ を持つ点電荷が z 軸上の $(0,0,d/2)$ と $(0,0,-d/2)$ に配置されたときの静電ポテンシャルについて考える．d, q は正とする．点 $\vec{r} = (x,y,z)$ における静電ポテンシャル ϕ_1 を示せ．また，z 軸上 $(x=y=0)$ における静電ポテンシャル ϕ_1 の概略図を示せ．

(2) 小問 (1) で，距離 $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ に比べて間隔 d が十分に小さい場合，点電荷の対を電気双極子という．静電ポテンシャル ϕ_1 において d/r の 2 次以上の微小量を無視することにより，電気双極子の静電ポテンシャル ϕ_2 を $\vec{r}$，$\vec{p}$ を用いて示せ．ここで，電気双極子モーメントを $\vec{p} = qd\vec{e}_z = (0,0,qd)$ とし，z 軸方向の単位ベクトルを $\vec{e}_z$ とする．

(3) 小問 (2) で求めた静電ポテンシャル ϕ_2 と $\vec{E} = -\nabla\phi$（ϕ：静電ポテンシャル）の関係から，電場 $\vec{E}$ を $\vec{r}$，$\vec{p}$ を用いて示せ．ただし，演算子 ∇ を含んではならない．

(4) 反対向きの大きさの等しい 2 つの電気双極子が接近した場合を電気四重極子という．電気四重極子として，図 1(b) のように 3 つの点電荷 $+q$，$-2q$，$+q$ が互いに d だけ離れて z 軸上に一直線状に並んでいる場合について考える．図 1(b) のように $\vec{r}$ と z 軸の成す角度を θ とする．このとき，十分遠方の点 $\vec{r}$ における静電ポテンシャルを r と θ の関数 $\phi_3(r,\theta)$ として求めよ．ここで，d/r の 3 次以上の微小量を無視する．

（次ページに続く）

(5) 小問 (4) で求めたポテンシャル $\phi_3(r,\theta)$ から，r 方向と θ 方向の電場を求めよ．

(6) 図 1(c) のように，電気量 $+q$ を持つ電荷が距離 $2d$ だけ離れて置かれている．十分遠方での静電ポテンシャル ϕ_4 を求め，小問 (4) で求めた電気四重極子との大きさの違いについて述べよ．

I-2B (物理数学) (50 点)

一次元波動方程式を，無限区間において，ある初期条件のもとで解くことを考える．

(1) 初めに，$f(x,y)$ に関する偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ の一般解は，x の任意関数 $\psi(x)$ と y の任意関数 $\phi(y)$ の和 $f = \psi(x) + \phi(y)$ として表せることを示せ．

(2) $u(x,t)$ に関する一次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (c > 0) \tag{A}$$

の一般解を求めるために，まず，新しい独立変数 $\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct$ を使って，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$ を求めよ．

(3) 次に，この波動方程式の一般解を，ξ の任意関数 $\psi(\xi)$ と η の任意関数 $\phi(\eta)$ で表せ．

初期条件 $u(x,0) = \exp(-x^2)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ の時，式 (A) の解を得たい．

(4) この初期条件を，$\psi(x)$, $\phi(x)$, $\dfrac{d}{dx}\psi(x)$, $\dfrac{d}{dx}\phi(x)$ の線形結合で表せ．ここで，$\psi(x)$ と $\phi(x)$ は小問 (3) のような関数 $\psi(x+ct), \phi(x-ct)$ で $t=0$ としたものである．

小問 (4) で得られた $\psi(x)$, $\phi(x)$, $\dfrac{d}{dx}\psi(x)$, $\dfrac{d}{dx}\phi(x)$ の満たす微分方程式を解こう．

(5) まずは，積分定数を C_1 として，$\psi(x)$ の一般解を求めよ．

(6) 同様に $\phi(x)$ の一般解も求めたのち，$u(x,t)$ を決定せよ．

(7) 図 1 を解答用紙に書き写し，$u(x,0)$ と $u\left(x, \dfrac{3}{c}\right)$ をそれぞれ点線と実線で簡略に図示せよ．

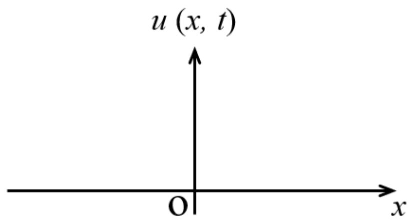

図 1

（このページは白紙である）

I-3A (力学) (25 点)

慣性系 S に対して一定角速度 $\vec{\omega}$ で回転する系 S' を考える．回転系 S' で見た時間微分は $\dfrac{d'}{dt}$ で表すことにする．回転系 S' で静止しているベクトル $\vec{A}$ の慣性系における時間変化は $\dfrac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}$ であり，回転系から見た時間変化 $\dfrac{d'\vec{A}}{dt}$ もゼロでない場合には $\dfrac{d\vec{A}}{dt} = \dfrac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}$ となる．これは一般のベクトルに対して成立し，位置ベクトル $\vec{r}$ に関しても，

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d'\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{A}$$

である．

(1) 式 (A) を慣性系でさらに時間微分して，慣性系での加速度 $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ と，一定角速度 $\vec{\omega}$ で回転する回転系 S' から見た時の加速度 $\dfrac{d'^2\vec{r}}{dt^2}$，速度 $\dfrac{d'\vec{r}}{dt}$ の関係式を表せ．どの項がコリオリの力に相当し，どの項が遠心力に相当するか書け．

(2) 質量 m, 電荷 q を持つ荷電粒子が，中心力 $\vec{F}(\vec{r})$ の作用を受けて運動している．

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}) \tag{B}$$

この系に，一様な弱い磁場（磁束密度がどこでも $\vec{B}$ ）を加えた時の運動を考える．磁場方向の単位ベクトルを $\vec{k}$ として，力の中心のまわりに $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ で回転する回転系から見た運動方程式を書け．

(3) 回転系から見た速度と磁場による力と，コリオリの力とが打ち消し合うためには，$\vec{\omega}$ はどうであれば良いか．m, q, $\vec{B}$ で表せ．

I-3B (熱力学) (25 点)

シュテファン・ボルツマンの法則を，熱力学的考察から求めたい．

(1) 気体の内部エネルギー $U(S, V)$（S はエントロピー，V は体積）の全微分 dU を，温度 T と圧力 p も用いて表せ．また，気体の自由エネルギー $F = U - TS$ に関して，$F(T, V)$ として，全微分 dF を表せ．

(2) 気体の温度 T と体積 V の関数としての内部エネルギー $U(T, V)$ の全微分 dU を考えることで，$\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ を，温度 T と圧力 p を用いて表せ．

(3) 光子気体の圧力 p は，エネルギー密度 $\tilde{u}$ すなわち単位体積当たりの内部エネルギー $\dfrac{U}{V}$ の $\dfrac{1}{3}$ に等しく，$p = \dfrac{1}{3}\dfrac{U}{V} = \dfrac{1}{3}\tilde{u}$ である．
このことから，熱放射場のエネルギー密度 $\tilde{u}$ が温度 T の何乗に比例するか求めよ．導出過程を簡潔に示すこと．

I-3C (物理数学) (25 点)

(1) 3 次元ベクトル $\vec{A}, \vec{B}$ について, 次の式 (A),(B) を証明せよ. (1 成分について示せば良い.)
但し

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$$

である.

$$\mathrm{rot}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\mathrm{div}\vec{B}) - \vec{B}(\mathrm{div}\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} \qquad \text{(A)}$$

$$\vec{A}\times\mathrm{rot}\vec{A} = -(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{A} + \frac{1}{2}\nabla\vec{A}^2 \qquad \text{(B)}$$

(2) $\mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{B})$ を $\mathrm{rot}\vec{A},\ \mathrm{rot}\vec{B},\ \vec{A},\ \vec{B}$を使って表せ.

(3) 次の連立常微分方程式の一般解を求めよ. $y = y(x), z = z(x)$ とし, 記号 $'$ は d/dx である.

$$\begin{cases} y' + z' + 7y + 5z = 0 \\ \\ 3y' + 2z' + y + z = 0 \end{cases} \qquad \text{(C)}$$

(4) 次の積分を求めよ.

$$\int_0^1 \frac{\log_e(1-x)}{x}dx \qquad \text{(D)}$$

但し

$$|x| \leq 1, x \neq 1$$

とし,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

を使って良い.

I-3D (量子力学) (25 点)

スピンが S，その z 成分が S_z の規格化された量子力学的状態を $|\,S, S_z\,\rangle$ と表記する．ここで，$S_z = -S, -S+1, \cdots S-1, S$ である．この $|\,S, S_z\,\rangle$ に対して $\hat{S}^{-}|\,S, S_z\,\rangle = \sqrt{(S+S_z)(S-S_z+1)}|\,S, S_z-1\,\rangle$ を満たす演算子 $\hat{S}^{-}$ を導入する．この時，以下の設問に答えよ．

まず，スピン 1/2 の粒子 2 つのスピンの合成を考える．

(1) 合成された全スピンが 1，その z 成分が 1 である規格化された状態 $|\,1, 1\,\rangle$ を，スピン 1/2 の状態の直積 $|\,1/2, m_1\,\rangle|\,1/2, m_2\,\rangle$ を用いて表せ．

(2) 全スピンが 1，その z 成分が 0 である規格化された状態 $|\,1, 0\,\rangle$ を，小問 (1) の結果から出発し，$|\,1/2, m_1\,\rangle|\,1/2, m_2\,\rangle$ の線形結合として表現せよ．ただし，$\hat{S}^{-}$ は，$\hat{s}_1^{-} + \hat{s}_2^{-}$ のように，それぞれの粒子に作用する演算子の和としても定義される．

(3) 小問 (2) の状態に直交させることで，全スピンが 0，その z 成分が 0 である規格化された状態 $|\,0, 0\,\rangle$ を，スピン 1/2 の状態の直積 $|\,1/2, m_1\,\rangle|\,1/2, m_2\,\rangle$ の線形結合として表現せよ．

次に，スピン 1 の粒子とスピン 1/2 の粒子のスピンの合成を考える．

(4) 全スピンが 3/2，その z 成分が 1/2 の規格化された状態 $|\,3/2, 1/2\,\rangle$ を，スピン 1 と 1/2 の状態の直積 $|\,1, M\,\rangle|\,1/2, m\,\rangle$ の線形結合として求めよ．ここで $M = 1, 0, -1$，$m = 1/2, -1/2$ である．

令和4年度大学院入学試験問題　II（3時間）

注意

(1) 問題 II–1，II–3 の解答はそれぞれ指定された解答用紙 1 枚に，問題 II–2 の解答は指定された解答用紙 2 枚に記入せよ．

(2) 問題 II–1 の解答には裏面を用いてもよい．

(3) 問題 II–2 は独立した 3 つの小問 II–2A，II–2B，II–2C からなる．それぞれの小問の解答は解答用紙の指定された場所（裏面を含む）に記入せよ．

(4) 問題 II–3 の解答は解答用紙の指定された場所に記入せよ．

(5) 各解答用紙は横長に使用して，表側の左上部（線より上）に受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の他の部分に受験番号，氏名を書いてはいけない．解答用紙上部の線より上の欄には表，裏とも解答を書いてはいけない．

(6) 解答用紙は 3 問（計 4 枚）すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない．

(7) 問題冊子は表紙を含めて 11 ページまである．

II-1 (統計力学) (100 点)

量子力学において同種粒子が集まった際に現れる性質を考えよう.

(1) まず, 同種粒子として, 相互作用していない自由ボース粒子を考える. N 個の同一の自由ボース粒子が G_0 個の相異なる一粒子状態を占有するとき, その状態数 $W_{\rm b}$ を, $N=2$, $G_0=3$ の場合について求めよ.

(2) 次に同種粒子として, 相互作用していない自由フェルミ粒子を考える. N 個の同一の自由フェルミ粒子が G_0 個の相異なる一粒子状態を占有するとき, その状態数 $W_{\rm f}$ を, $N=2$, $G_0=3$ の場合について求めよ.

次に, G_0 個の一粒子状態からなる系に, $N-1$ 個の同種粒子が存在している状況を考える. ここにもう 1 つ同じ粒子を加えるとき, 新たに加える粒子が占有できる一粒子状態の数 $G(N)$ は自由ボース粒子と自由フェルミ粒子とで異なる.

(3) 自由ボース粒子では同じ状態を異なる粒子が占有することができ, そのため, $G(N)$ は N に依存しない. 一方, 自由フェルミ粒子では同じ状態を一つの粒子しか占有することができないので, $G(N)$ は N に依存する. 自由ボース粒子および自由フェルミ粒子に対してそれぞれ $G(N)$ を求めよ.

小問 (1) および小問 (2) で求めた状態数 $W_{\rm b}$ 及び $W_{\rm f}$ は, $N \le G_0$ である一般の G_0 と N に対して, $G(N)$ を用いて

$$W(N) = \frac{[G(N)+N-1]!}{N![G(N)-1]!} \tag{A}$$

の形にまとめることができる. これは「既に $N-1$ 個の粒子によって占有されていた $N-1$ 個の一粒子状態」と「N 番目の粒子が占有することができる $G(N)$ 個の一粒子状態」を足し合わせた $G(N)+N-1$ 個の一粒子状態に, N 個の粒子を分配する場合の数として状態数 $W(N)$ を求めることができることを意味する. この性質を一般化すると, 相互作用のある系に現れる自由ボース粒子と自由フェルミ粒子の中間的な性質を持つ粒子の性質を調べることが可能となる. そのような例として, 以下では $G(N)$ が

$$G(N) = G_0 - \alpha(N-1) \tag{B}$$

となり, 状態数 $W(N)$ が式 (A) で与えられる同種粒子を考える. ここで α は $0 \le \alpha \le 1$ を満たす有理数であり, $N \le G_0$ かつ G_0 は十分大きいとする.

(4) この系のエントロピー S を G_0 で割ったものを, ボルツマン定数 k および占有数 $n = N/G_0$ を用いてあらわせ. ただし, G_0 および N は十分大きいとして, スターリングの公式 $\ln N! = N\ln(N/e)$ を用いること.

(次ページに続く)

(5) 小問 (4) の系のエネルギーが ϵN $(\epsilon \geq 0)$ で与えられるとき, 化学ポテンシャルを μ, 温度を T として, 大きな分配関数 $\Theta(\mu, T)$ は

$$\Theta(\mu, T) = \sum_N W(N) e^{-(\epsilon-\mu)N/kT} \tag{C}$$

で与えられる. これを

$$\Theta(\mu, T) = \sum_N e^{-J/kT} \tag{D}$$

と書き直したとき, N が十分大きい場合の J/G_0 を n の関数の形で求めよ.

(6) 占有数 n の平均値 $\langle n \rangle$ は分布関数と呼ばれ, 小問 (5) で求めた J に対し, $\partial J/\partial n = 0$ を解くことで得ることができる. 今 w を $w = \langle n \rangle^{-1} - \alpha$ として,

$$e^{(\epsilon-\mu)/kT} = f(w) \tag{E}$$

としたとき, $f(w)$ を求めよ.

(7) $\alpha = 0$, $\alpha = 1/2$, $\alpha = 1$ の場合の分布関数 $\langle n \rangle$ をそれぞれ求めよ. またどの場合がボース分布関数か, どの場合がフェルミ分布関数であるか, それぞれ答えよ.

(8) $\alpha \neq 0$ の場合, 温度 T の関数として，分布関数 $\langle n \rangle$ には上限値が存在する. $\epsilon < \mu$ のとき, その上限値を求めよ.

II-2A (量子力学) (50 点)

デルタ関数型の引力ポテンシャルがあるときの 1 次元シュレディンガー方程式を考える：

$$H\,\varphi(x) \equiv \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \lambda\,\delta(x)\right]\varphi(x) = E\,\varphi(x) \quad (\lambda > 0). \tag{A}$$

ここで，m は粒子の質量，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである．

(1) 波動関数 $\varphi(x)$ は原点 $x=0$ で連続だが傾きは不連続になる．傾きの「とび」が次で与えられることを示せ：

$$\lim_{\epsilon\to+0}\big[\varphi'(\epsilon) - \varphi'(-\epsilon)\big] = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\,\varphi(0). \tag{B}$$

<u>束縛状態 $(E < 0)$</u>

(2) 束縛状態のエネルギーを $E\,(<0)$ とするとき，対応する波動関数 $\varphi(x)$ の $x<0$, $x>0$ それぞれの領域での関数形を $\kappa \equiv \sqrt{-2mE/\hbar^2}$ を用いて表せ．なお，波動関数の規格化は行わなくてよい．

(3) 式 (B) を用いて κ を求め，束縛状態のエネルギーを求めよ．

<u>散乱状態 $(E > 0)$</u>

(4) $x<0$ の領域から入射した粒子の散乱状態を表す波動関数を

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + A\,e^{-ikx} & (x<0) \\ B\,e^{ikx} & (x>0) \end{cases} \tag{C}$$

とするとき，エネルギー E を波数の大きさ k で表せ．

(5) $\varphi(x)$ の $x=0$ における連続性と傾きの「とび」から，A と B を k の関数として求めよ．

(6) 散乱確率 $R = |A|^2$ と透過確率 $T = |B|^2$ を k の実関数として求めよ．

（このページは白紙である）

II–2B (実験) (50 点)

ある物質から光子が等方的に放射される状況を考える．この光子数を検出器を用いて測定する．物質から放出される光子数は単位時間あたり $p_{\rm all}$ であり，時間によらない未知の定数とする．検出器はある立体角 S に放射された光子のみを検出する．このとき、観測時間 t で k 個の光子が得られる確率は，検出器に入射する光子の単位時間当たりの数 $p = p_{\rm all}S/(4\pi)$ を用いて、ポアソン分布

$$P(k,t) = e^{-pt}\frac{(pt)^k}{k!} \tag{A}$$

で得られる．なお放出されてから検出器まで光は減衰しないものとする．以下の小問 (1)-(5) に対して，導出も示して答えよ．また，必要なら $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$, $0! = 1$ を用いよ．

(1) 測定時間 t での光子数の期待値は pt であることを式 (A) を用いて確かめよ．

短い間隔で入射する光子を検出器が正しく検出できない場合を考える．その影響を簡単なモデルを立てて考えよう．具体的には，光子数検出器は光子数の正確な計測はできず， ある時間分解能 Δt の間の光子数が 0 個または 1 個以上の 2 通りを区別できるとしよう (図 1(a))．光子数 0 個の場合は 0 カウント， 1 個以上の場合は 1 カウントという測定結果が得られる．さらに，全観測時間 T に対し $N = T/\Delta t$ 回の独立した観測が行われるとする (図 1(b))．

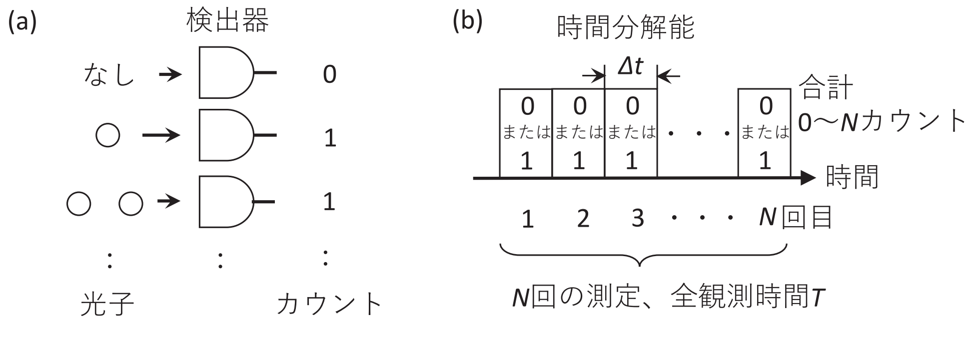

図 1

(2) N 回の測定結果を合計した全カウント数の期待値 N_0 を求めよ．

(3) T が一定の条件で N_0 の $\Delta t \to 0$ での極限を求めよ．

（次ページに続く）

光子数検出器の上記の特性により，$\Delta t > 0$ の場合は N_0 は実際に検出器に入射する光子数の期待値 pT よりも少ない．そこで光源からの正しい単位時間あたりの光子放射数 p を求めるために，検出器を光源から離し立体角を $S/2$ にして追加測定を行った．

(4) 検出器を離した時に検出器で全観測時間 T に測定された全カウント数の期待値を N_1 とする． N_0， N_1 を T， p， Δt を用いて求めよ．ただし、$p\Delta t$ は十分小さいものとして，N_0， N_1 は Δt の 1 次まで評価せよ．

(5) 小問 (4) の結果を用いて p， Δt を T， N_0， N_1 を用いて求めよ．

II-2C (力学) (50 点)

図 1 のように，質量 m の質点が長さ ℓ の太さと質量の無視できる剛体棒でつるされた振り子 1 と振り子 2 があり，鉛直下向き方向をむいた一様な重力（重力加速度 g）の下で運動する．二つの振り子の支点はある水平な軸上にあり，両振り子はその軸に垂直な面内で運動する．鉛直下向き方向と振り子の棒のなす角度を図に示すように θ_1，θ_2 とする．さらに，二つの振り子の支点同士はねじれ変形が可能な棒でつながれており，θ_1 と θ_2 の差に応じたエネルギー $k(\theta_1-\theta_2)^2/2$（k は正の定数）が生じる．また，以下では微小振動 $|\theta_i| \ll 1$（$i=1,2$）の場合を考え，摩擦や空気抵抗などは無視できるとする．

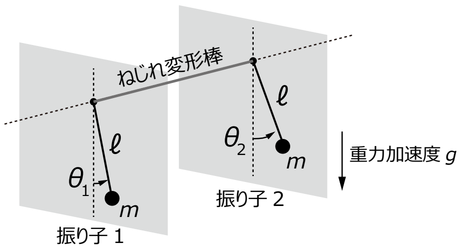

図 1

(1) この系の運動エネルギー T，ポテンシャルエネルギー U，ラグランジアン $L=T-U$ を，θ_i およびそれらの時間微分 $\dot{\theta}_i$ の 2 次までで求めよ．なお，位置エネルギーに関しては，$\theta_1=\theta_2=0$ のときを基準とせよ．

(2) θ_1 および θ_2 の微小振動の微分方程式が

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

と書けることを示し，定数 A，B，C，D を g，k，ℓ，m を用いて表せ．

(3) $\theta_1(t)=Q_1\sin(\omega t+\delta_1)$，$\theta_2(t)=Q_2\sin(\omega t+\delta_2)$（$Q_i$ および δ_i（$i=1,2$）はいずれも定数）の形の解を仮定することで，この系の二つの固有角振動数 ω_+ と ω_-（ただし $\omega_+>\omega_->0$ とする．）を求め，g，k，ℓ，m を用いて表せ．

(4) それぞれの固有角振動数の解について，振幅 Q_i と位相 δ_i の満たすべき条件を求めよ．さらに，$\theta_1(t)$ と $\theta_2(t)$ の一般解を，ω_+ と ω_- および適切に導入した任意定数を用いて表せ．

(5) 振り子 1 と 2 が共に $\theta_1=\theta_2=0$ で静止している状態から，時刻 $t=0$ で振り子 1 に角速度 Ω_0（$0<\Omega_0\ll\omega_-$）を与えた．この場合の $t>0$ での θ_1 と θ_2 の時間依存性を，ω_+，ω_-，Ω_0 を用いて表せ．さらに，ω_+ と ω_- の大きさが近い場合の θ_1 と θ_2 の時間依存性の特徴を簡潔に述べよ．

（このページは白紙である）