令和３年度大学院入学試験問題　I（2 時間）

注意

(1) 問題 I–1，I–2，I–3 の解答はそれぞれ指定された解答用紙 1 枚に記入せよ．

(2) 問題 I–1，I–2 の解答は裏面を用いてもよい．

(3) 問題 I–3 は独立した 2 つの小問 I–3A，I–3B からなる．それぞれの小問の解答は解答用紙の指定された場所に記入せよ (裏面には記入しない)．

(4) 各解答用紙は横長に使用して，表側の左上部（線より上）に受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の他の部分に受験番号，氏名を書いてはいけない．解答用紙上部の線より上の欄には表，裏とも解答を書いてはいけない．

(5) 解答用紙は 3 問（計 3 枚）すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない．

(6) 問題冊子は表紙を含めて 7 ページまである．

I-1 (電磁気学) (100 点)

z 方向に無限に延びた導体内に真空の中空があり，そこに電磁波が伝搬する．中空の xy 平面（断面）は一定の長方形であり，図 1 に示すように，x 方向の長さが a，y 方向の長さが b である．電磁波は真空中を z 方向に伝搬する．真空の誘電率を ε_0，真空の透磁率を μ_0 とするとき，以下の設問に答えよ．なお，解答は SI 単位系で述べよ．

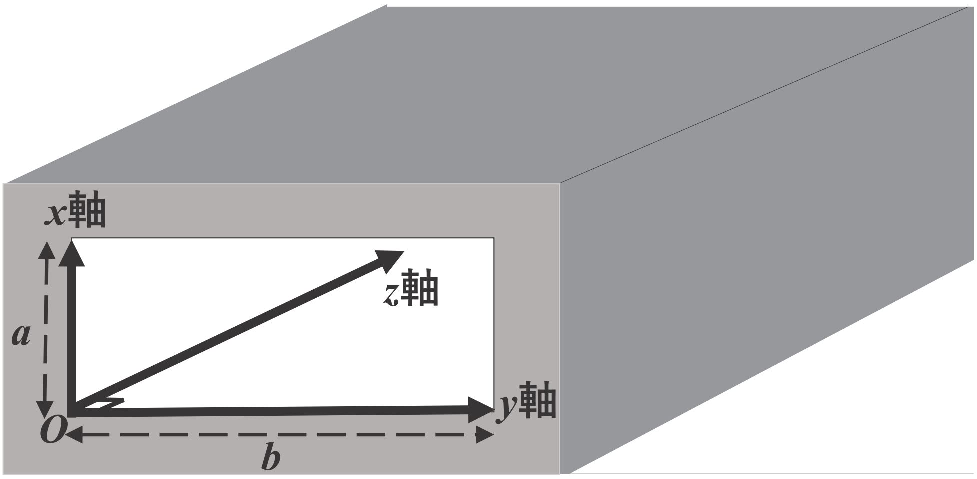


図 1

(1) 電場が $\vec{E} = \vec{E}_0(x, y)\exp[i(kz-\omega t)]$，磁束密度が $\vec{B} = \vec{B}_0(x, y)\exp[i(kz-\omega t)]$ と与えられるとする．ここで電磁波の z 方向の波数 k と角振動数 ω は定数である．$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$，$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ とおいたとき，マクスウェル方程式 $\nabla \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ の x, y 成分より，$\partial E_z/\partial x$ と $\partial E_z/\partial y$ を E_x，E_y，B_x，B_y によって表わせ．電場および磁束密度の z と t に対する依存性が，問題で与えられた形に限定されていることに注意せよ．

(2) 小問 (1) と同様の条件で，マクスウェル方程式 $\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\partial\vec{E}/\partial t$ の x, y 成分より，$\partial B_z/\partial x$ と $\partial B_z/\partial y$ を E_x，E_y，B_x，B_y によって表わせ．

(3) これ以降 $E_z = 0$ の場合を考える (TE モード)．小問 (1) で求めた E_z の x および y による偏微分も同様に 0 となる．このとき，小問 (2) で求めた $\partial B_z/\partial x$ を E_y によって表せ．同様に $\partial B_z/\partial y$ を E_x によって表せ．

(4) マクスウェル方程式 $\nabla \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ の z 成分に小問 (3) の結果を代入することにより，B_z の満たすべき 2 階の微分方程式を求めよ．

（次ページに続く）

(5) 前問の一般解を，変数分離法により $B_z = [A\cos(k_x x){+}B\sin(k_x x))][C\cos(k_y y){+}D\sin(k_y y)]\exp[i(kz-\omega t)]$ とおく．小問 (4) で得られた方程式に代入し，k_x，k_y の間に成り立つ関係式を求めよ．

(6) 小問 (3) で求めた E_x と E_y に，小問 (5) で与えた $B_z = [A\cos(k_x x){+}B\sin(k_x x)][C\cos(k_y y)+D\sin(k_y y)]\exp[i(kz-\omega t)]$ を代入する．導体表面での境界条件に関してその物理的意味合いについて述べ，それを満たすために k_x，k_y に課される具体的な条件を，中空の断面の辺の長さ a，b を用いて求めよ．

[ヒント] 図 1 のように，長方形の角のひとつを座標原点に取るとよい．

(7) 群速度を理解するために，波数 k と振動数 ω がそれぞれ微妙に異なる，2 つの波の合成を考える．z 方向に伝搬する 2 つの波，$\cos(kz-\omega t)$ と $\cos[(k+\delta k)z-(\omega+\delta\omega)t]$ を同じ振幅で重ね合わせ，その群速度を導出せよ．ここで δk や $\delta\omega$ はそれぞれ k や ω よりも十分小さいとする．

(8) 小問 (1)~(6) における真空を気体で満たし，気体中を伝搬する電磁波の角振動数 ω が z 方向の波数 k の連続的な関数になっているものとする．k_x，k_y は k に依存して変化しないとする．電磁波はさまざまな波数の重ね合わせで与えられる．このとき，z 方向の波数 k の成分に対する位相速度 ω/k と，この波数に対応した群速度との積を求めよ．気体の持つ誘電率を ε とする．透磁率は真空の値 μ_0 を用いる．

(9) 小問 (8) において気体の持つ誘電率 ε が $\varepsilon > \varepsilon_0$ の関係を満たすとき，波数 k に対する位相速度と群速度の積と，真空中を伝搬する光速の 2 乗との大小関係を求めよ．

I-2 (物理数学) (50 点)

3 次元空間における位置ベクトル $\vec{r} = (x, y, z)$ に対する動径方向の単位ベクトルを $\vec{e}_r$，$r = |\vec{r}|$ とする．以下の各設問への解答に際してはその導出過程も含めて記述すること．

(1) $\nabla r = \vec{e}_r$ となることを示せ．

(2) $\nabla(r^n)$ (n は実数) を $r, n, \vec{e}_r$ を用いて表せ．

位置ベクトル $\vec{r}$ に存在する物体に対し，$\vec{F} = r^s \vec{e}_r$ (s は実数) で与えられる力が働く場に関して，小問 (3)∼(5) に答えよ．必要であれば，面積積分と体積積分に関するガウスの発散定理

$$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{A} dV \tag{A}$$

を用いて良い．

(3) ベクトル場 $\vec{F}$ の元となるポテンシャル U を r の関数として表せ．

(4) 原点以外の任意の点において，$\nabla \cdot \vec{F} = a$ (定数) となるための s の条件を a の値とともに求めよ．

(5) 小問 (4) で $a = 0$ となる場合に対し，$\nabla \cdot \vec{F}$ を $\vec{r}$ に関する 3 次元デルタ関数 $\delta^{(3)}(\vec{r})$ を用いて表せ．

次に，$\vec{r}$ は xy 平面内にあるものとし，$\vec{e}_r$ を z 軸に対し $\pi/2$ 回転させたベクトルを $\vec{e}_\theta$，z 軸方向の単位ベクトルを $\vec{e}_z$ とする．$\vec{r}$ に存在する物体に対し，$\vec{F} = r^u \vec{e}_\theta$ (u は実数) で与えられる力が働く場に関して，小問 (6)，(7) に答えよ．必要であれば，線積分と面積積分に関するストークスの定理

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \tag{B}$$

を用いて良い．

(6) xy 平面内で原点以外の任意の点において，$\nabla \times \vec{F} = \vec{b}$ (定数ベクトル) となるための u の条件を $\vec{b}$ とともに求めよ．

(7) 小問 (6) で $\vec{b} = \vec{0}$ となる場合に対し，$\nabla \times \vec{F}$ を xy 平面内での $\vec{r}$ に関する 2 次元デルタ関数 $\delta^{(2)}(\vec{r})$ を用いて表せ．

（このページは白紙である）

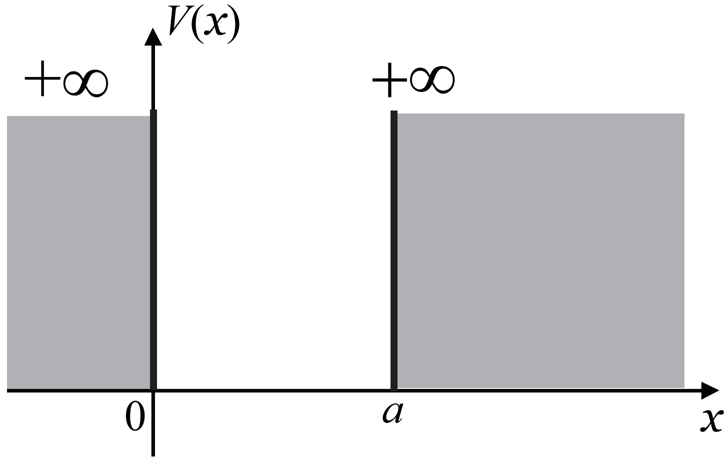
1-3A (力学) (25 点)

長さ ℓ の糸に吊された質量 m のおもりの単振動について考えよう．

(1) 糸が鉛直方向となす角度を θ とし，この系のラグランジアンを示せ．ただし，重力定数を g とする．

(2) $\theta \ll 1$ として，ラグランジュの運動方程式から，単振動の運動方程式を示せ．

I-3B (量子力学) (25 点)



図

図のように無限に高いポテンシャル障壁に束縛された質量 m の粒子について考える．x は位置座標である．$0 < x < a$ において粒子の波動関数 $\varphi(x)$ がシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = E\varphi(x) \tag{A}$$

に従うとして，以下の小問に答えよ．E はエネルギー，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものとする．

(1) 式 (A) のシュレディンガー方程式を解き，エネルギー準位を求めよ．

(2) 波動関数 $\varphi(x)$ を規格化せよ．