

令和2年度大学院入学試験問題 I (3時間)

注意

- (1) 問題I-1, I-2, I-3の解答はそれぞれ指定された解答用紙1枚に記入せよ。
- (2) 問題I-1の解答には裏面を用いてもよい。
- (3) 問題I-2は独立した2つの小問I-2A, I-2Bから, 問題I-3は独立した4つの小問I-3A, I-3B, I-3C, I-3Dからなる。それぞれの小問の解答は解答用紙の指定された場所(裏面を含む)に記入せよ。
- (4) 各解答用紙は横長に使用して, 表側の左上部(線より上)に受験番号, 氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない。解答用紙上部の線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない。
- (5) 解答用紙は3問(計3枚)すべて提出すること。なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (6) 問題冊子は表紙を含めて7ページまでである。

I-1 (電磁気学) (100点)

点電荷の運動により生じる電磁波の放射について考えよう．点電荷の電荷量を q ，時刻 t での点電荷の位置ベクトルを \vec{r} ，速度を \vec{v} ，加速度を \vec{a} とする．光速 c と真空の誘電率 ϵ_0 を用いて，観測点（位置ベクトル \vec{R} ）における時刻 t' での電場 \vec{E} と磁束密度 \vec{B} は以下の表式で与えられる．

$$\vec{E} = \frac{q|\vec{R} - \vec{r}|}{4\pi\epsilon_0 s^3} \left(1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}\right) \left(\vec{\kappa} - \frac{\vec{v}}{c}\right) + \frac{q|\vec{R} - \vec{r}|^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3} \vec{\kappa} \times \left[\left(\vec{\kappa} - \frac{\vec{v}}{c}\right) \times \vec{a}\right], \quad (\text{A})$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{\kappa} \times \vec{E}}{c}. \quad (\text{B})$$

ここで， $t' = t + \frac{|\vec{R} - \vec{r}|}{c}$ ， $\vec{\kappa} = \frac{(\vec{R} - \vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|}$ ， $s = |\vec{R} - \vec{r}|(1 - \vec{\kappa} \cdot \frac{\vec{v}}{c})$ である．点電荷から十分遠方の観測点に対して，以下の小問(1)-(3)に答えよ．なお，解答はSI単位系で述べよ．

- (1) ポインティングベクトルの主要項を求めよ． \vec{E} および \vec{B} を用いない式とすること．なお，必要ならば，ベクトル \vec{A} ， \vec{C} ， \vec{D} に対して $\vec{A} \times (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{D})\vec{C} - (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{D}$ の関係式を用いよ．
- (2) $\vec{\kappa}$ と \vec{a} のなす角を θ とおき，速度の大きさが光速に比べて十分に小さい場合に点電荷から単位時間あたりに放出されるエネルギーの角度分布を求め，図示せよ．
- (3) 単位時間あたりに全方位に放出されるエネルギーは，

$$W = \frac{q^2 |\vec{a}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (\text{C})$$

で表せることを示せ．

次に，質量 m ，電荷量 q の点電荷が一様な磁束密度 $\vec{B} = (0, 0, B)$ のもとにあるとする．ローレンツ力 $\vec{F}(t)$ のもとで運動しているこの点電荷は，電磁波を放射しており，それに伴う反作用として減衰力を受けている．点電荷の運動方程式は正の定数 β を用いて

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(t) + m\beta \frac{d^3 \vec{r}(t)}{dt^3} \quad (\text{D})$$

のように書けるとして，小問(4)-(8)に答えよ．なお，解答はSI単位系で述べよ．

- (4) 点電荷は xy 面内のみで運動するものとし，その座標を $(x, y, 0)$ とおく．複素変数 $V(t) = \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt}$ に対する微分方程式を書き下せ．ここで， i は虚数単位である．
- (5) $|qB\beta/m| \ll 1$ として小問(4)の微分方程式を解くことにより，点電荷の運動エネルギーの時間変化率を求めよ．

- (6) この点電荷の軌跡がほぼ円軌道となる程度に減衰力が小さいとする。このとき、小問(3)の式(C)で与えられる W を V で表せ。
- (7) 小問(5), (6)の結果を比較することにより、式(D)の右辺第二項の定数 β を決定せよ。また、点電荷は電子(質量 m_e , 電荷量 e) であるとして、 β の大きさを有効数字1桁で求めよ。ただし、 $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$, $\hbar c = 197 \text{ MeVfm}$, 微細構造定数 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$, 光速 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ のうち必要なものを用いてよい。ここで \hbar はプランク定数を 2π で割ったものである。
- (8) 小問(7)の条件を満たし、およその円運動の周期が 10 GHz の場合に、 $V(t)$ の減衰時間を求めよ。

I-2A (統計力学) (50点)

固体結晶中の3次元格子振動をモデル化し、比熱の温度依存性を求めることを考える。結晶を構成する原子の振動は互いに独立な調和振動子として扱えると仮定する。原子1個の質量を m 、個数を N 、調和振動子の角振動数を ω として以下の小問に答えよ。

- (1) 古典的に考える。 i 番目の振動子について、平衡位置のまわりの変位を \vec{r}_i 、運動量を \vec{p}_i とする。この系に対するハミルトニアンが

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{|\vec{p}_i|^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} |\vec{r}_i|^2 \right)$$

で与えられる場合に、カノニカル分布を用いて比熱を計算せよ。必要であればガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を用いてよい。

- (2) 1自由度の調和振動子の固有エネルギーが

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

と量子的に与えられる場合に、カノニカル分布を用いて比熱を計算せよ。ここで \hbar はプランク定数を 2π で割ったものとする。

- (3) 小問(2)の場合に、十分高温と十分低温での比熱の温度依存性の特徴を述べよ。

I-2B (量子力学) (50点)

質量 m の粒子が1次元空間でエネルギー $E(> 0)$ を持って高さ $V_0(> 0)$ のポテンシャル障壁に入射する場合を考える. ポテンシャル障壁は $0 \leq x \leq a$ にあって,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ V_0 & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

のように与えられているとし, 粒子は x の負の領域から正の方向へ入射するとしよう. 粒子の波動関数 $\psi(x, t) = e^{-iEt/\hbar}\phi(x)$ がシュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi$$

に従うとして, 以下の小問に答えよ. ここで \hbar はプランク定数を 2π で割ったものとする.

- (1) $x = 0$ および $x = a$ ではポテンシャル $V(x)$ は不連続に変化する. これらの点で関数 $\phi(x)$ の空間一階微分が連続であることを示せ.
- (2) 入射エネルギー E が障壁の高さ V_0 より小さい場合を考える. このとき粒子はある一定の確率で障壁を通過し, $x > a$ の領域に到達する. 定数 k と β をそれぞれ

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

として, 透過率を a , k , β を用いて表せ.

- (3) 透過率が0に限りなく近づくのは, ポテンシャル障壁の厚さ a がどのような条件を満たす場合かを答えよ.

I-3A (解析力学) (25 点)

2次元平面内で質量 m の質点が中心力ポテンシャル V の中を運動している。

- (1) 質点の運動を記述するラグランジアン L を極座標表示 (r, θ) で表せ。
- (2) 小問(1)の L から質点の運動方程式を求めよ。またその式が示す運動の特徴を簡潔に述べよ。

I-3B (電磁気学) (25 点)

真空中に半径 a の球面を置く。球の中も真空である。この球面に総量 Q の電荷を一様に帯電させ、球面の中心 O を通る軸のまわりに角速度 ω で回転させる。ただし、回転により電荷分布は変化しないものとする。なお、真空の透磁率を μ_0 とし、解答は SI 単位系を用いよ。

- (1) 図1のように、回転軸からの角度が θ から $\theta+d\theta$ までの範囲にある微小円環（斜線で示した部分）の電荷が回転することで、中心 O に生じる磁束密度 $d\vec{B}$ を求めよ。
- (2) 小問(1)の結果から、球面が中心 O につくる磁束密度の大きさを求めよ。

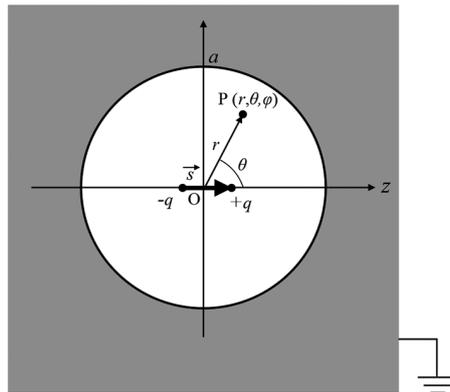


図 1

I-3C (物理数学) (25点)

実数 $x(t)$ に対する 2 階常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0$$

を考える。ただし、 $\beta > 0$, $\omega_0 > 0$, $\beta \neq \omega_0$ とする。

- (1) 一般解を求めよ。
- (2) $x(0) = 0$ として解を求め、 $t > 0$ に対する $x(t)$ の挙動の特徴を簡潔に述べよ。

I-3D (誤差統計) (25点)

- (1) 測定値 u, v から、 $x = au - bv$ (a, b は定数) によって x を求める。測定値 u, v の分散が σ_u^2, σ_v^2 である場合に x の分散を記述せよ。
- (2) ^{137}Cs 線源から放射される 662 keV ガンマ線を計測した。計数率が少ないため宇宙線や環境放射能によるバックグラウンドを差し引く必要がある。計測器の前に線源を置いて 10 分間測定するとガンマ線は 4900 個であった。線源を取り除いた後、20 分間の計測ではガンマ線は 400 個計測された。この線源から放射されるガンマ線の毎分の計測数とその誤差を求めよ。

令和2年度大学院入学試験問題 II (3時間)

注意

- (1) 問題II-1, II-2, II-3の解答はそれぞれ指定された解答用紙1枚に記入せよ.
- (2) 問題II-1, II-2の解答には裏面を用いてもよい.
- (3) 問題II-3は独立した2つの小問II-3A, II-3Bからなる. それぞれの小問の解答は解答用紙の指定された場所(裏面を含む)に記入せよ.
- (4) 各解答用紙は横長に使用して, 表側の左上部(線より上)に受験番号, 氏名を記入せよ. 解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない. 解答用紙上部の線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない.
- (5) 解答用紙は3問(計3枚)すべて提出すること. なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない.
- (6) 問題冊子は表紙を含めて9ページまでである.

II-1 (力学) (100 点)

質量 M 、半径 R のビリヤード球 A の運動について考察する．球 A は剛体で内部は均質であるものとし，重力加速度を g ，球と床との間の動摩擦係数を μ' (球の速さによらない定数) として以下の間に答えよ．ただし，空気抵抗および転がり摩擦を考慮する必要はない．

- (1) 球 A の重心を通る軸に関する慣性モーメントは $\frac{2}{5}MR^2$ となることを示せ．
- (2) 球 A の側面を玉突き棒で床と平行に高さ R で突いたところ，球 A は初速度 v_0 で無回転で動き始めた (図 1，左向きを正とする)．その後球 A は床との摩擦により回転を速めながら並進速度を減速させ，最終的にはすべりなく等速で転がる状態となる．最終速度 v_1 および突いた地点からすべりなく転がり始めるまでの移動距離 x_1 を求めよ．

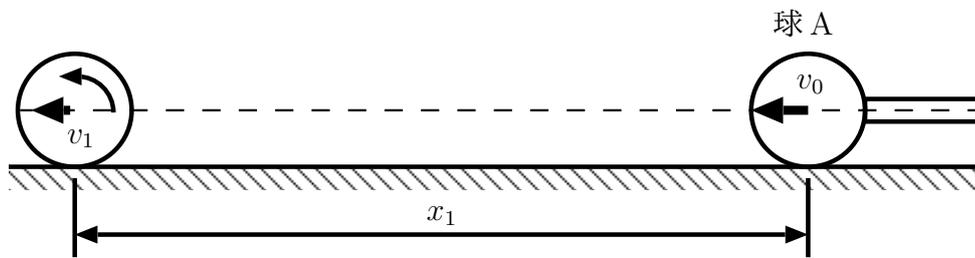


図 1

球 A が角速度 ω_1 ですべらずに転がりながら，図 2 左 (横から見た図) のような断面形状の高さ h ($< 2R$) の段差に頂点 P でぶつかるとき，以下の間に答えよ．ただし，球 A は図 2 右 (上から見た図) のように段差の縁に対して正面からぶつかるものとする．また，ぶつかった瞬間に頂点 P ですべりは発生せず，段差は頂点 P 以外では球 A とは接触しない断面形状を持つものとし，段差の形状変形も考慮する必要はない．

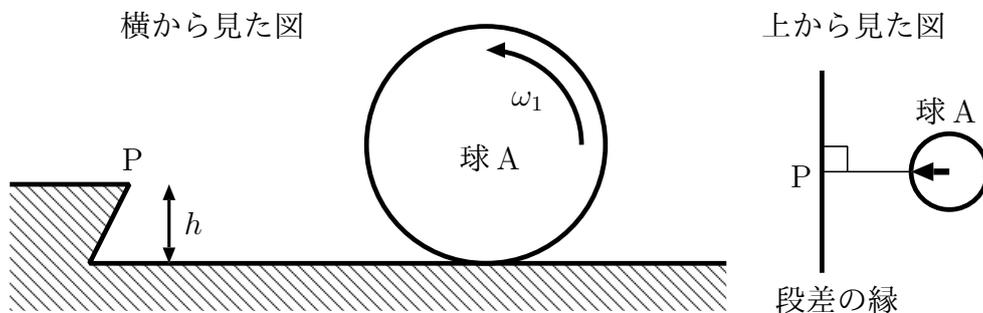


図 2

- (3) ぶつかる直前の球 A の頂点 P に対する全角運動量 (球 A の重心まわりの回転による角運動量と頂点 P に対する球 A の重心が持つ角運動量の和) を求めよ．

- (4) ぶつかった直後の球 A の頂点 P まわりの角速度 ω を考えることにより，球 A への床からの垂直抗力が衝突の瞬間に変化しない段差の高さ h を決定せよ。

球 A と全く同じ形状・質量・性質を持つ球 B が，球 A より L だけ離れた場所で静止している状況を考える．小問 (2) と同じ突き方で球 A を球 B の中心に向かって突いたとき，球 A は初速度 v_0 で無回転で動き始め (図 3)，やがて球 B に衝突する．衝突時に球と球の間には摩擦は働かず，球同士のはねかえり係数は 1 とし，以下の問に答えよ．

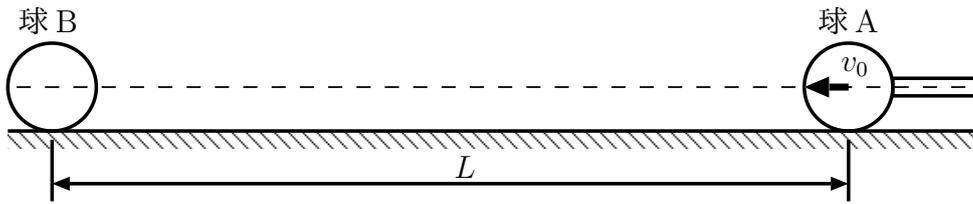


図 3

- (5) 球 A がすべりなく転がり始め，小問 (2) で求めた速度 v_1 で球 B に衝突する場合を考える．衝突後しばらくして，球 A, B がどちらもすべりなく転がる状態となるが，このときの球 A, B の最終速度の比を求めよ．
- (6) 球 A を突く強さを変えることで衝突後の球 A の最終速度をどのようにコントロールできるか．小問 (5) で考慮しなかったすべりながら衝突する場合も検討し，球 A の最終速度を最大にする条件を含めて簡単に解説せよ．

以下，図 4 のように，真二つに割れた球 A が球面側を下にして置かれている状況を考える．

- (7) 静止状態での床面との接触点まわりの慣性モーメントが $\frac{13}{40}MR^2$ となることを示せ．
- (8) 釣り合い点付近での微小振動の周期を求めよ．

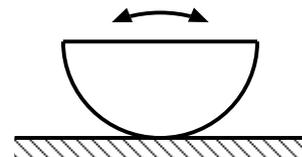


図 4

II-2 (量子力学) (100点)

質量 $m (> 0)$, 時間に依存する角振動数 $\omega (> 0)$ の一次元調和振動子を考える. 初期に基底状態にあった系が ω の時間依存性によって励起されることを, ハイゼンベルグ描像で考察する.

プランク定数を 2π で割ったものを \hbar とする. 位置と運動量に対応する演算子 \hat{q} と \hat{p} が交換関係

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$

を満たし, ハミルトニアン \hat{H} が

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2$$

で与えられるとする. ここで, 角振動数 ω は小問 (1) と (2) では定数とするが, 小問 (3) 以降では時間の関数とする. 以下では, 時間変数を t とし, X の t に関する微分を \dot{X} , X の複素共役を X^* , X のエルミート共役を X^\dagger と表記する.

(1) ω を定数とする. 演算子 \hat{a} を

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{q} + \frac{i}{m\omega}\hat{p} \right) e^{i\omega t}$$

と定義する. \hat{a} と \hat{a}^\dagger の交換関係を求め, \hat{H} を演算子 $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$ で表せ.

(2) 一般に, 演算子 $\hat{O}(\hat{q}, \hat{p}, t)$ の時間微分 $\dot{\hat{O}}$ は

$$\dot{\hat{O}} = \frac{\partial \hat{O}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{O}]$$

で与えられる. 小問 (1) で定義した \hat{a} の時間微分 $\dot{\hat{a}}$ を計算せよ.

ここからは, 時間に依存する角振動数を $\omega(t)$ と表記する.

(3) 時間の関数 $u(t)$ が微分方程式

$$\ddot{u}(t) + \omega(t)^2 u(t) = 0 \tag{E}$$

を任意の時刻で満たし,

$$u(t)\dot{u}^*(t) - u^*(t)\dot{u}(t) = \frac{i\hbar}{m} \tag{F}$$

を時刻 $t=0$ で満たすとする. この場合に, 式 (F) が任意の t で満たされることを示せ.

(4) \hat{q} と \hat{p} を, 小問 (3) で導入した $u(t)$ およびある演算子 \hat{b} とそのエルミート共役 \hat{b}^\dagger によって

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \hat{b}u(t) + \hat{b}^\dagger u^*(t) \\ \hat{p} &= m \left[\hat{b}\dot{u}(t) + \hat{b}^\dagger \dot{u}^*(t) \right] \end{aligned}$$

と表す. このとき, $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger]$ と $\dot{\hat{b}}$ を計算せよ.

- (5) $t \rightarrow -\infty$ と $t \rightarrow \infty$ の極限で, 関数 $\omega(t)$ がそれぞれ定数 ω_- と ω_+ に収束すると仮定する. そして, 式 (E) と式 (F) を満たす $u(t)$ のうち, $t \rightarrow -\infty$ で $\mathcal{N}e^{-i\omega_-t}$ に漸近する解 $u_1(t)$ と, $t \rightarrow \infty$ で $\mathcal{M}e^{-i\omega_+t}$ に漸近する解 $u_2(t)$ を用意する. すなわち, $u_1(t)$ と $u_2(t)$ は

$$\begin{aligned} u_1(t) &\rightarrow \mathcal{N}e^{-i\omega_-t} && (t \rightarrow -\infty) \\ u_2(t) &\rightarrow \mathcal{M}e^{-i\omega_+t} && (t \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

を満たす. ここで, \mathcal{N} と \mathcal{M} は複素定数である. $|\mathcal{N}|$ と $|\mathcal{M}|$ を計算せよ.

- (6) 小問 (5) で導入した $u_1(t)$ は $t \rightarrow \infty$ で

$$u_1(t) \rightarrow \alpha \mathcal{M}e^{-i\omega_+t} + \beta \mathcal{M}^* e^{i\omega_+t} \quad (t \rightarrow \infty)$$

のように振る舞う. また, $u_2(t)$ は $t \rightarrow -\infty$ で

$$u_2(t) \rightarrow \gamma \mathcal{N}e^{-i\omega_-t} + \delta \mathcal{N}^* e^{i\omega_-t} \quad (t \rightarrow -\infty)$$

のように振る舞う. ここで, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は複素定数である. このとき, 微分方程式 (E) の解の一意性により, $\gamma = \alpha^*$ および $\delta = -\beta$ という関係式が成り立つ. $|\alpha|$ を β によって表せ.

- (7) 小問 (6) で考察した $u_1(t)$ と $u_2(t)$ を使って, \hat{q} と \hat{p} を

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \hat{b}_1 u_1(t) + \hat{b}_1^\dagger u_1^*(t) &= \hat{b}_2 u_2(t) + \hat{b}_2^\dagger u_2^*(t) \\ \hat{p} &= m \left[\hat{b}_1 \dot{u}_1(t) + \hat{b}_1^\dagger \dot{u}_1^*(t) \right] &= m \left[\hat{b}_2 \dot{u}_2(t) + \hat{b}_2^\dagger \dot{u}_2^*(t) \right] \end{aligned}$$

のように, それぞれ2通りに展開する. すると, 小問 (6) の α と β を使って, \hat{b}_2 を \hat{b}_1 と \hat{b}_1^\dagger の線型結合として次のように表すことができる.

$$\hat{b}_2 = \alpha \hat{b}_1 + \beta^* \hat{b}_1^\dagger.$$

演算子 $\hat{N}_2 \equiv \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2$ の期待値を,

$$\hat{b}_1 |\text{in}\rangle = 0$$

で定義される状態 $|\text{in}\rangle$ に対して計算せよ.

II-3A (物理数学) (50点)

実部が正である複素数 z に対し、ガンマ関数は次式のように定義される。

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

(1) 自然数 N に対し、

$$\Gamma(N+1) = N!$$

となることを示せ。

(2)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

を計算せよ。ただし、必要なら正の実数 a に対して、 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$ が成り立つことを用いてよい。

(3) 大きな自然数 N に対し、 N に比べ十分小さな Δ を用いて、

$$\log N! = N(\log N - 1) + \Delta$$

と表すことができることを示せ。またそのときに、 Δ の最も主要な項を求めよ。

[ヒント] 実数 t に対しなめらかに変化する実数関数 $f(t)$ が、 $t = t_0$ でただ1つの最大値 $f(t_0)$ を持ち、そこでの二階微分 $f''(t_0) (= d^2 f/dt^2|_{t=t_0})$ が負であるとき、十分大きな正の実数 m に対し、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{mf(t)} \cong e^{mf(t_0)} \sqrt{\frac{-2\pi}{mf''(t_0)}}$$

と近似することができる。

(4) 正の実数 α に対し、

$$\int_0^{\infty} \frac{t^\alpha}{e^t - 1} dt$$

をガンマ関数とリーマンゼータ関数を用いて表せ。ただし、リーマンゼータ関数は

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

と与えられる。

(このページは白紙である)

II-3B (実験物理学) (50点)

原子核の大きさは、 α 線（原子番号 $Z=2$, 質量数 $A=4$ ）を金薄膜に照射し、弾性散乱された α 線の散乱角と個数を計測することで求まる。 α 線の運動エネルギーは 5 MeV とする。これを古典的なクーロン散乱で考える。図1のように α 線の入射軌道の延長と原子核の最短距離（一般に衝突係数という）を b とし、 α 線の実験系での散乱角を θ , α 線の軌道と原子核の最短距離を D とする。金原子核 ($Z=79$, $A=197$) は α 線に比べ十分重い。簡単のため、核子（陽子, 中性子）の質量は共に $1.0 \text{ GeV}/c^2$, 電子質量 $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$, 電荷素量を e , 光速 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$, 真空の誘電率を ϵ_0 とする。

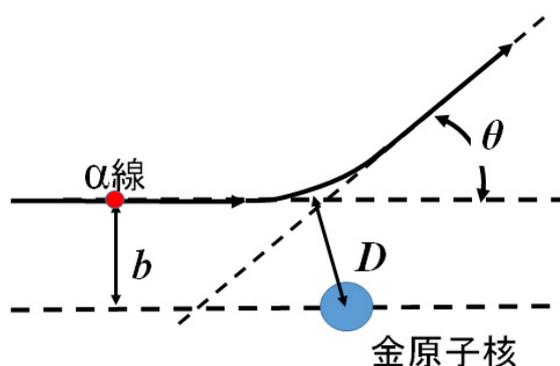


図1

- (1) b により D は変化するが, α 線が原子核に最も接近する距離 D_{\min} は α 線の最初の運動エネルギーと金原子核の静電位置エネルギーが等しくなる条件によって決まる。 D_{\min} の値を計算せよ。ただし古典電子半径 $e^2/(4\pi\epsilon_0 m_e c^2) = 2.8 \times 10^{-15} \text{ m}$ である。
- (2) 次に単位時間, 単位面積あたり n 個の α 線が金薄膜に入射したとき, $b \sim b+db$ に入る単位時間あたりの個数 dn を求めよ。
- (3) 金薄膜に入射した α 線は問(1)のような古典的なクーロン場による散乱モデルで記述され, θ , D_{\min} と b の間には以下の関係が成り立つ。

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{2b}{D_{\min}}$$

これを用いて $\theta \sim \theta + d\theta$ に入る粒子数 $dn(\theta)$ を計算し, さらに実際に測定可能な微分断面積 $d\sigma(\theta)/d\Omega$ を θ , D_{\min} を用いて表せ。 $d\Omega$ は立体角である。このように $d\sigma(\theta)/d\Omega$ の分布から D_{\min} が得られ, 原子核のサイズの上限值が得られる。

- (4) 次に $\theta = 60$ 度方向へ散乱される α 線の計測実験を考える。単位面積, 単位時間あたり N_a 個の α 線が金薄膜に入射する。金薄膜は単位面積で金原子数が N_b 個ある。この金薄膜内での α 線の散乱確率は小さく2回散乱されること

はない。図2のように金薄膜の上60度方向、距離 r の位置に粒子カウンタ(検出面積 S)を置き、その単位時間あたりの計測数は N_c であった。粒子カウンタの検出効率は100%である。距離 r は金薄膜の大きさより十分に大きい。この時の $d\sigma(\theta = 60^\circ)/d\Omega$ を求めよ。

(5) 小問(4)の実験値から D_{\min} を求めよ。

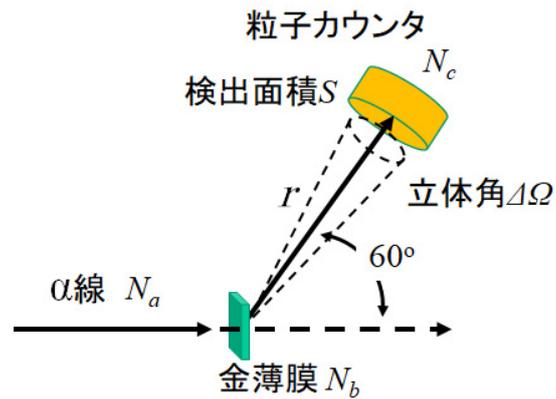


図2

令和2年度大学院入学試験問題 III (3時間)

注意

- (1) 問題 III-1, III-2, III-3 の解答はそれぞれ指定された解答用紙 1 枚に記入せよ。
- (2) 問題 III-1 の解答には裏面を用いてもよい。
- (3) 問題 III-2 は独立した 2 つの小問 III-2A, III-2B から, 問題 III-3 は独立した 2 つの小問 III-3A, III-3B からなる。それぞれの小問の解答は解答用紙の指定された場所 (裏面を含む) に記入せよ。
- (4) 各解答用紙は横長に使用して, 表側の左上部 (線より上) に受験番号, 氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない。解答用紙上部の線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない。
- (5) 解答用紙は 3 問 (計 3 枚) すべて提出すること。なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (6) 問題冊子は表紙を含めて 11 ページまでである。

III-1 (統計力学) (100 点)

電気双極子モーメントを持つ N 個の粒子が、体積 V の箱に閉じ込められている。粒子 i の電気双極子モーメント $\vec{\mu}_i$ は、その大きさ μ と角度座標 (θ_i, φ_i) を用いて、

$$\vec{\mu}_i = \mu(\cos \varphi_i \sin \theta_i, \sin \varphi_i \sin \theta_i, \cos \theta_i)$$

と書くことができる。

z 軸正の向きの外部電場 \vec{E} の下で、系のハミルトニアンは、

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2m} |\vec{p}_i|^2 - E\mu \cos \theta_i \right\} + \sum_{1 \leq j < i \leq N} U(\vec{r}_i, \vec{\mu}_i, \vec{r}_j, \vec{\mu}_j)$$

と与えられる。ここで、 m は粒子の質量、 \vec{r}_i と \vec{p}_i はそれぞれ粒子 i の座標と運動量、 E は \vec{E} の大きさ、 $U(\vec{r}_i, \vec{\mu}_i, \vec{r}_j, \vec{\mu}_j)$ は粒子 i と粒子 j の間の相互作用を表す。ただし、簡単のため、慣性モーメントは 0 とし、回転運動エネルギーの寄与は無視した。以下、系は温度 T の平衡状態にあるとし、ボルツマン定数を k_B とする。

まず、相互作用 $U(\vec{r}_i, \vec{\mu}_i, \vec{r}_j, \vec{\mu}_j)$ が無視できる場合を考える。

- (1) 系の圧力 p_0 を書け。
- (2) 電気双極子モーメントと外部電場のなす角が、 θ と $\theta + d\theta$ の間にある確率を $2\pi f(\theta) \sin \theta d\theta$ とする。系が温度 T のカノニカル分布に従うとして、 $f(\theta)$ の表式を示せ。
- (3) 単位体積あたりの分極を $M = N\mu \langle \cos \theta \rangle / V$ とする。 $\langle \cos \theta \rangle$ は粒子 i に対する $\cos \theta_i$ の温度 T における期待値を表す。 M を求めよ。
- (4) 真空の誘電率を ε_0 として、系の誘電率 ε を $\varepsilon = \varepsilon_0 + M/E$ とする。外部電場が小さい極限での誘電率を求めよ。必要であれば、 $|x| \ll 1$ のとき $\coth x = 1/x + x/3 + \mathcal{O}(x^2)$ となることを用いてよい。

次に、外部電場を 0 とし、圧力 p に対する粒子間相互作用の寄与を考えたい。粒子 1 と粒子 2 の電気双極子モーメント間の相互作用 U は、

$$U(\vec{r}_1, \vec{\mu}_1, \vec{r}_2, \vec{\mu}_2) = -\frac{c}{R^3} \left\{ 3(\vec{\mu}_1 \cdot \hat{R})(\vec{\mu}_2 \cdot \hat{R}) - \vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 \right\}$$

と与えられる。ここで、相対位置ベクトルを $\vec{R} (= \vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ とし、 $R = |\vec{R}|$ 、 $\hat{R} = \vec{R}/R$ とおいた。また、 $c = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ はクーロン定数である。

粒子 2 が粒子 1 に及ぼす力は $\vec{F} = -\partial U(\vec{r}_1, \vec{\mu}_1, \vec{r}_2, \vec{\mu}_2) / \partial \vec{r}_1$ である。 \vec{F} は \vec{R} だけでなく $\vec{\mu}_1$ や $\vec{\mu}_2$ にも依存するため、そのままでは圧力を求めることが容易ではない。そこで、温度 T のカノニカル分布に基づいて、 $\vec{\mu}_1$ と $\vec{\mu}_2$ に対する統計平均を行い、粒子 1 と粒子 2 の間に働く平均的な力 $\langle \vec{F} \rangle$ を求めることにする。

(5) 実効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(\vec{R})$ を次の式を用いて定義する.

$$e^{-U_{\text{eff}}(\vec{R})/k_{\text{B}}T} = \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 e^{-U(\vec{r}_1, \vec{\mu}_1, \vec{r}_2, \vec{\mu}_2)/k_{\text{B}}T}.$$

ここで、積分 $\int d\Omega_i$ は $i = 1, 2$ に対し、 $\vec{\mu}_i$ の立体角積分 $\int_0^\pi \sin\theta_i d\theta_i \int_0^{2\pi} d\varphi_i$ を表す. 粒子1と粒子2の座標をそれぞれ \vec{r}_1, \vec{r}_2 に固定した条件下での、 $\vec{\mu}_1$ と $\vec{\mu}_2$ に関する確率 $P(\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2 | \vec{r}_1, \vec{r}_2)$ を、 $U_{\text{eff}}, U, k_{\text{B}}T$ を用いて書け.

(6) 粒子2が粒子1に及ぼす平均的な力

$$\langle \vec{F} \rangle = \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{\mu}_1, \vec{r}_2, \vec{\mu}_2) P(\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2 | \vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

が、 $\langle \vec{F} \rangle = -\partial U_{\text{eff}}(\vec{R}) / \partial \vec{r}_1$ と与えられることを示せ.

以下では、温度が十分に高く、 $k_{\text{B}}T \gg c\mu^2/R^3$ が成り立っているとす.

(7) 平均的な力 $\langle \vec{F} \rangle$ の最も主要な項は、 $\langle \vec{F} \rangle = -AR^{-\alpha} \hat{R}$ のように、係数 A とべき指数 α を用いて書くことができる. A と α を求めよ. ただし必要であれば、

$$\begin{aligned} (4\pi)^{-2} \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 \left\{ 3(\vec{\mu}_1 \cdot \hat{R})(\vec{\mu}_2 \cdot \hat{R}) - \vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 \right\} &= 0, \\ (4\pi)^{-2} \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 \left\{ 3(\vec{\mu}_1 \cdot \hat{R})(\vec{\mu}_2 \cdot \hat{R}) - \vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 \right\}^2 &= 2\mu^4/3 \end{aligned}$$

となることを用いてよい.

(8) 相互作用として、 $R > d$ では実効的ポテンシャル U_{eff} が働き、 $R \leq d$ では剛体球ポテンシャルが働いているとする. すなわち、全ポテンシャル U_{tot} を

$$U_{\text{tot}}(\vec{R}) = \begin{cases} \infty & (R \leq d) \\ U_{\text{eff}}(\vec{R}) & (R > d) \end{cases}$$

とする. ただし、 $d > 0$ である. 粒子数密度が十分に小さいとき、圧力 p は

$$\frac{pV}{Nk_{\text{B}}T} = 1 - \frac{N}{2V} \int d\vec{R} \left[\exp \left\{ -(U_{\text{tot}}(\vec{R}) - U_{\text{tot}}(R = \infty)) / k_{\text{B}}T \right\} - 1 \right]$$

と近似することができる. この式を用いて、圧力 p を求めよ.

III-2A (力学) (50点)

平面内を運動する物体が、その進行方向に対して右90度向き $\vec{n}(|\vec{n}| = 1)$ に常に質量を放出しているとする。この物体の運動の様子を調べよう。時刻 t での物体の質量を $m(t)$ 、速度を $\vec{V}(t)$ とし、 $|\vec{V}(0)| = V_0$ とする。微小時間間隔 dt の間に放出される質量は $\alpha m(t) dt$ で、 α は一定で正とする。物体に対して放出される速さを u とする。物体の内部構造は考えない。

- (1) 時刻 $t + dt$ での物体の速度を $\vec{V}(t) + d\vec{V}$ とし、運動量保存の式を書け。
- (2) これより、 $m \frac{d\vec{V}}{dt} = \boxed{A}$ となる。 \boxed{A} にあてはまる式を示せ。ただし、この式に \vec{n} を残してよい。
- (3) 時刻 t での物体の速さを求めよ。
- (4) 運動の軌跡の時刻 t における曲率半径 $\rho(t)$ を求めよ。

III-2B (電磁気学) (50点)

図1のように、接地された導体の内部にある球状の空洞（半径 a ）の中心に電気双極子を置いたとき、空洞の表面に誘起される電荷分布を考えよう。なお、空洞中は真空とし、真空の誘電率を ϵ_0 とする。解答はSI単位系を用いよ。

- (1) はじめに導体がない場合を考えよう。電気双極子を原点 O に置いたとき、球座標を用いて位置 $P(r, \theta, \varphi)$ での軸対称な静電ポテンシャル $\phi_{\text{di}}(r, \theta)$ を求めよ。ここで、 r は原点からの距離、 θ は電気双極子ベクトルの方向を z 軸としたとき、 \vec{r} と z 軸のなす角度とする。電気双極子ベクトルは $\vec{p} = q\vec{s}$ とし、 \vec{s} は電荷 $-q$ と $+q$ を結ぶベクトル、 $s = |\vec{s}|$ 、 $p = |\vec{p}|$ である。また、 $r \gg s$ で、 s/r の1次項まで計算せよ。
- (2) 次に電気双極子を空洞の中心に置いた場合を考える。空洞の表面に誘起された電荷がつくる静電ポテンシャルは、適切な定数 A_0, B_0, A_1, B_1 を用いて次の形で表せる。

$$\phi_{\text{in}}(r, \theta) = \left(A_0 + \frac{B_0}{r} \right) + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos \theta.$$

A_0, B_0, A_1, B_1 を決定し、位置 $P(r, \theta, \varphi)$ での静電ポテンシャル $\phi(r, \theta)$ を求めよ。

- (3) 空洞の表面に誘起される電荷密度を求めよ。

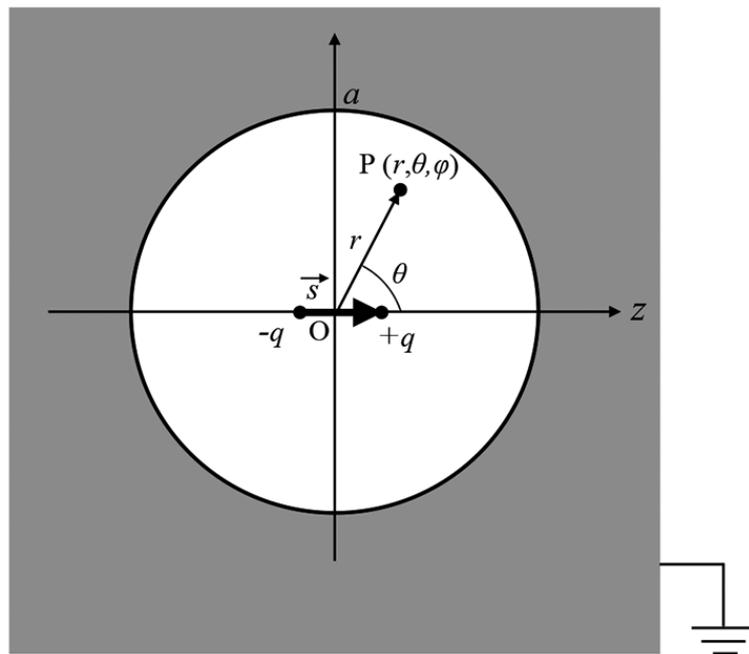


図1

III-3A (英語) (60 点)

The excerpt below has been adapted from Richard Feynman's 1965 Nobel Prize in Physics lecture. Read the passage carefully and answer questions [Q-a]-[Q-f] below in clear, easy-to-read English or symbols where appropriate. Advanced physics knowledge is not necessary to answer the questions.

(問題文は著作権に配慮して削除しています。)

Answer the following questions concerning the passage above.

[Q-a] Which of the following words or phrases can replace the underlined text without changing the meaning of the sentence? Write one of a1, a2, a3, or a4 in the answer space.

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| a1) surprisingly close | a2) completely erroneous |
| a3) absurdly intuitive | a4) extremely foolish |

[Q-b] Choose one of the following words to complete this sentence. Write one of b1, b2, b3, or b4 in the answer space.

- | | |
|-----------------------|---------------|
| b1) differentiable | b2) testable |
| b3) indistinguishable | b4) appealing |

[Q-c] The underlined words have been scrambled. Put them in the correct order. Change the capitalization and include punctuation as necessary.

[Q-d] Using several sentences and your own expressions explain why the author thinks it is useful to have many ways of approaching the same theory.

[Q-e] Fill in the correct article (“the”, “an”, or “a”) in the underlined spaces in the sentences. Capitalize your answers as necessary and if no article is needed write “ ϕ ” in the answer space.

[Q-f] Which of the following best describes the *opposite* meaning of the underlined text? Write one of f1, f2, f3, or f4 in the answer space.

- | | |
|----------------------------|----------------------|
| f1) emotional indifference | f2) mental challenge |
| f3) emotional thrill | f4) concrete boredom |

III-3B (英語) (40 点)

Read the passage carefully and answer questions [Q-1]-[Q-8] below in English. Advanced physics knowledge is not necessary to answer the questions.

A particle moving under the influence of a force results in a transfer of energy referred to as work. In simple cases work can be represented as the product of the force and the distance the particle travelled. Since a force only changes the kinetic energy of a particle moving parallel to it, the inner product of the force vector with the particle's displacement vector is used to represent the work done by the force when the particle moves in a straight line,

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} .$$

For particles moving [1] curved paths in the presence of a force, the situation is more complicated. In this case the total amount of work done is derived by calculating the work done by the force over an [2] infinitely small segment of the particle's path. The sum of all such segments is the total work. Taking the limit as the length of the segments approaches zero yields the following expression,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} ,$$

where C denotes the path of the particle. An example is shown in the figure below. Due to the inner product in the integral, motion that is [3a] ([3b]) to the direction of the force gives the greatest [3c] (negative) contribution to the integral. When W does not depend on which path C is taken, the force is said to be *conservative*.

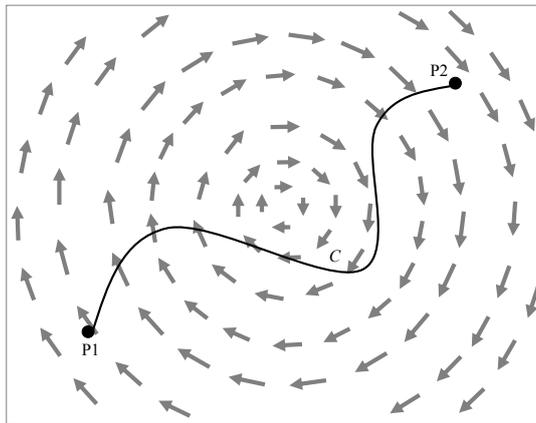


Figure 1. Example of a particle moving on a path C from point $P1$ to $P2$ under the influence of a force \vec{F} , whose direction is shown by the arrows.

Answer the following questions concerning the passage above.

[Q-1] Which of the following words can be used in this position to form a suitable sentence? Write all answers that apply in the answer space.

- | | | |
|-----------|---------|-------------|
| 1a) with | 1b) on | 1c) through |
| 1d) along | 1e) for | 1f) under |

[Q-2] Write a single word that can replace the two underlined words without changing the meaning of the sentence.

[Q-3] Which of the following sets of words can be used to replace [3a] through [3c] in order and form a correct sentence. Write all answers that apply in the answer space.

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 3-1) positive, antiparallel, parallel | 3-2) congruent, parallel, positive |
| 3-3) parallel, antiparallel, positive | 3-4) antiparallel, parallel, positive |

[Q-4] Based on the definition in the text, is the force in Figure 1 *conservative*?

[Q-5] Which of the following forces are *conservative* and which are not? The force of gravity, spring force, friction, the electric force.

[Q-6] A particle moves on a lattice from point P1 to P2 under the influence of a force, \vec{F} , shown in Figure 2. Assuming that the transverse and longitudinal distance between the centers of any two arrows is one unit, order the three paths shown in order of least to most work done by the force.

[Q-7] Imagine a quantity S defined as,

$$S = \left| \int_C \vec{F} \times d\vec{r} \right|.$$

What angles of \vec{F} and $d\vec{r}$ make the largest contributions to S at a given position?

[Q-8] Using Figure 2 and the same assumptions as in [Q-6] which of paths C1 and C3 has the largest value of S as defined in [Q-7].

(次ページに続く)

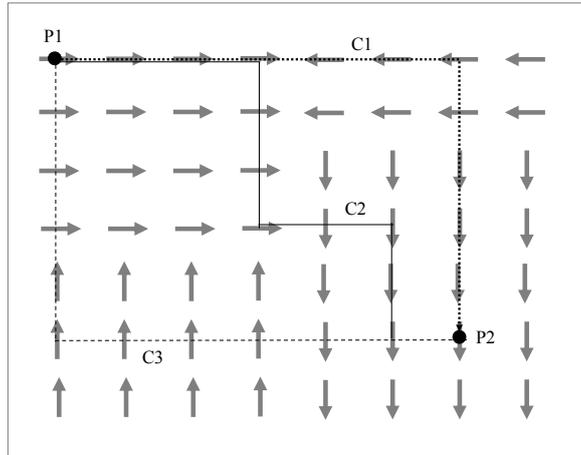


Figure 2. Two points, P1 and P2, in a vector field \vec{F} . The magnitude of the field is the same everywhere, but its direction at each point is shown by the arrows.

(このページは白紙である)