

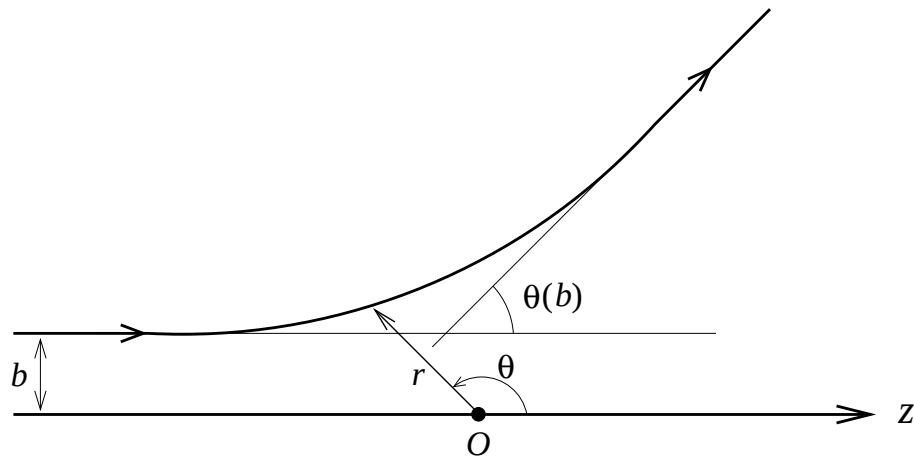
平成9年度大学院入学試験問題 I (3時間)

注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の用紙1枚に記入せよ。(裏面を用いてもよい。)
(2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。
-

I-1 (中心力による散乱) (100点)

中心力による散乱の問題を非相対論的古典力学で考える。力は座標原点 O からの中心力ポテンシャル $U(r)$ で表され、 $U(r = \infty) = 0$ とする。角運動量保存により運動は一平面の上で行われる。入射粒子 A は質量 m を持ち、 z 軸に平行に衝突径数 b で $z = -\infty$ から入射する。入射時の運動エネルギーを E とする。衝突径数とは入射方向の直線と z 軸の間の距離をいう。粒子 A の座標を極座標 (r, θ, ϕ) で表す。図を参照のこと。



- (1) 角運動量の大きさ L を E 、 m 、 b を用いて表せ。
- (2) 運動平面が $\phi = 0$ で与えられるとき、角運動量の大きさ L を $\frac{d\theta}{dt}$ 、 r 、 m を用いて表せ。
- (3) 動径速度 $\frac{dr}{dt}$ を r 、 E 、 m 、 b 、 $U(r)$ を用いて表せ。
- (4) 粒子 A が原点に最も近付いた時の r の値を r_m で表す。 r_m を決める方程式を示せ。
- (5) 散乱角、つまり散乱方向の直線が z 軸となす角は衝突径数 b に依存するので、これを $\theta(b)$ で表し偏向関数と呼ぶ。偏向関数 $\theta(b)$ を r に関する積分の表式を用いて表せ。

散乱の実験はいろいろな衝突径数を持った入射粒子のビームの散乱を扱う。入射粒子 A のビームの強さを j とする。つまり、単位時間にビームの横断面の単位面積を j 個の粒子 A

が通過する。今、 θ 方向の単位立体角内に単位時間に N 個の粒子 A が散乱されて来るとする。このとき散乱の微分断面積 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N}{j}$$

で与えられる。

- (6) 散乱角 θ に対し $\theta = \theta(b)$ を満たす衝突径数 b は唯一つだけ存在するとする。散乱角 θ のまわりの微小領域 ($\theta \sim \theta + d\theta$) に散乱されてくる粒子は $\theta = \theta(b)$ を満たす衝突径数 b のまわりの微小領域 ($b \sim b + db$) に入射した粒子であることに基づいて、散乱の微分断面積を偏向関数 $\theta(b)$ を用いて表せ。
- (7) 散乱角 θ に対し $\theta = \theta(b)$ を満たす衝突径数 b が複数存在する場合は、散乱の微分断面積は偏向関数 $\theta(b)$ を用いてどのように表されるか。

I-2 (一様静磁場中の電子) (100点)

$-z$ 方向に一様な大きさ B の静磁場がかかっているとき、 x - y 平面内における一電子の運動について考える。ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} A_x \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c} A_y \right)^2$$

で与えられる。ベクトルポテンシャルは、

$$\left(\frac{e}{c} A_x, \frac{e}{c} A_y \right) = (\beta y, -\beta x), \quad \beta \equiv \frac{eB}{2c}$$

ととることとする。

- (1) 演算子 π_x と π_y を

$$\pi_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} A_x, \quad \pi_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c} A_y$$

で定義する。 π_x と π_y の交換関係を計算せよ。

- (2) 次に、演算子 a と $a^\dagger$ を

$$a = \frac{1}{2\sqrt{\hbar}\beta} (\pi_x + i\pi_y), \quad a^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{\hbar}\beta} (\pi_x - i\pi_y)$$

で定義する。 a と $a^\dagger$ の交換関係を計算せよ。さらに、複素数 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ 及びそれらの偏微分 $\partial/\partial z$, $\partial/\partial \bar{z}$ を用いて、 a と $a^\dagger$ を表せ。

- (3) ハミルトニアンを a と $a^\dagger$ を用いて表し、エネルギー固有値をすべて求めよ。

- (4) 角運動量の z 成分

$$L_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

を z , $\bar{z}$, $\partial/\partial z$, $\partial/\partial \bar{z}$ で表し、 L_z が H と同時対角化可能であることを示せ。

- (5) L_z の固有値 $m\hbar$ をもつ、基底状態の波動関数 $\psi_{0,m}(z, \bar{z})$ を求めよ。ここで、 m は 0 以上の整数である。(波動関数は規格化しなくてよい。)
- (6) 第一励起状態の波動関数で、 L_z の固有値が $m\hbar$ のものを求めよ。(波動関数は規格化しなくてよい。)

I-3 (Thomas 才差) (100 点)

電荷 e 、質量 m の荷電粒子が、Coulomb 引力 (電場 $\mathbf{E} \propto -\nabla(1/r)$) によって原点まわりに等速円運動している系を考える。荷電粒子とともに動いている座標系—以後固有系と呼ぶ—は慣性系ではないが、各瞬間、瞬間には、その時々々の荷電粒子の速度 $\mathbf{v}$ と同じ速度で動いている慣性系で近似できると考えて良い。

以下の設問 (1)~(4) では、円運動の平面を x - y 平面に採り、全ての速度・位置ベクトルは、この平面内のものに限ることとする。したがって、例えば、速度 $\mathbf{v}$ は 2 次元ベクトル (v_x, v_y) を、時空座標 x^μ は 3 次元の (ct, x, y) を表す。 c は光速である。

さて、実験室系 O から、速度 $\mathbf{v}$ で動いている慣性系 O' への Lorentz 変換は、一般に

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^2 \Lambda(\mathbf{v})^\mu{}_\nu x^\nu, \quad x^\mu \equiv (ct, x, y)^T \quad (\text{A})$$

と書け、特に、 $\mathbf{v}$ が x -軸方向 ($\mathbf{e}_x$: x 方向単位ベクトル) を向いている場合、

$$\Lambda(\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \Lambda_x(v), \quad \left(\beta \equiv \frac{v}{c}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \quad (\text{B})$$

である。

- (1) 実験室系 O から見て速度 $\mathbf{w}$ で動いている物体は、 $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ で動いている慣性系 O' から見れば、速度は $\mathbf{w}'$ に見える。 $\mathbf{w}' = (w'_x, w'_y)$ を $\mathbf{w} = (w_x, w_y)$ で表す式を求めよ。
- (2) $\mathbf{v}$ が x -軸を向いている場合の Lorentz 変換は (B) で与えられたが、 $\mathbf{v}$ が x -軸と角度 θ を成して $(v_x, v_y) = (v \cos \theta, v \sin \theta)$ となる場合の Lorentz 変換 $\Lambda(\mathbf{v})$ は、 O 、 O' のそれぞれで座標系を角度 θ だけ空間回転すれば、(B) の場合に帰着できて、

$$\Lambda(\mathbf{v}) = R^{-1}(\theta) \Lambda_x(v) R(\theta) \quad (\text{C})$$

の形に書ける。 3×3 行列 $\Lambda(\mathbf{v})$ のあらわな表式を求めよ。

- (3) (C) 式の形の Lorentz 変換でつながる二つの座標系は、お互いから見て座標軸が回転していないと見なし得るので、準平行と呼ばれる。

荷電粒子と共に動く固有系は、時々刻々それに対応する慣性系が、次々と互いに準平行な Lorentz 変換でつながっていくようなものである。

すなわち、時刻 t の固有系に対応する慣性系 O' から、無限小時間 dt 後の慣性系 O'' への Lorentz 変換は、速度 $d\mathbf{v}'$ の準平行 Lorentz 変換

$$x'' = \Lambda(d\mathbf{v}') x'$$

で与えられる。ただし、 $d\mathbf{v}'$ は、 O' から見た O'' の速度である。(図 1 参照)

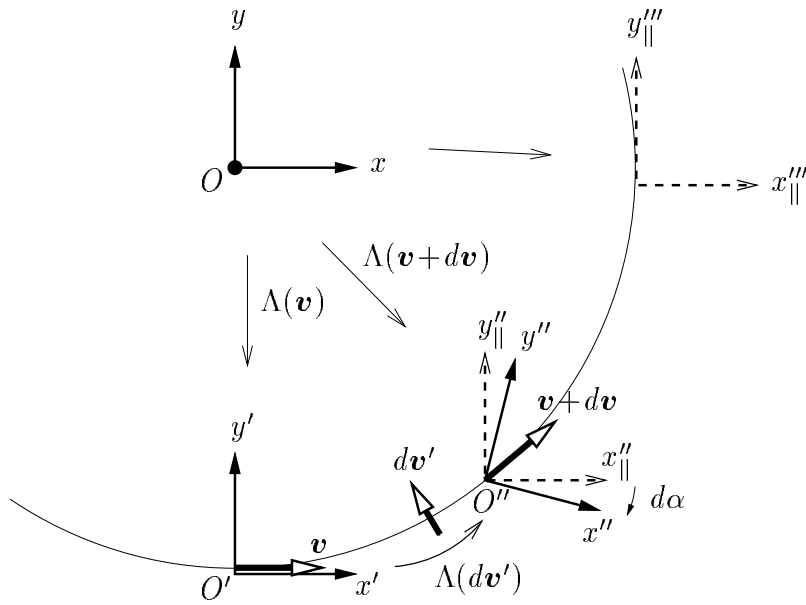


図 1: 固有系に対応する 時刻 t の慣性系 O' (実線座標系) から、時刻 $t + dt$ の慣性系 O'' (実線座標系) への準平行 Lorentz 変換 $\Lambda(d\mathbf{v}')$ 。点線の座標系は実験室系の座標系 O に準平行な座標系を表す。

実験室系で見て、時刻 t の荷電粒子の速度が $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ 、時刻 $t + dt$ での速度が $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ 、 $d\mathbf{v} = dv\mathbf{e}_y$ ($\mathbf{e}_y$: y 方向単位ベクトル) とした時、 $d\mathbf{v}'$ を dv の一次のオーダーで求めよ。また、準平行 Lorentz 変換 $\Lambda(d\mathbf{v}')$ のあらわな表式を同じオーダーで求めよ。

- (4) 時刻 t の慣性系 O' の座標軸は、実験室系 O の座標と準平行に揃えてあった、すなわち、 $x' = \Lambda(\mathbf{v})x$ 、としよう。ところが、 dt 秒後の、 O' を準平行に Lorentz 変換した O'' : $x'' = \Lambda(d\mathbf{v}')x'$ の座標軸は、実験室系から直接、速度 $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ で準平行 Lorentz 変換した慣性系 $O''_{\parallel}$: $x''_{\parallel} = \Lambda(\mathbf{v} + d\mathbf{v})x$ の座標軸とは一致せず、ある角度 $d\alpha$ だけ空間回転した関係になっている。これを示し、回転角 $d\alpha$ を dv の一次のオーダーで求めよ。 ($|\mathbf{v}| = |\mathbf{v} + d\mathbf{v}| = v$ に注意。)

- (5) 3次元空間ベクトルの記号を使えば、この空間回転の角速度は、 $1/c^2$ のオーダーで

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \frac{-e}{2mc} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c}$$

と書けることを示せ。ただし、粒子の運動方程式 $m\mathbf{a} = e\mathbf{E}$ を用いた。

(この結果は、固有系で静止しているスピン $\mathbf{S}$ があったとすると、実験室系から見れば角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転していることを意味する。これが Thomas 才差と呼ばれるものである。)

平成9年度大学院入学試験問題 II (3時間30分)

注意

- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の用紙1枚に記入せよ。(裏面を用いてもよい。)
(2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。
-

II-1 (Mg原子とスピンの交換相互作用) (100点)

結晶中でも、原子内でも、電子のスピン同士の間には、非常に強い相互作用が働いている。この相互作用は、素朴に期待される直接のスピン間相互作用 — スピンの磁気モーメントによる磁気相互作用 — などより桁違いに大きなもので、電子の統計性という純粋に量子力学的な性質に由来している。ここでは、例として、Mg原子を考えよう。原子番号 $Z = 12$ のMgは、最初の10個の電子が、全軌道角運動量0、全スピン0の閉じた殻を成し、そのまわりを2個の電子(最外殻電子)が回っている系である。

- (1) 原点に位置するMg核と10個の閉殻電子全体を、実効的に電荷 $+Ze$ ($Z \approx 2-3$) の単なる点状原子核と見なす。そのCoulombポテンシャル Ze/r の中を、互いにCoulomb斥力を及ぼしながら運動している2個の最外殻電子(座標 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$) のSchrödinger方程式は

$$\begin{aligned} H\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= E\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \\ H &= H_0(\nabla_1, \mathbf{r}_1) + H_0(\nabla_2, \mathbf{r}_2) + V_{ee}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \end{aligned} \quad (\text{A})$$

の形に書ける。ただし、 $\nabla_i = \partial/\partial\mathbf{r}_i$ で、 V_{ee} はCoulomb斥力ポテンシャルを表す。電子の質量を m 、電荷を $-e$ として、Hamilton演算子 H をあらわな形で書け。

- (2) Schrödinger方程式(A)の解 $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ は、エネルギー固有値 E が縮退していなければ、必ず $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ の対称関数または反対称関数である。これを証明せよ。
- (3) Coulomb斥力項 V_{ee} は小さいと見なして摂動で扱う。一体系のHamiltonian $H_0(\nabla, \mathbf{r})$ の二つの相異なる(規格化された)固有状態をそれぞれ $\varphi_a(\mathbf{r})$ (固有値 E_a)、 $\varphi_b(\mathbf{r})$ (固有値 E_b) とした時、

$$\psi_{\pm}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_a(\mathbf{r}_1)\varphi_b(\mathbf{r}_2) \pm \varphi_a(\mathbf{r}_2)\varphi_b(\mathbf{r}_1))$$

は、Schrödinger方程式(A)の摂動のゼロ次の固有解になっている。対応する固有値 $E_{\pm}$ を、摂動 V_{ee} の一次の近似で求めよ。ただし、次の積分 I, J を用いて答えよ。

$$\begin{aligned} I &= \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 |\varphi_a(\mathbf{r}_1)|^2 V_{ee}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) |\varphi_b(\mathbf{r}_2)|^2 \\ J &= \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \varphi_a^*(\mathbf{r}_1)\varphi_b(\mathbf{r}_1) V_{ee}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \varphi_b^*(\mathbf{r}_2)\varphi_a(\mathbf{r}_2) \end{aligned}$$

また、この時 $E_+ > E_-$ が成り立つが、その定性的理由を述べよ。

- (4) ここまでは、電子のスピンの自由度を考慮しなかったが、これを考慮すれば、系の波動関数は $\Psi(\mathbf{r}_1, s_1, \mathbf{r}_2, s_2)$ と書くべきである。 s_i は、 $\pm 1/2$ の値をとるスピン変数である。ここで、電子がフェルミ統計に従うという事実を考慮に取り入れれば、Hamilton 演算子 H が全くスピン演算子 $\mathbf{s}_i (= \boldsymbol{\sigma}_i/2)$ ($i = 1, 2$) を含まないにもかかわらず、系のエネルギー固有関数は、系の全スピン $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ の大きさの確定した状態になる。 $\mathbf{S}$ の大きさの確定した状態を具体的に作り、それと前問の $\psi_{\pm}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ とを用いて、フェルミ統計性を満たす固有波動関数 $\Psi(\mathbf{r}_1, s_1, \mathbf{r}_2, s_2)$ を構成せよ。ただし、一体のスピン up、down 状態は、それぞれ $\alpha(s)$ 、 $\beta(s)$ ($s: s_1$ or s_2) と記せ。(あるいは $|\uparrow\rangle$ 、 $|\downarrow\rangle$ を使っても良い。)
- (5) 軌道状態 φ_a, φ_b ($a \neq b$) に電子が一個ずつあるという状態に話を限定しておけば、系は二電子のスピン自由度のみの系と見なせて、上の結果は、この近似の範囲内で、実効的 Hamiltonian

$$H_{\text{eff}} = c + d \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$$

で記述できる。係数 c, d を $E_{\pm}$ で表せ。

II-2 (4 サイト Heisenberg 模型) (100 点)

4 サイトのハイゼンベルグ模型を考える。ハミルトニアンは

$$H = J(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_4 + \mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_1)$$

で与えられる。スピンの大きさは $1/2$ である。以下では、ボルツマン定数を k とし、 $\hbar = 1$ とおく。

- (1) 次の恒等式に注意して、すべてのエネルギー固有値と縮重度を求めよ。

$$(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_4)^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_3)^2 + (\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_4)^2 + 2(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_4 + \mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_1)$$

- (2) この系が温度 T の熱平衡状態にあるとき、分配関数 Z と内部エネルギー E を $K(\equiv J/kT)$ と J を用いて書け。

- (3) 系の比熱を計算し、 $kT \gg |J|$ と $kT \ll |J|$ のときの近似式を書け。 $(J > 0$ と $J < 0$ の両方の場合を考えよ。)

この系に磁場 h をかけると、ハミルトニアンには

$$H' = -hS^z, \quad S^z \equiv S_1^z + S_2^z + S_3^z + S_4^z$$

が加わり、全ハミルトニアンは $H + H'$ となる。 $(S_i^z$ は $\mathbf{S}_i$ の z 成分である。)

- (4) 磁化 $\langle S^z \rangle$ を $K, h, \beta(\equiv 1/kT)$ を用いて表せ。ただし、 $\langle \rangle$ は全ハミルトニアン $H + H'$ に関する平均である。

- (5) この系の $h \rightarrow 0$ での帯磁率

$$\chi \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \langle S^z \rangle$$

を計算し、 $kT \gg |J|$ と $kT \ll |J|$ のときの近似式を書け。

- (6) 前問で求めた帯磁率の低温極限 ($T \rightarrow 0$) の値は、 J の符号によって全く異なっている。この理由を簡単に述べよ。

II-3 (回転する球状超伝導体の作る磁場) (100点)

電氣的に中性で超伝導状態になっている半径 R の球が真空中に置かれ、 z 軸まわりに一定の角速度 $\omega \equiv \omega e_z$ (e_z : z 軸方向単位ベクトル) で回転している。この時、球内外に作られる静的な磁束密度 $\mathbf{B}$ を、Maxwell 方程式

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (\text{A})$$

および $\text{div} \mathbf{B} = 0$ を解いて求めることを考える (簡単のため球内と真空中での透磁率は共に μ_0 とする)。超伝導状態にある場合、球内の電流密度 $\mathbf{j}$ は、 $\text{div} \mathbf{A} = 0$ のゲージのベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を用いて

$$\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\lambda^2} \left(\mathbf{A}(\mathbf{r}) - \frac{m}{e} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right) \quad (\text{B})$$

で与えられることが知られている。ここで、 λ は磁気侵入長と呼ばれる超伝導性を特徴づけるパラメータであり、 m と $-e$ はそれぞれ、電子の質量と電荷である。

必要な場合は、問題文のあとに記す公式を用いよ。

- (1) 動径方向単位ベクトル $\mathbf{e}_r \equiv \mathbf{r}/r$ の各成分 x/r , y/r , z/r は、どれも角運動量の大きさの演算子 L^2 の固有関数である。その固有値を答えよ (計算は示さなくても良い)。ただし、 L^2 は 3次元極 (球) 座標 (r, θ, ϕ) で次の表式で与えられるものである:

$$L^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 \quad (\text{C})$$

- (2) (B) 式を用いて、Maxwell 方程式 (A) を $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ に対する方程式に書き直せ。また、そこで $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(\rho) \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r$ ($\rho \equiv r/\lambda$) という関数形を予想すれば、方程式が簡単に

$$\frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dA}{d\rho} - \frac{2}{\rho^2} A = \begin{cases} A - \Omega \rho & (\text{球内: } \rho < \rho_R) \\ 0 & (\text{球外: } \rho > \rho_R) \end{cases} \quad (\text{D})$$

となることを示せ。ただし、 $\Omega \equiv (m/e)\lambda\omega$, $\rho_R \equiv R/\lambda$ と定義した。

- (3) 方程式 (D) を解き、球の内部と外部における $A(\rho)$ を求めよ。ただし、無限遠 ($\rho \rightarrow \infty$) で磁場はゼロになるとせよ。

(ヒント: 球内部では、 $\tilde{A}(\rho) \equiv A(\rho) - \Omega \rho$ に対する方程式を考えよ。)

- (4) 球外部における磁束密度 $\mathbf{B}$ は、単一の磁気双極子 $\mathbf{p}$ の作る磁束密度

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}}{r^5}$$

と同じ形になっていることを示せ。また、 $\mathbf{p}$ を μ_0 , λ , R , $\Omega (= \Omega e_z)$ で表せ。

- (5) 球内部における電流密度は $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = j(r) \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r$ の形を持つ。以下、 $R \gg \lambda$ と仮定しよう。この場合、 $j(r)$ は球内部の殆どで $e^{-R/\lambda}$ 程度の非常に小さな量になる。 $j(r)$ の大きい所はどこか、またその近傍での $j(r)$ の関数形を答えよ。
- (6) 球の中心での磁束密度 B は λ に依らないことを示せ。

公式

- Laplace 演算子の表式:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mathbf{L}^2}{r^2}$$

- 微分方程式

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx} - \left(1 + \frac{n(n+1)}{x^2} \right) \right] F_n(x) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

の $x = 0$ で正則な解:

$$F_n(x) = x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\sinh x}{x}$$

平成9年度大学院入学試験問題 III (3時間)

注意

(1) 問題は III-1 から III-6 まで全部で 6 問ある。これらから 3 問を選択せよ。

ただし、第一志望分科が、理論系の場合は問題 III-1,-2,-3 から少なくとも 1 問、実験系の場合は問題 III-4,-5,-6 から少なくとも 1 問、はそれぞれ選ぶこと。

(2) 選択した問題の解答は、それぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ。(裏面を用いてもよい。)

(3) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

III-1 (選択) (古典粒子系の密度相関) (100 点)

次のハミルトニアンで記述される一次元の古典 $N+1$ 粒子系を考える。

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2m} + \sum_{j=0}^{N-1} w(x_{j+1} - x_j)$$

粒子の順序は交換せず常に $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N$ であり、 x_0 は $x_0 = 0$ に固定されているものとする。系には一定の圧力 P が外からかかっているものとしよう。 $w(x)$ は 2 粒子間の相互作用ポテンシャルで、その関数形は、任意の温度 $T(> 0)$, P に対して熱力学量が有限値をとるように選ばれていると仮定する。

(1) 系の長さの期待値 $L = \langle x_N \rangle$ を計算し、関数 $w(x)$ を用いた積分形で表せ。ここで、 $\langle \rangle$ は 温度 T 、 P 一定下での統計平均とする (ヒント: P 、 T 一定下でのアンサンブルはハミルトニアン H を形式的に $H + x_N \cdot P$ で置き換えて定義される)。

(2) 系の圧縮率

$$\kappa = - \left. \frac{\partial L}{\partial P} \right|_T$$

は、任意の $T(> 0)$ 、 P に対して正であることを示せ。

次に、具体例として

$$w(x) = \begin{cases} 0 & (x > b) \\ +\infty & (0 < x < b) \end{cases}$$

の場合を考える。

(3) 粒子の平均間隔 $a = L/N$ を用いて、状態方程式を書け。

(4) 粒子の密度 (位置) 相関を見るには、その Fourier 変換

$$S(k) = \frac{1}{N} \int dx dx' e^{-ik(x-x')} \langle \rho(x) \rho(x') \rangle$$

がしばしば便利な量となる。ここで、密度は $\rho(x) = \sum_{j=0}^N \delta(x - x_j)$ で、 $k \neq 0$ とする。 $S(k)$ を k 、 a 、 b を用いて表せ (ただし、 $1/N$ のオーダーの量を無視せよ)。

- (5) 十分高密度 ($\varepsilon \equiv (a - b)/a \ll 1$) の場合、 $S(k)$ はたいていの k に対し、 ε^2 程度の小さな量になるが、 k が nK (n は整数、 K はある正の定数) の極めて近くでは逆に ε^{-2} のオーダーの大きな値をとり、

$$S(k) \simeq \frac{2C_n \varepsilon^2}{(k - nK)^2 a^2 + C_n^2 \varepsilon^4}$$

の形で近似できるようになる。 K および、 C_n (n に依存する正の定数) を具体的に求めよ。

（ 一次元系において完全な固体が実現した場合、 $S(k) = (2\pi/a) \sum_{n \neq 0} \delta(k - nK)$ という結果になる。上記のモデルの $S(k)$ は、高密度極限においてこの完全固体の結果になっている。 ）

III-2 (選択) (角運動量の表現) (100点)

- (1) 2変数 u_1, u_2 からなる 2成分ベクトル $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ を考える。 $\mathbf{u}$ に関する微分演算子 j_x, j_y, j_z を

$$j_k = \mathbf{u} S_k \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 u_{\alpha} (S_k)_{\alpha, \beta} \frac{\partial}{\partial u_{\beta}}, \quad (k = x, y, z)$$

で定義する。ここで、2行2列のスピン行列 S_x, S_y, S_z は

$$S_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

で与えられる。 j_x, j_y, j_z の相互の間の交換関係は S_x, S_y, S_z の相互の間の交換関係に等しい、つまり角運動量の交換関係に等しい。この事実を見るために、実際に

$$[j_k, j_{\ell}] = \mathbf{u} [S_k, S_{\ell}] \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 u_{\alpha} ([S_k, S_{\ell}])_{\alpha, \beta} \frac{\partial}{\partial u_{\beta}}$$

が成立することを証明せよ。

- (2) $\mathbf{j}^2$ を $\mathbf{j}^2 = j_x^2 + j_y^2 + j_z^2$ で定義する。2変数 u_1, u_2 から作る単項式

$$\phi_m^j(\mathbf{u}) = u_1^{j+m} u_2^{j-m}$$

は次の性質を持つことを示せ。

- (a) $j_z \phi_m^j(\mathbf{u}) = m \phi_m^j(\mathbf{u})$,
 (b) $\mathbf{j}^2 \phi_m^j(\mathbf{u}) = j(j+1) \phi_m^j(\mathbf{u})$.

以下の議論で、 j ($j \geq 0$) は整数か半整数で、 $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$ であるとする。

- (3) 別の2変数 v_1, v_2 からなる2成分ベクトル $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ を導入し、 $\mathbf{v}$ に関する微分演算子 p_k を j_k と全く同様に $p_k = \mathbf{v} S_k (\partial/\partial \mathbf{v})$ ($k = x, y, z$) で定義する。さて、 $D = u_1 v_2 - u_2 v_1$ で与えられる行列式 D は合成角運動量演算子 $J_k = j_k + p_k$ に対して

$$J_k D = 0 \quad (k = x, y, z)$$

という性質を持つことを示せ。

- (4) $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ を

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1^{j_1-j_2+J} v_1^{-j_1+j_2+J} D^{j_1+j_2-J}$$

で定義する。ただし $J = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2$ とする。このとき次の関係を証明することにより $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ が合成角運動量の固有状態であることを示せ。

$$(a) \quad (j_x^2 + j_y^2 + j_z^2)\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = j_1(j_1 + 1)\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

$$(b) \quad (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = j_2(j_2 + 1)\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

$$(c) \quad J_z\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = J\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

$$(d) \quad (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2)\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = J(J + 1)\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

- (5) 一般に合成角運動量の固有状態 $|JM\rangle$ は Clebsch-Gordan 係数 $(j_1 m_1 j_2 m_2 | JM)$ を用いて

$$|JM\rangle = \sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 | JM) |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$$

で与えられる。ここで、角運動量の固有状態 $|JM\rangle$ 、 $|j_1 m_1\rangle$ 、 $|j_2 m_2\rangle$ は規格化されている。さて変数 u_1 、 u_2 に関する適当な積分を定義すると、 $\frac{\phi_m^j(\mathbf{u})}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}$ は量子数

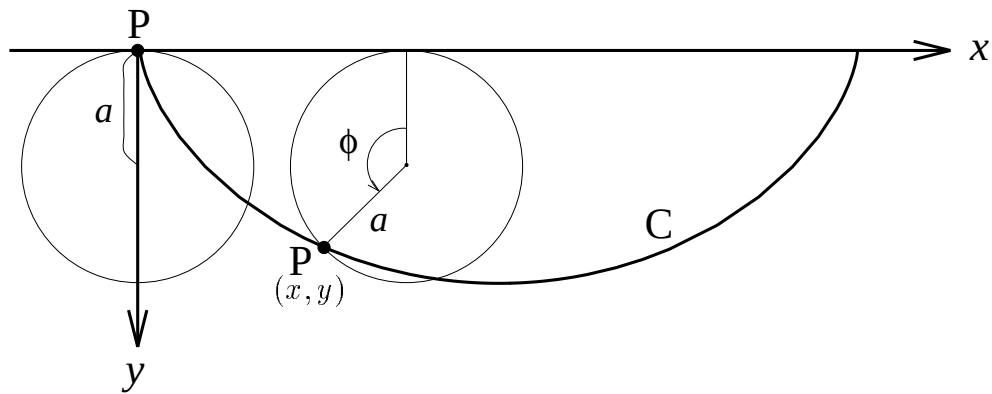
j 、 m に関して規格直交化されている。前問 (4) を用いて、 $M=J$ の場合の Clebsch-Gordan 係数 $(j_1 m_1 j_2 m_2 | JJ)$ の具体的表式を示せ。Clebsch-Gordan 係数の符号の約束は $(j_1 j_1 j_2 J - j_1 | JJ) > 0$ である。必要なら公式

$$\sum_{a+b=r} \frac{(p+a)!(q+b)!}{p!a!} \frac{(p+q+r+1)!}{q!b!} = \frac{(p+q+r+1)!}{(p+q+1)!r!}$$

を用いよ。

III-3 (選択) (サイクロイド上の質点の運動) (100点)

- (1) 半径 a の円を下図のように x 軸に沿って反時計回りに滑ることなく一回転させるとき円上の点 P の描く軌跡をサイクロイドという。サイクロイド C 上の任意の点の座標 (x, y) を円の回転角 ϕ を用いて表せ。



- (2) 問 (1) で求めたサイクロイド C に沿って滑らかなレールを作り、そのレール上を質量 m の質点が摩擦無しに重力の作用の下で運動するようにした。ただし、レールは鉛直面内にあり y 軸の正方向に加速度 g の重力が働いているとする。時刻 $t = 0$ に回転角 ϕ_0 の位置にあった質点が自然に滑り落ち始めた。このとき次の問に答えよ。
- (a) 質点の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和を変数 $z = \cos(\phi/2)$ を用いて表せ。
- (b) 質点の運動方程式を求め、 z について解け。また、この運動の特徴を記せ。
- (3) 前問 (2) と同様にサイクロイド上を質量 m の質点が重力の作用下で運動し、更に質点の速度に比例する抵抗 $k\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ が働いている場合を考える。 $t = 0$ での初期条件は前問 (2) と同じであるとして次の問に答えよ。
- (a) 質点の運動方程式を変数 z を用いて書け。
- (b) 運動方程式を、 k/m が $\sqrt{g/a}$ よりも大きい、小さい、あるいは等しい、の 3 つの場合に分けて z について解け。また質点の運動の特徴を記せ。

III-4 (選択) (電気回路・電磁気) (100点)

インダクタンス L のコイルと容量 C のコンデンサーを周期的に並べた図 1 の様な回路は、電荷による信号を遅延させる働きをする。コイル間には電磁誘導による結合はないものとし、 I_i はコイルを流れる電流、 Q_i はコンデンサーに貯められた電荷とする。

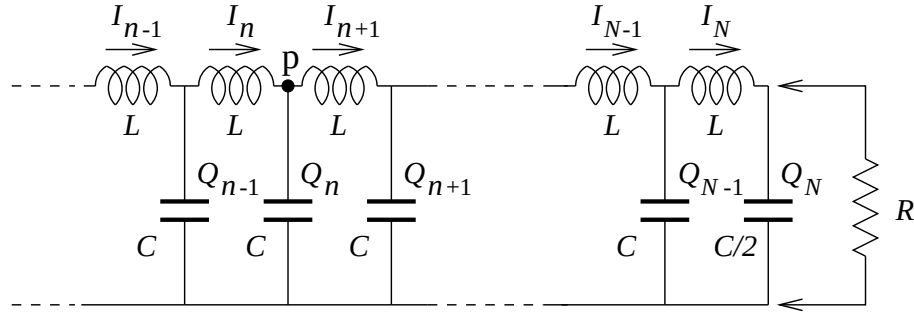


図 1:

- (1) n 番目と $n+1$ 番目の閉回路において、電圧が満たすべき関係式と、結節点 p に流入する電流の関係式を使って、次の関係が成り立つことを示せ。

$$L \frac{d^2 Q_n}{dt^2} = \frac{1}{C} (Q_{n-1} + Q_{n+1} - 2Q_n).$$

- (2) n, N が大きく、回路の両端が無視できるとしたとき、

$$Q_{n-1}(t) = Q_n(t + \Delta t)$$

となって、 Δt だけ遅れて電荷による信号が図示のコンデンサー列上を左から右へと伝わる解がある。 Δt を L と C で表せ。(ヒント： Δt が小さいとして任意の時間 t のまわりにテイラー展開してその 2 次までをとる。)

- (3) 適当な大きさ R を持つ抵抗素子を、回路の右端の容量 $C/2$ のコンデンサーに並列につなぐと、反射が生じなくなり

$$Q_{N-1}(t) = 2Q_N(t + \Delta t)$$

となる。 R を L と C で表せ。

- (4) $Q_{n-1}, Q_n, Q_{n+1}, \dots$ は短い間隔 Δr で並んでおり、 r, t について滑らかな関数 $Q(r, t)$ で表現できるものとする。 L_0, C_0 をそれぞれ単位長さ当たりのインダクタンス、容量とし、(1)に示した関係式より電荷の伝播方程式を導き、伝播速度を求めよ。

- (5) 図2のように接地された導体板上に厚さ d で比誘電率が ϵ 、比透磁率 μ の絶縁体膜をつけ、その上に幅 w の導体薄膜線路をつけたときの単位長さ当りの容量、インダクタンスを求め、これをもとに電荷の伝播速度を導け。但し、 $w \gg d$ とし、電束密度、磁束密度は導体薄膜線路と導体板の間では一様で一定値をとるが、それ以外の部分では無視できるほど小さいものとする。単位系は、MKS、CGSのいずれを用いても良い。(ヒント：インダクタンスを求めるには、導体薄膜線路と導体板に流れる電流により両板の間に誘起される磁束の時間変化が起電力を与えることに着目すれば良い。)

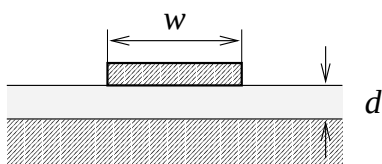


図 2: 断面図。伝播方向は紙面に垂直。

III-5 (選択) (レーザー冷却) (100点)

電荷をもたない中性原子の運動をレーザー光を用いて制御することにより、原子集団の温度を下げるができる。これに関連して以下の問に答えよ。ただし簡単のため、質量 m の中性原子は 2 準位 (基底状態 $|g\rangle$ と励起状態 $|e\rangle$) のみを取りうるとし、レーザー光は単色光とみなし、その実験室系での周波数を ν とする。なお原子の運動は鉛直 z 方向の 1 次元のみが可能とし、その速度 v は光速 c よりも十分小さく、 v/c の 2 次以上の項は無視するものとする。以下の設問 (1), (2), (3) では重力の効果は無視する。

光を吸収して励起状態 $|e\rangle$ (エネルギー E_e) に励起させられた原子は、その後すぐに自然放出光を出して基底状態 $|g\rangle$ (エネルギー E_g) に戻る。この際原子が常に同じ向きの光 (鉛直下向きの光としよう) を吸収するようにすると、その光子の運動量が原子に与えられ、これを繰り返すことにより一定の向き (鉛直下向き) に力を受けることになる。一方、自然放出光はあらゆる向きに放出されるので、これによって原子が受ける力の平均値は零になる。また、一旦停止した原子はある機構によりそのまま停止し続けるとする。

- (1) 時刻 t での、状態 $|g\rangle$ および $|e\rangle$ の存在確率を $N_g(t)$ および $N_e(t)$ とする ($N_g(t) + N_e(t) = 1$)。2 準位間の吸収及び誘導放出の遷移確率は加える光の強度 I に比例し、その比例係数を b (定数) とすると、原子の正味の光吸収率は $bI(N_g(t) - N_e(t))$ となる。励起状態 $|e\rangle$ の寿命を τ とすると、 τ より十分長時間の後に、 $N_g(t)$, $N_e(t)$ は定常状態 ($dN_g(t)/dt = dN_e(t)/dt = 0$) に達し、各々 $N_g(\infty)$, $N_e(\infty)$ になる。 $N_g(\infty)$, $N_e(\infty)$ を求め、その結果からレーザー光が原子に及ぼす力 (単位時間あたりに受ける運動量変化) F が

$$F = \frac{h\nu}{c} \cdot \frac{bI}{1 + 2\tau bI}$$

と表わせることを示せ。ただし、 h はプランク定数である。

- (2) 原点 $z = 0$ から鉛直上向きに初速度 u で飛び出してくる原子が、レーザー光から一定の力 F によって停止させられるまでに要する時間 t 、及び距離 L を、 m 、 u 、 F を用いて表わせ。また、座標 z ($0 < z < L$) の点における原子の速度 $v(z)$ を u 、 L 、 z を用いて表わせ。
- (3) 実際には、設問 (1) で用いられた b の値は、原子とともに運動する座標系でみたレーザー周波数 ν' と原子の共鳴周波数 $(E_e - E_g)/h$ のずれに依存する。ここでは単純化して、 $E_e - E_g \neq h\nu'$ では $b = 0$ で、 $E_e - E_g = h\nu'$ のときのみ値 $b(\neq 0)$ をとるとする。このような状況では、原子がレーザー光から受けた力によって減速されるにつれてドップラー効果により ν' が変わるため、 ν' と $(E_e - E_g)/h$ を常に等しくして一定の力を原子に与え続けるためには工夫が必要になる。そこで、磁場によるエネルギーのシフトを利用してドップラー効果を補正し、原子を停止させることを考えよう。ここで、2 準位間のエネルギー差は $E_e - E_g$ から、実験室系において z 方向に加えた磁場 $B(z)$ により、 $E_e - E_g + \alpha B(z)$ のように変化するとする (α は定数)。実験室系でのレーザー光の周波数 ν が $\nu = (E_e - E_g)/h$ のとき、初速度 u の原子を停止させ

るために加えるべき磁場 $B(z)$ ($0 < z < L$) の表式を z の関数として求めよ。また、この磁場により、初速度が u 以下の原子も $z = L$ で停止することを説明せよ。

- (4) 冷却された原子集団の温度測定について考えよう。ただし、本問においては重力を無視せず、設問 (1), (2), (3) で考えたレーザー光や磁場はもはや加えてないとし、さらに、原子どうしの衝突を無視する。いま、時刻 $t = 0$ において全ての原子は点 $z = d(> 0)$ にあり、原子の速度 v_0 は温度 T の Maxwell 分布関数 $f(v_0)$ に従って分布している。また、原点 $z = 0$ には、 z 方向と直交する方向から非常に弱いレーザー光（プローブ光）が照射されている。原子は重力を受けながら運動し（重力加速度を g とする）、原点を横切るときプローブ光を吸収する。時刻 t での単位時間あたりの吸収量 $A(t)$ は、その時刻 t での原点における原子数密度 $\rho_z = f(v_0)dv_0/dz$ に比例する。この比例係数を a として $A(t)$ の t 依存性を表す具体的表式を見い出せ。（これから温度 T を測定することができる。） ただし、必要ならば

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-z^2) dz = \sqrt{\pi}$$

を用いよ。

- (5) 光の検出器の例を一つ挙げ、その原理を簡潔に述べよ。

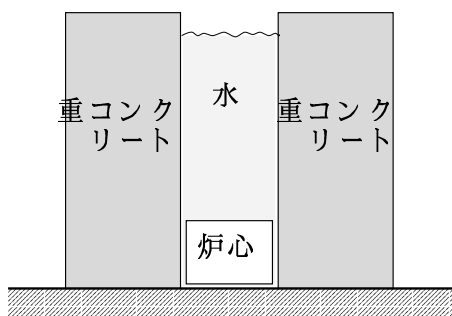
III-6 (選択) (放射線計測) (100点)

放射線計測の基礎に関する以下の問に答えよ。ただし、数値計算は有効数字2桁までの計算で良い。またアボガドロ数は $6.0 \times 10^{23} \text{ (mol}^{-1}\text{)}$ 、 $\ln 2 = 0.69$ とする。

- (1) 加速器のターゲット室や原子炉の炉心では多量の γ 線が発生している。人体を守るために、これらの γ 線は重コンクリートなどを用いて遮蔽されている。遮蔽物体の γ 線に対する吸収係数が $\mu \text{ (cm}^{-1}\text{)}$ のとき、 γ 線が $\Delta x \text{ (cm)}$ の厚さの遮蔽物を通過するときの、強さ I の γ 線の減衰 $-\Delta I$ は

$$-\Delta I = \mu I \cdot \Delta x$$

で表される。



図のようなスイミング・プール型の原子炉があり、炉心の周りは1(m)厚の重コンクリートで遮蔽されている。上部は水で遮蔽されている。いま原子炉の出力を2倍に上げる計画をした。前と同じ遮蔽効果(漏洩 γ 線量を同じ)にするためには重コンクリートの側面にどれだけの厚さの鉄板を補えばよいか。また、このとき、上部も側面と同じ遮蔽効果を得るためには水の深さはどれほど必要か。 γ 線の強さは出力に比例するものとする。

ただし、

重コンクリートの密度は $5.0 \text{ (g/cm}^3\text{)}$ 、 γ 線にたいする質量吸収係数は $3.2 \times 10^{-2} \text{ (cm}^2/\text{g)}$ である。

鉄の密度は $7.9 \text{ (g/cm}^3\text{)}$ 、 γ 線にたいする質量吸収係数は $3.3 \times 10^{-2} \text{ (cm}^2/\text{g)}$ である。

水の γ 線にたいする質量吸収係数は $3.4 \times 10^{-2} \text{ (cm}^2/\text{g)}$ である。

- (2) 原子炉は強力な中性子場として色々な実験に利用されている。今、金箔 (^{197}Au) $1.0 \times 10^{-6} \text{ (g)}$ を原子炉で丁度半減期 ($T_{1/2}$) 相当の時間照射した。中性子を吸収した ^{198}Au は β 崩壊して安定な ^{198}Hg になる。従って、 ^{198}Au の個数 N の変化は毎秒 $\phi \sigma A_0$ だけ増え、また毎秒 λN だけ崩壊するから、

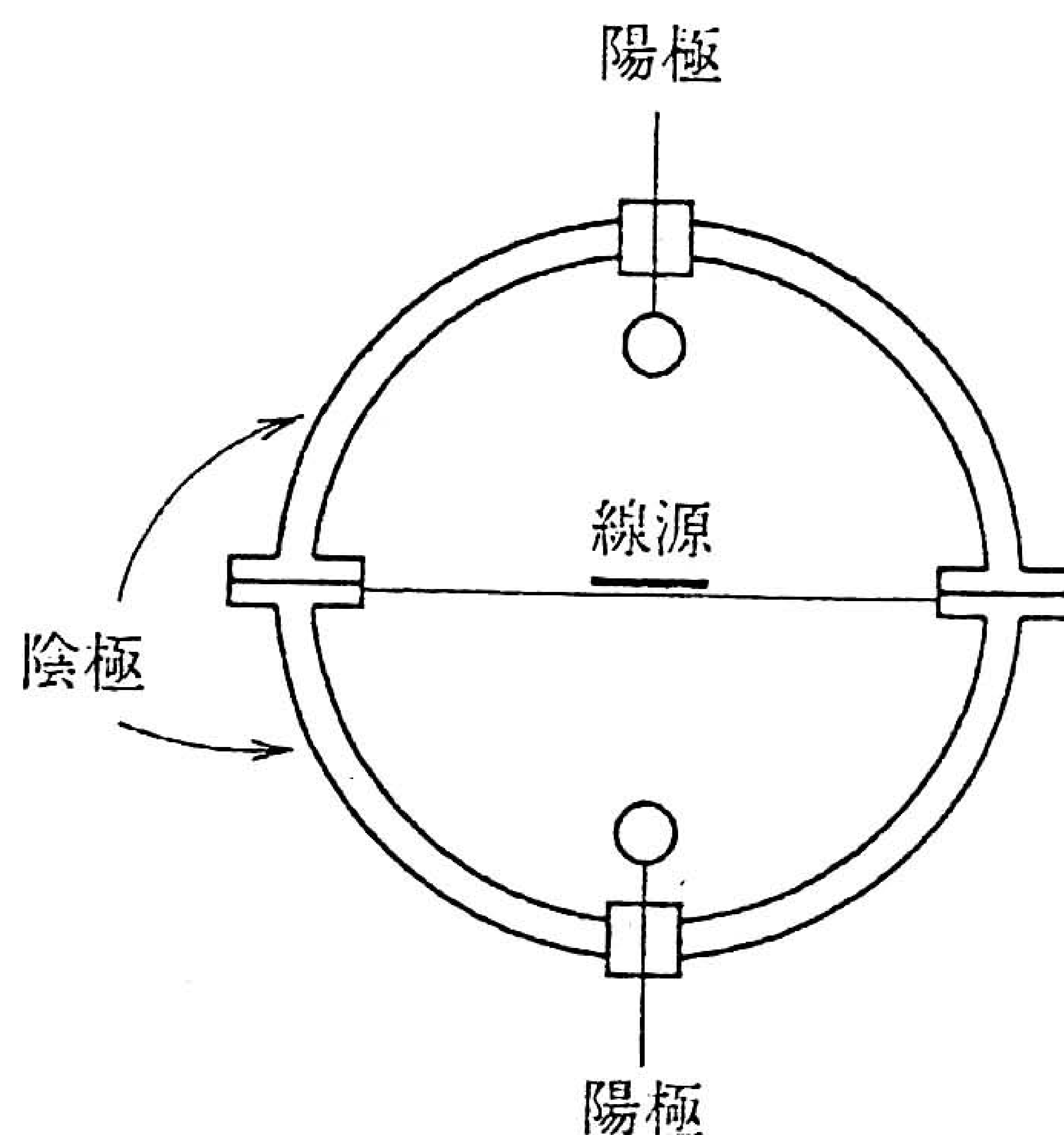
$$\frac{dN}{dt} = \phi \sigma A_0 - \lambda N$$

ただし、 ϕ は中性子束で σ は放射化断面積である。

A_0 は ^{197}Au の個数で照射中も殆ど変化せず、一定と考える。

λ は崩壊定数で $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$ である。

金の放射化断面積を $9.6 \times 10^{-23} (\text{cm}^2)$ 、中性子束を $\phi (\text{cm}^{-2} \cdot \text{sec}^{-1})$ とするとき照射後すぐの β 放射線の強さ Q は何ベックレル（毎秒当りの崩壊数）か。（ ϕ を含んだ式で表せ。）



- (3) 中性子束を算出するため上記 β 線源の強さ Q の絶対測定を行った。 β 検出器として図示のような 4π ベータカウンターを用いた。カウンターは上下二段になっており、中央に β 線源をおいた薄いフィルムをおく。上下はこのフィルムで分断されている。すなわち、カウンター上部では直接 β 線源と向きあっているが、カウンター下部ではフィルムの吸収を受けたものを測定することになる。フィルムによるバックscatter による効果は無視する。カウンターは上下部同時にも、また別々にも測定出来るようになっている。なお β 線源自身の吸収は無視する。

上下を同時に測定し回路的に合計したときのカウント・レートを N_{12} 、

上だけの測定（下のカウンター電源を切る）したときのカウント・レートを N_1 、

下だけの測定（上のカウンター電源を切る）したときのカウント・レートを N_2 とする。

ただし、 β 線は上下に等量づつ放出されると考える。 β 線は電源が入っているカウンターでは散乱はなく全て計数されるが、電源の入っていないカウンターでは w の割合で散乱され、薄いフィルムを通過して電源の入っているカウンターで計数される。

真のカウント・レート Q 、フィルムによる吸収率を ν とするとき、 N_{12} 、 N_1 、 N_2 を ν 、 w 、 Q を用いて表せ。ただし、 ν 、 w は小さく ν^2 、 w^2 、 νw の寄与は無視する。

- (4) $N_{12} = 1,132,244$ 、 $N_1 = 700,038$ 、 $N_2 = 687,601$ (counts/sec) であった。真のカウント・レート Q を求め、中性子束の強さを算出せよ。

平成9年度大学院入学試験問題 I 訂正

I-3

設問 (1)

誤 : ... 物体は、慣性系 O' から見れば、...

正 : ... 物体は、 $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x$ で動いている慣性系 O' から見れば、...

設問 (5)

誤 : $\frac{e}{2mc} \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}}{c}$

正 : $\frac{-e}{2mc} \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}}{c}$