平成31年度大学院入学試験問題　I（3時間）

注意

(1) 問題I–1，I–2，I–3の解答はそれぞれ指定された解答用紙1枚に記入せよ．

(2) 問題I–1の解答には裏面を用いてもよい．

(3) 問題I–2は独立した2つの小問I–2A，I–2Bから，問題I–3は独立した4つの小問I–3A，I–3B，I–3C，I–3Dからなる．それぞれの小問の解答は解答用紙の指定された場所(裏面を含む)に記入せよ．

(4) 各解答用紙は横長に使用して，表側の左上部（線より上）に受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の他の部分に受験番号，氏名を書いてはいけない．解答用紙上部の線より上の欄には表，裏とも解答を書いてはいけない．

(5) 解答用紙は3問（計3枚）すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない．

(6) 問題冊子は表紙を含めて7ページまである．

I-1 (電磁気学) (100 点)

真空領域から，巨視的には電気的に中性なプラズマが存在する領域 (電離層) へ伝播する電磁波を考える．2 つの領域は $z = 0$ の平面で隔てられ，$z < 0$ の領域は真空，$z > 0$ の領域は空間的に一様なプラズマが分布しており，電離電子の数密度は n であるとする．簡単のため，プラズマの熱運動はないものとし，イオンの運動は無視する．なお，電子の変位は微小であるとする．電磁波はマックスウェル方程式

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{C}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{D}$$

に従う．ここで，$\vec{E}$, $\vec{B}$ はそれぞれ電場，磁束密度，$\vec{J}$ は電流密度，μ_0, ε_0 はそれぞれ真空の透磁率，真空の誘電率である．

電離層中の電子は入射する電磁波の電場により加速される．このとき，電子の電荷を e，質量を m，速度を $\vec{v}$ とすると，一つの電子の運動は，運動方程式

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E}$$

に従うものとする (ここで，電磁波の磁場による力は無視できるとした)．なお，解答には SI 単位系を用いよ．

(1) 電離層中での電流密度 $\vec{J}$ の時間微分 $\partial \vec{J}/\partial t$ は電場 $\vec{E}$ を用いて，

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \boxed{\text{あ}}\ \vec{E}$$

と書ける．$\boxed{\text{あ}}$ に入る適切な式を求めよ．

(2) 式 (A)∼(D) のマックスウェル方程式から磁束密度 $\vec{B}$ を消去することで，電場 $\vec{E}$ についての波動方程式を求めると，

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \boxed{\text{い}}\ \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

となる．このとき，n, μ_0, ε_0, e, m のうち必要なものを用いて $\boxed{\text{い}}$ に入る適切な式を求めよ．

(3) 電離層中 ($z > 0$) での平面波 (角振動数 ω，電離層中の波数 k') の分散関係は，光速 c ($= 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$) とプラズマ振動数 ω_p を用いて，

$$\omega^2 = c^2 k'^2 + \omega_\mathrm{p}^2$$

と与えられる．このとき，ω_p を n, μ_0, ε_0, e, m のうち必要なものを用いて表せ．

以下では，真空中 ($z < 0$) を $+z$ 方向に進む入射波の電場を $\vec{E}_\mathrm{i} = \mathrm{Re}[E_0 e^{i(kz-\omega t)}]\vec{e}_x$ とする．ただし，E_0 は定数であり，$\vec{e}_x$ は x 方向の単位ベクトルである．

(4) $\omega > \omega_\mathrm{p}$ のとき，電離層中の電場は波数 k' の平面波である．$z = 0$ での接続条件から，反射波と透過波の電場 (それぞれ $\vec{E}_\mathrm{r}$, $\vec{E}_\mathrm{t}$ とする) を求めよ．

(5) 小問 (4) において，電離層中での透過波のポインティングベクトル $\vec{S}$ の時間平均 $\left\langle \vec{S} \right\rangle$ の向きと大きさを，$z = +0$ において求めよ．

(6) $\omega < \omega_\mathrm{p}$ のとき，$z = +0$ でのポインティングベクトルの時間平均を求めよ．

I-2A (力学) (50 点)

質量 M_s の太陽の周りを質量 $M_p (\ll M_s)$ の惑星が公転している．ケプラーの法則から，万有引力の法則

$$F = -G\frac{M_s M_p}{r^2}$$

を導いてみよう．
太陽は不動であると近似し，公転面内で太陽を原点とする極座標 (r, θ) を用いると，惑星にはたらく加速度は，一般にその運動状態から，

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \qquad a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

となる．ケプラーの第 2 法則によれば惑星の面積速度 (惑星と太陽を結ぶ直線が単位時間に掃く面積 $= \dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt}$) は一定である．したがって，$a_\theta = 0$ であり，惑星にはたらく力の θ 成分はゼロである．惑星にはたらく力は r 方向のみと考えられる．ケプラーの第 1 法則によれば，この惑星の公転軌道は楕円である．その面積は，楕円の長半径 a，離心率 ε を使って，$\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}$ と表せる．

(1) 惑星の公転周期 T と楕円の面積から面積速度を求め，$\dfrac{d\theta}{dt}$ を T を含んだ式で表せ．

(2) r の時間に関する 1 階微分と 2 階微分は，

$$\frac{dr}{dt} = \boxed{\text{A}}\,\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \boxed{\text{B}}\,\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

と表せる．$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$ に入る適切な式を T を含んだ形で求めよ．

(3) 楕円の r と θ の関係 $r = \dfrac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\theta}$ を用いると，$a_r = \dfrac{k_{sp}}{r^2}$ となる． k_{sp} を a, T を用いて表せ．

以上を踏まえて，ニュートンが行ったであろうアプローチを考えてみよう．惑星は太陽によって $F_p = a_r M_p = \dfrac{k_{sp}M_p}{r^2}$ の大きさの力で引かれている．ケプラーの第 3 法則によれば，k_{sp} は惑星によらず一定である．一方，太陽と惑星の役割を入れかえても同様に力の表式が成り立つと仮定すると，太陽が惑星から受ける力 F_s は，$F_s = \dfrac{k_{ps}M_s}{r^2}$ であり，k_{ps} は太陽の性質によらないと推論される．$\boxed{\quad\text{C}\quad}$ このように考えると，$k_{sp} = -GM_s$，$k_{ps} = -GM_p$ となることを示すことができ，万有引力の法則が導かれる．

(4) $\boxed{\quad\text{C}\quad}$ にあてはまる適切な説明を簡潔に書け．

I-2B (量子力学) (50 点)

質量 m，角振動数 ω の一次元調和振動子を考える．この系のエネルギー固有状態は，交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を満たす生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ と消滅演算子 $\hat{a}$ により，$|n\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ と表すことができる．ここで，$|0\rangle$ は基底状態を表す．なお，以下で，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである．

(1) 位置演算子が $\hat{x} = \sqrt{\dfrac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ と書けることを用いて，$\langle n'| \hat{x} |n\rangle$，$\langle n'| \hat{x}^2 |n\rangle$ をクロネッカーのデルタを使って表せ．

(2) 調和振動子が以下の 4 つのポテンシャル $V_1(x) = Ax$，$V_2(x) = Bx^2$，$V_3(x) = Cx^3$，$V_4(x) = Dx^4$ のそれぞれにより摂動を受けたとする．これらのうち，$|n\rangle$ の固有エネルギー E_n に対して 1 次の摂動による変化が生じるものはどれかを答えよ．また，その理由を，ハミルトニアンの対称性の観点から簡単に説明せよ．さらに，1 次の摂動によるエネルギー変化が生じるものについて，その大きさを $\hbar, m, \omega, n$ および A, B, C, D のうち必要なものを用いて表せ．

(3) 調和振動子に $V_1(x) + V_2(x)$ の摂動が加わったときのエネルギー固有値の厳密解を求めよ．

I-3A (力学) (25 点)

一様な重力加速度 g が鉛直下向きにはたらいている環境下で，初期質量 M_0 のロケットを初速 0 で鉛直上向きに打ち上げる．燃料は，ロケットに対して一定の速さ u で後方に噴出される．ロケットの質量は燃料の噴出にともない減少する．打ち上げ時刻を $t = 0$ とし，時刻 t でのロケットの質量が $M(t)$ と与えられているとする．ロケットの運動方程式を導出し，ロケットの速度 $v(t)$ を求めよ．ただし，鉛直上向きを正とせよ．

I-3B (誤差統計) (25 点)

確率変数 k の確率分布が, $P_\lambda(k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ (ただし，$k = 0, 1, 2, ...$) に従うとき，これをパラメータ λ のポアソン分布と言う．

(1) パラメータ λ のポアソン分布の平均と分散を求めよ．

(2) ある物体から放出される粒子を検出する測定を考える．検出される粒子の数はポアソン分布に従うとする．検出される粒子の数の標準偏差が平均値の 1%以下になるようにしたい．どれだけの粒子数を検出する必要があるか．

I-3C (量子力学) (25 点)

ハミルトニアンが

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + \lambda |x_1 - x_2|$$

で与えられる，1 次元方向に束縛されたスピン 1/2 の 2 つの同種粒子からなる量子力学系を考える．ここで，$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ は 2 つの粒子の位置座標，m は粒子の質量，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったもの，λ は正の定数である．重心系での基底状態と第一励起状態における全スピンの大きさをそれぞれ答え，その理由を簡潔に述べよ．

I-3D (物理数学) (25 点)

ベクトル量 $\vec{r} = (x, y, z)$ が，ガウス分布 $f(\vec{r}) = A\exp(-\beta|\vec{r}|^2)$ に従い分布しているとする．$f(\vec{r})$ が規格化条件

$$\int d^3\vec{r} f(\vec{r}) = 1$$

を満たすように係数 A を決定せよ．ここで，積分公式

$$\int_0^\infty s^2\, e^{-as^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}$$

を用いてよい．また，$|\vec{r}|$ の二乗平均 $\langle |\vec{r}|^2 \rangle$ を求めよ．

平成31年度大学院入学試験問題　II（3時間）

注意

(1) 問題II–1，II–2，II–3の解答はそれぞれ指定された解答用紙1枚に記入せよ．

(2) 問題II–1，II–2の解答には裏面を用いてもよい．

(3) 問題II–3は独立した2つの小問II–3A，II–3Bからなる．それぞれの小問の解答は解答用紙の指定された場所(裏面を含む)に記入せよ．

(4) 各解答用紙は横長に使用して，表側の左上部（線より上）に受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の他の部分に受験番号，氏名を書いてはいけない．解答用紙上部の線より上の欄には表，裏とも解答を書いてはいけない．

(5) 解答用紙は3問（計3枚）すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない．

(6) 問題冊子は表紙を含めて7ページまである．

II-1 (統計力学) (100 点)

質量 m の二つの質点が束縛されている模型によって 2 原子分子を考える．この「分子」が体積 V の箱の中に N 個あるとする．質点間距離の特徴的な長さ a は分子間距離の典型的な長さ $(V/N)^{1/3}$ よりも十分小さいとし，分子間の相互作用は無視できるとする．ボルツマン定数を k_B とする．

(1) 分子内の原子間相互作用として，質点間距離が常に一定値 a に保たれている模型を考える．古典統計力学の範囲で，温度 T の平衡状態における圧力 $P(T,V,N)$ および定積熱容量 $C_V(T,V,N)$ を書け．また，これらを導く基本的な考え方を簡潔に記せ．計算の詳細を説明する必要はない．

(2) 次に，分子内の原子間相互作用が，自然長 a，ばね定数 k のばねで記述される模型を考える．すなわち，$\vec{r}_1$ にある質点と $\vec{r}_2$ にある質点は

$$\frac{1}{2}k\left(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|-a\right)^2$$

という相互作用エネルギーを持つ．$ka^2 \gg k_\mathrm{B}T$ のとき，古典統計力学の範囲で，温度 T の平衡状態における圧力 $P(T,V,N)$ および定積熱容量 $C_V(T,V,N)$ を求めよ．また，これらを導く考え方を簡潔に記せ．計算の詳細を説明する必要はない．

小問 (2) の設定に対して量子統計力学で考える．ただし，質点は同種粒子であるとし，ボース統計に従うものとする．プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とする．

(3) 次元解析を用いて，以下の 3 つの温度 T_0, T_1, T_2 を求めよ．T_0 は質点の質量 m と数密度 n によって決まる温度，T_1 は質点の質量 m と自然長 a によって決まる温度，T_2 は質点の質量 m とばね定数 k によって決まる温度である．ただし，$\hbar$ や k_B を使ってよい．

(4) 温度領域 $T \ll T_0$ で観測される顕著な現象の名称を記せ．

(5) $T_0 \ll T_1 \ll T_2$ とする．3 つの温度領域 (i) $T_0 \ll T \ll T_1$, (ii) $T_1 \ll T \ll T_2$, (iii) $T \gg T_2$ においてそれぞれ定積熱容量を書け．また，これらを導く基本的な考え方を簡潔に記せ．

(6) 一気圧常温 (300 K 程度) の 2 原子分子気体の定積熱容量はおよそ $\dfrac{5Nk_\mathrm{B}}{2}$ である．この事実と整合するためには，ばねの角振動数 $\omega = \sqrt{k/m}$ はある値 ω_c よりも十分大きくなければならない．その角振動数の値 ω_c を見積もれ．ただし，$\hbar = 10^{-34}\,\mathrm{m^2\,kg\,s^{-1}}$, $k_\mathrm{B} = 10^{-23}\,\mathrm{m^2\,kg\,s^{-2}\,K^{-1}}$ としてよい．

（このページは白紙である）

II-2 (量子力学) (100 点)

図 1 のように平面上に乗る半径 R の円 C の上に束縛された質量 m，電荷 e($e > 0$ とする) の荷電粒子の運動を量子力学的に考察する．この平面に垂直な方向に円 C の中心を貫くように細長いソレノイドが設置されており，円 C の内部を図の上向きに貫く磁束 Φ を自由にコントロールできるようになっている．ただし，磁場はソレノイドの内部のみに生じ，円 C 上では無視できるものとする．以下では，この荷電粒子の定常状態を表す波動関数を $\psi(\sigma)$ で表し，周期境界条件 $\psi(\sigma + 2\pi R) = \psi(\sigma)$ に従う一次元量子力学系として取り扱う．ここで，$\sigma = R\theta$ は C 上の座標である．なお，必要であればプランク定数を 2π で割ったものとして，$\hbar$ を用いよ．

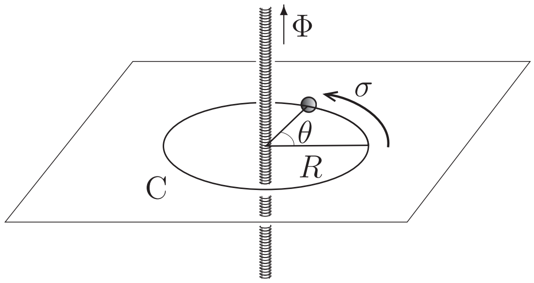

図 1

(1) $\Phi = 0$ のとき，荷電粒子の波動関数 $\psi(\sigma)$ が従うシュレディンガー方程式を，エネルギー固有値を E として書き下せ．また，取り得るすべてのエネルギー固有値と固有状態の波動関数を求めよ．

(2) $\Phi \neq 0$ のとき，ベクトルポテンシャルの σ 方向成分 A_σ の値は，C 上で一定値を取るように選ぶことができる．このときの A_σ を Φ と R を用いて表せ．

(3) A_σ が一般の値の場合のハミルトニアンは，$A_\sigma = 0$ の場合のハミルトニアンに含まれる σ 方向の運動量 p_σ を $p_\sigma - eA_\sigma$ で置き換えた形になる．このことを用いて，A_σ が C 上で一定値である場合に，取り得るエネルギー固有値を A_σ を用いて書け．

(4) 磁束 Φ がある値の整数倍のとき，エネルギースペクトルは $\Phi = 0$ の場合と同じになる．$\Phi > 0$ の範囲で，エネルギースペクトルが $\Phi = 0$ と同じになる最小の Φ の値を求めよ．以下，この値を Φ_0 とおく．

(5) 磁束 Φ を $\Phi = 0$ からゆっくりと $\Phi = \Phi_0$ へ変化させる．このとき，縦軸をエネルギー，横軸を Φ として，エネルギー固有値の変化を図示せよ．ただし，エネルギー準位は低いものから順に 3 番目までを描け．また，図中で 2 つ以上の準位のエネルギーが縮退する部分がある場合には，その部分を丸で囲んで示せ．(4 つ目のエネルギー準位が 3 つ目のエネルギー準位と縮退する点がある場合には，その点も丸で囲むこと．)

次に，この系にポテンシャル

$$V(\sigma) = \lambda \cos\left(\frac{2\sigma}{R}\right)$$

（λ は正の定数）が加わった場合に，エネルギースペクトルがどのように変化するのかを，以下のマシュー関数の性質を用いて考察する．

ν 次のマシュー関数 $\mathrm{me}_\nu(\xi, q)$ は，q を固定して ξ の関数とみなしたときにマシューの微分方程式

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\varphi(\xi) + (a - 2q\cos(2\xi))\varphi(\xi) = 0 \tag{A}$$

の解であり，

$$\mathrm{me}_\nu(\xi+\pi, q) = e^{i\nu\pi}\mathrm{me}_\nu(\xi, q)\ , \quad \mathrm{me}_\nu(\xi, 0) = e^{i\nu\xi}$$

を満たす．ここで，$\nu = \nu(a, q)$ は実定数 a, q で定まる特性指数と呼ばれる定数である．また，ν が整数でない場合には，$\mathrm{me}_\nu(\xi, q)$ と $\mathrm{me}_{-\nu}(\xi, q)$ が微分方程式 (A) の 2 つの独立解を与える．

(6) この系のシュレディンガー方程式は，$\xi = \sigma/R,\ \psi(\sigma) = e^{ik\xi}\varphi(\xi)$ と置き，定数 k を適切に選べば，マシューの微分方程式 (A) に帰着される．そのときの k, a, q を Φ, Φ_0, λ とエネルギー固有値 E のうち必要なものを用いて表せ．

(7) k, a, q が小問 (6) で求めたものであるとき，$\psi(\sigma) = e^{ik\xi}\mathrm{me}_\nu(\xi, q)$ はシュレディンガー方程式の解である．さらに，この $\psi(\sigma)$ が周期境界条件を満たすとき，ν の取り得る値を求めよ．

(8) 図２は，$0 < q \ll 1$ とみなせるある q の値を固定したときの a と ν の関係を表したグラフである．特に，$\nu = 1.0$ を与える a は，$a = 1.0$ の付近に 2 つあり，a がその間の値を取るときには ν は実数にならない．このことは $0 < q \ll 1$ のときには常に成り立つ．このグラフの形から，λ が十分小さな正の値をとるときに，小問 (5) で求めた図がどのように変わるのかを推定し，図示せよ．なお，小問 (5) と同様に，図中で 2 つ以上の準位のエネルギーが縮退する部分がある場合には，その部分を丸で囲んで示せ．

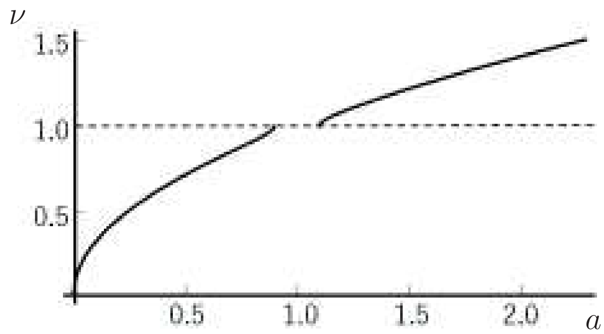

図２

II-3A (物理数学) (50 点)

1 次元区間 $[0, L]$ で定義された温度場 $T(x, t)$ が拡散方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{B}$$

に従うとし，境界条件

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 \tag{C}$$

を満たすとする．

(1) 1 次元区間 $[0, L]$ において有界で連続な任意の関数 $T(x, t)$ に対して，適切な実関数の組 $\phi_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ によって

$$T(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x)$$

と表すことができる．$T(x, t)$ が式 (B) と境界条件 (C) を満たす温度場のとき，実関数の組 $\phi_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を適切に選ぶことにより，$a_n(t)$ の従う微分方程式が a_m $(m \neq n)$ を含まないようにすることができる．そのような関数の組 $\phi_n(x)$ の具体例を書け．　また，そのときの $a_n(t)$ に対する微分方程式を解いて，$a_n(t)$ を $a_n(0)$ を用いて表せ．

(2) $T_n(t)$ を

$$T_n(t) = \int_0^L dx\, \phi_n(x) T(x, t)$$

で定義する．$a_n(0) \neq 0$ の場合，$T_n(t)/a_n(0)$ を求めよ．ただし，結果は積分を含まない表現とせよ．

(3) 時刻 $t = 0$ における温度場が

$$T(x, 0) = A \left[1 - \left(\frac{2x}{L} - 1 \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2x}{L} - 1 \right)^3 \right]$$

で与えられるとする．A は定数である．任意の t において，$\int_0^L dx\, T(x, t)$ を求めよ．

II-3B (実験) (50 点)

荷電粒子の運動量を測定する方法について考える．図 1 のように，$0 \leq y \leq L$ の領域 D に，磁束密度の大きさが B で時間的に一定かつ空間的に一様な磁場が，xy 平面に垂直に手前から奥への向きに印加されているとする．正の電荷 e を持つ粒子が $y < 0$ の領域から $y = 0$ の面に垂直に入射し，領域 D で磁場の影響を受けて運動する場合を考える．ここで，粒子は磁場以外の影響は受けないものとする．また，相対論的な効果を考慮する必要はない．

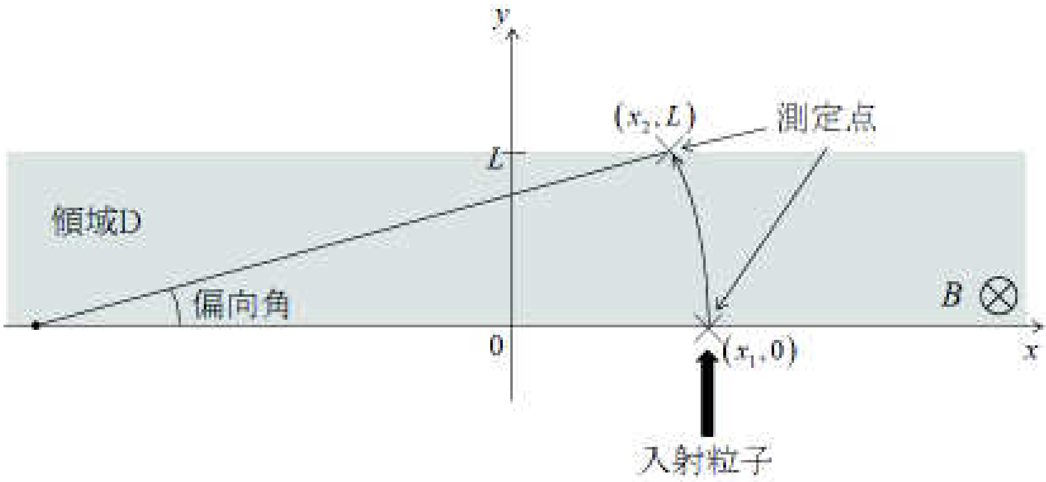

図 1

(1) 領域 D 内で入射粒子の軌跡は円の一部である円弧を描く．円の半径を ρ として，粒子の運動量の大きさを ρ を用いて表せ．

(2) $y = 0$ および $y = L$ において，粒子の x 方向の通過位置を測定したとする．$y = 0, L$ での測定値をそれぞれ x_1, x_2 として，円の半径を求めよ．ただし運動量の大きさが十分大きい場合を考えるため，図 1 に示す偏向角は十分小さいとしてよい．

(3) 小問 (2) で述べた位置の測定値から得られる粒子の運動量の大きさを p とする．測定値 x_1, x_2 の各々には，標準偏差 σ_x の独立な測定誤差があるとする．誤差伝播を考慮して，p の相対誤差 σ_p/p を求めよ．ただし，x_1, x_2 の測定値以外に誤差の起源はなく，得られた相対誤差が十分に小さい場合を考えているものとする．

平成 31 年度大学院入学試験問題　III（3 時間）

注意

(1) 問題 III–1，III–2，III–3 の解答はそれぞれ指定された解答用紙 1 枚に記入せよ．

(2) 問題 III–1 の解答には裏面を用いてもよい．

(3) 問題 III–2 は独立した 2 つの小問 III–2A，III–2B から，問題 III–3 は独立した 2 つの小問 III–3A，III–3B からなる．それぞれの小問の解答は解答用紙の指定された場所 (裏面を含む) に記入せよ．

(4) 各解答用紙は横長に使用して，表側の左上部（線より上）に受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の他の部分に受験番号，氏名を書いてはいけない．解答用紙上部の線より上の欄には表，裏とも解答を書いてはいけない．

(5) 解答用紙は 3 問（計 3 枚）すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない．

(6) 問題冊子は表紙を含めて 9 ページまである．

III-1 (力学) (100 点)

自然長 a，バネ定数 k のバネにつながれた複数の質点の運動を考察する．

最初に 3 個の質点の運動を考える．質点は，図 1 のように x 軸方向にのみ動くものとし，両端のバネの端は固定されている．また，固定端間の距離は $L=4a$ である．質点の位置を左から $a+x_1$，$2a+x_2$，$3a+x_3$ とおく．ここで，x_1，x_2，x_3 はそれぞれの質点の平衡点からの変位を表す．中央の質点の質量を M とし，その他の質点の質量は等しく m とする．以下，$\omega_0=\sqrt{2k/m}$ とする．

図 1

(1) 質量 m の 2 つの質点の位置を固定し，それぞれ $x_1=0$，$x_3=0$ とおく．中央の質点の時刻 t における変位 $x_2(t)$ を求めよ．ただし，$t=0$ における初期条件を $x_2=X$，$dx_2/dt=V$ とせよ．

以下では，小問 (1) で固定した 2 つの質点を自由に動けるようにし，質点系の連成振動の規準振動を求めよう．規準振動には 3 つのモードがあり，その規準角振動数の大きさを小さい方から順に ω_{s}，ω_{c}，ω_{l} とする．

(2) 質点の変位 $x_j(t)(j=1,2,3)$ に対する運動方程式を書け．また，$x_j(t)=A_j\cos\omega t$ とおいて，ω_{s}^2，ω_{c}^2，ω_{l}^2 を ω_0 と質量比 $\beta=m/M$ を用いて表せ．ただし，A_j は実の定数である．

(3) それぞれの規準振動に対して，$\beta=1$ の場合に A_2 と A_3 を A_1 を用いて表せ．

(4) 中央の質点の質量 M を変化させる．このとき，$\omega_{\mathrm{s}}^2/\omega_0^2$，$\omega_{\mathrm{c}}^2/\omega_0^2$，$\omega_{\mathrm{l}}^2/\omega_0^2$ の変化を図に表せ．ただし，横軸には β を用いて，$0\le\beta\le 2$ の範囲で描き，$\beta=0$ と $\beta=1$ での値が分かるようにすること．

次に，十分に多数の質点を前問と同一のバネで一直線状につなげる．これらの質点のうち 1 つの質点の質量を M とし，その他の質点の質量を m とする．簡単のため，図 2 のように質量が M である質点を 0 番とする順序を導入する．n 番目の質点に対する平衡点を $x = na$ とし，その点からの変位を x_n とする．

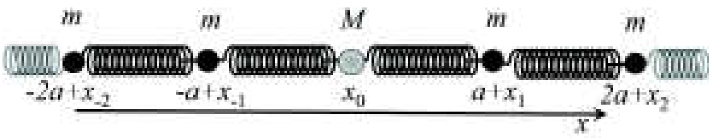

図 2

この質量 M の質点を強制的に角振動数 ω で振動させる．

(5) n 番目の質点の変位を $x_n = \mathrm{Re}[B_n e^{i\omega t}]$ とおく．ただし，$B_n = B_0 b^n$ とし，B_0 と b は複素定数である．この変位を質量 m の質点の運動方程式に代入し，b を ω と ω_0 を用いて表せ．また，$|b| \neq 1$ となる条件を求めよ．

$|b| = 1$ の場合は進行波に，$|b| < 1$ の場合は局在波となる．

質量 M の質点の運動を拘束するのをやめて，他の質点と同様に自由に運動させる．$M < m$ の場合に空間的に局在した規準振動が存在する．以下，この規準振動を求めよう．ただし，小問 (5) と同様に n 番目の質点の変位は $x_n = \mathrm{Re}[B_n e^{i\omega t}]$ とおく．

(6) 質量 M の質点に対して，その両側に続く質点の変位 x_n が $|n|$ を大きくするとそれぞれ減衰するように，小問 (5) で得た b の値から適切なものを選ぶ．質量 M の質点の両隣にある質点の変位 x_{-1} と x_{+1} を，選んだ b と x_0 を用いて表せ．
ここで得た変位を質量 M の質点の運動方程式に代入し，さらに b を消去することで，規準角振動数 ω を求めよ．ただし，ω_0 と質量比 $\beta = m/M$ を用いて ω を表せ．また，$m \to \infty$ の極限における ω の漸近値を求めよ．

小問 (6) で求めた規準振動は，質量 M の質点の振幅が最大で，裾が指数関数的に減衰振動する局在した定在波である．

III-2A (電磁気学) (50 点)

真空の誘電率を ε_0 として以下の問いに答えよ．なお，解答にはSI単位系を用いよ．

(1) 総電荷が e に等しく，内部が一様に帯電した半径 a の球があるとする．球の中心を原点として，原点からの距離 r を用いて，この球がつくる電場を表せ．

(2) 小問 (1) の球がもつ静電エネルギー U_0 を求めよ．

π 中間子には，中性のものと，素電荷 e を持つものがあり，荷電 π 中間子は中性 π 中間子よりわずかにエネルギーが高い (すなわち，質量がわずかに大きい)．このエネルギー差を静電エネルギーの差で説明できるとする．ここで，以下の 2 つのモデルを比較する．

モデル I： π 中間子は半径 a の球である．荷電 π 中間子は内部が一様に帯電しているのに対し，中性 π 中間子はまったく帯電していない．

モデル II: π 中間子は，いずれも同じ距離 b 離れた 2 つの点電荷の対からなる．荷電 π 中間子は電荷 $\frac{1}{3}e$ と $\frac{2}{3}e$ を持つ点電荷対からなる．一方，中性 π 中間子は，電荷 $\frac{1}{3}e$ と $-\frac{1}{3}e$ を持つ点電荷対からなる状態 A と，電荷 $\frac{2}{3}e$ と $-\frac{2}{3}e$ を持つ点電荷対からなる状態 B の重ね合わせで表される．中性 π 中間子の静電エネルギーは，各状態 A, B の静電エネルギーの相加平均で与えられる．なお，仮想的に b を無限大とした場合，荷電および中性 π 中間子の静電エネルギーに差はないものとする．

(3) 荷電 π 中間子と中性 π 中間子の静電エネルギーの差がモデル I とモデル II で等しいとしたとき，比 a/b の値を求めよ．

III-2B (統計力学) (50点)

N 個の要素が直線状に連なった鎖状分子がある．各要素 i はそれぞれ独立に $\sigma_i = +1$ または -1 のいずれかの状態を取ることができ，長さ $l + \sigma_i a$，エネルギー $\epsilon + \sigma_i \Delta$ をもつものとする．ただし，l, a, ϵ, Δ は定数である．この鎖状分子を一定の外力 f で引っ張るときの全系のエネルギーは

$$E(\{\sigma_i\}) = \sum_{i=1}^{N} (\epsilon + \sigma_i \Delta) - fL \tag{A}$$

で与えられる．ただし，

$$L = \sum_{i=1}^{N} (l + \sigma_i a)$$

は鎖状分子全体の長さである．以下の設問において，$\overline{A}$ は物理量 A の温度 T のカノニカル分布での期待値を表す．ボルツマン定数は k_{B} とする．

(1) 温度 T におけるカノニカル分布で $\sigma_i = 1$ である確率を求めよ．

(2) σ_i の期待値 $\overline{\sigma_i}$ とゆらぎの大きさ $\overline{(\sigma_i - \overline{\sigma_i})^2}$ を計算せよ．

(3) 温度一定で外力を f から $f + \delta f$ に変化させると，分子の長さの期待値は $\overline{L}$ から $\overline{L} + \delta\overline{L}$ に変化した．このとき，δf が小さければ，近似的に

$$\delta\overline{L} \simeq k\delta f \tag{B}$$

と表される．この係数 k を求めよ．

(4) 式 (A) を一般化して，全系のエネルギーが

$$E(\{\sigma_i\}) = E_0(\{\sigma_i\}) - fL$$

の形に与えられるとき，式 (B) で定義される k を分子の長さのゆらぎ $\overline{\left(L - \overline{L}\right)^2}$ を用いて表せ．なお，$E_0(\{\sigma_i\})$ は f に依存しないものとする．

III-3A (英語) (60 点)

The excerpt below has been adapted from David Lee's 1996 Nobel Prize in Physics lecture. Read the passage carefully and answer questions **[Q-a]**-**[Q-j]** below in clear, easy-to-read English or symbols where appropriate. The questions can be answered without advanced physics knowledge.

The major breakthrough in our understanding [redacted] (a) the revolution a superconductivity in field of vast [redacted] (b) congregate [redacted]

[redacted] (c) macroscopic [redacted] (d1) BCS theory [redacted] (d2) metal [redacted] (d3) electrons [redacted] (d4) metal [redacted] (d5) pairs. [redacted] (d6) single ground state [redacted] (d7) order parameter [redacted] (d8) Pauli principle [redacted] (e) discrete diatomic molecules. [redacted] (f) marching in lock step, [redacted] (g).

Why do electrons form pairs? (h) [redacted] even a (i) one. [redacted] (j).

Answer the following questions concerning the passage above.

[Q-a] The underlined words after (a) have been scrambled. Put them in the correct order. Change the capitalization and include punctuation as necessary.

[Q-b] Which of the following best describes the meaning of the underlined text after (b) in this sentence? Write one of b1, b2, b3, or b4 in the answer space.

b1) distribute | b2) congress
b3) accumulate | b4) concrete

[Q-c] Which of the following words or phrases can replace the underlined text after (c) without changing the meaning of the sentence? Write one of c1, c2, c3, or c4 in the answer space.

c1) slow | c2) frequent
c3) limited | c4) large scale

[Q-d] Fill in the correct article ("the", "an", or "a") in the underlined spaces (d1)-(d8) in the sentences. Capitalize your answers as necessary and if no article is needed write "ϕ" in the answer space.

[Q-e] Which of the following best describes the meaning of the underlined text after (e)? Write one of e1, e2, e3, or e4 in the answer space.

e1) two atoms | e2) individual pairs of atoms
e3) single correlated atoms | e4) pairs of two molecules

[Q-f] Which of the following best describes the meaning of the underlined text after (f)? Write one of f1, f2, f3, or f4 in the answer space.

f1) move together | f2) move in discrete steps
f3) flow in lines | f4) flow freely

[Q-g] Using several sentences and your own expressions explain why the analogy in the section of the text ending with (g) is suitable to describe the behavior of Cooper pairs.

[Q-h] Based on the passage after (h), explain why it is surprising that electrons form pairs using around 20 or 30 words.

[Q-i] Complete the sentence by providing an appropriate word to fill in the space marked by (i).

[Q-j] Complete the sentence by providing an appropriate phrase to fill in the space marked by (j).

III-3B (英語) (40 点)

Read the passage carefully and answer questions [**Q-1**]-[**Q-6**] below. The questions can be answered without advanced physics knowledge.

Operational amplifiers, often called op-amps, are active linear circuit elements with a variety of applications in experimental physics. Real op-amps have a large internal input resistance, R_{int}, and a single output voltage, V_{o}. The output is the product of a large number, which is called the gain G, and the voltage difference between its two inputs, V_+ and V_-. An example circuit diagram showing an op-amp's internal structure is shown in Figure 1.

The behavior of an ideal op-amp can be summarized with the following two golden rules. First, no current flows into its inputs. Second, when connected in a feedback loop, such as the one connecting C_{d} and the terminal producing V_{o} in Figure 2, the op-amp will produce whatever output reduces the voltage difference between its input terminals to zero.

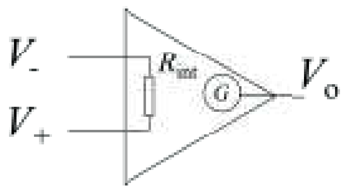

Figure 1. Op-amp circuit diagram.

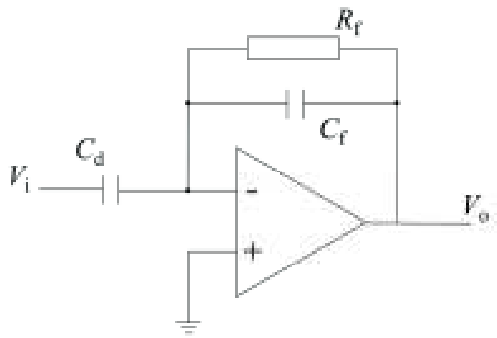

Figure 2. Charge sensitive amplifier.

The circuit in Figure 2 is an example of a charge sensitive amplifier. Such amplifiers are used to amplify the signal from a particle detector. Charge collected in the detector accumulates in the op-amp's feedback capacitor, C_{f}, inducing a voltage which in turn causes the op-amp's output voltage, V_{o}, to increase sharply. Its amplitude will be proportional to the integrated charge deposited in the detector provided the circuit's time constant, $R_{\mathrm{f}}C_{\mathrm{f}}$, is sufficiently longer than the duration of the input pulse. The output will decay exponentially, eventually returning to its nominal value if the amplifier receives no other input.

Answer the following questions concerning the passage above.

[Q-1] Write an expression for the output voltage V_o of the op-amp in Figure 1 in terms of its input voltages, V_+ and V_-, and gain G.

[Q-2] Write an appropriate value for an ideal op-amp's internal input resistance, R_{int}.

[Q-3] Op-amps are powered externally via two additional source inputs, V_{s+} and V_{s-}, which are drawn as vertical lines connected to opposite sides of the op-amp symbol between its input and output ends. Draw an example of an op-amp symbol showing all of its inputs and outputs but without its internal structure. The positive source, V_{s+}, should appear on the bottom of the op-amp symbol.

[Q-4] Make a rough sketch of the output voltage as a function of time for a charge sensitive amplifier that has received an input signal that is much shorter than its time constant.

[Q-5] As in **[Q-4]** make a rough sketch of the output for two short input signals with the same integrated charge but separated by a time interval about as long as the time constant of the amplifier.

[Q-6] A voltage sensitive amplifier can be made by replacing the coupling capacitor, C_d, and feedback system in Figure 2 with two resistors, R_A and R_B, respectively. Draw an example of such an amplifier.