# 平成30年度大学院入学試験問題　II（3時間）

注意

(1) 問題II–1，II–2の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ．裏面を用いてもよい．

(2) 問題II–3は独立した2つの小問，II–3A，II–3Bからなる．解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ．裏面を用いてもよい．

(3) 各解答用紙は横長に使用して，表側の左上部（線より上）に問題番号，受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の他の部分に受験番号，氏名を書いてはいけない．この線より上の欄には表，裏とも解答を書いてはいけない．

(4) 解答用紙は3問（計4枚）すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない．

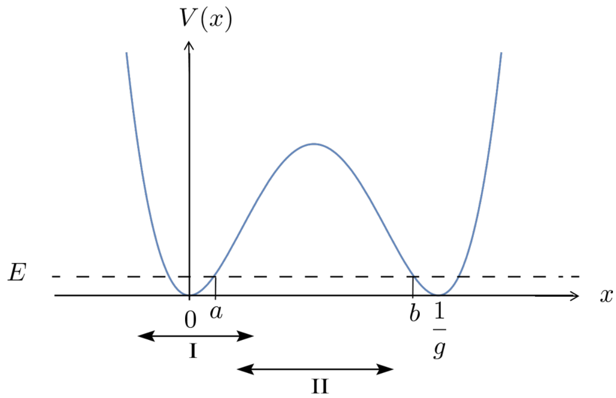
(5) 問題冊子は表紙を含めて7ページまである．

## **II-1** (量子力学) (100 点)

次の形のハミルトニアン $H$ で与えられる 1 次元ポテンシャル問題を考える:

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + V(x)\,, \quad V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2(1-gx)^2\,. \tag{A}$$

ここで，$x$ は位置を表す座標，$p$ は $x$ に共役な運動量，$m$ は質量，$g$ は非負の実数とする．$g = 0$ のとき，系は $x = 0$ の周りで角振動数 $\omega$ で振動する調和振動子となり，基底エネルギー $E$ は，$E = \hbar\omega/2$ となる．ただし，$\hbar$ はプランク定数を $2\pi$ で割ったものである．一方，$g \neq 0$ の場合には，$V(x)$ は図に示す 2 重井戸ポテンシャルとなり，基底エネルギーは，トンネル効果による非摂動論的補正により，$E = \hbar\omega(\nu + 1/2)$ と変更される．以下では $g \neq 0$ とし，$\nu$ を求める．ここで，基底エネルギーは 2 重井戸ポテンシャルの障壁の高さより十分小さいとし，その $g$ に対する摂動論的補正は考えないこととする．




図

(1) 図の $|x| \ll 1/g$ が成り立つ領域 I では，$V(x)$ は放物線 $V_0(x) = m\omega^2x^2/2$ で近似できる．$E = \hbar\omega(\nu + 1/2)$ として，領域 I におけるシュレディンガー方程式 $H\psi(x) = E\psi(x)$ の解を求めよ．ここで，$\nu$ が整数でないとき，解はエルミート多項式では書けないことに注意して，解を求める際には，以下の性質をもつ特殊関数 $D_\lambda(z)$ を用いよ．$D_\lambda(z)$ は以下の微分方程式

$$\frac{d^2D_\lambda(z)}{dz^2} + \left(\lambda + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right)D_\lambda(z) = 0 \tag{B}$$

を満たし，$\lambda$ が非負の整数でなく，$z \gg 1$ の場合には

$$\begin{aligned} D_\lambda(z) &\approx z^\lambda e^{-z^2/4}, \\ D_\lambda(-z) &\approx (-z)^\lambda e^{-z^2/4} + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\lambda)}e^{z^2/4}z^{-\lambda-1} \end{aligned} \tag{C}$$

の漸近形をもつ．ただし，$\Gamma(z)$ はガンマ関数である．ここで，解は $x \to -\infty$ でゼロに収束するとし，規格化定数が必要な場合は $A$ とおくこと．

図のトンネル障壁内の領域 II における基底状態の波動関数は WKB 近似で求めることができ，$k(x)=\sqrt{2m(V(x)-E)}$ として，

$$\psi(x) \approx \frac{C_1}{\sqrt{k(x)}}\exp\left(\frac{1}{\hbar}\int_a^x dyk(y)\right)+\frac{C_2}{\sqrt{k(x)}}\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_a^x dyk(y)\right) \qquad \text{(D)}$$

の形で与えられる．ここで，$a$ は図に示す $V(a)=E$ を満たす点であり，$b=g^{-1}-a$ として，基底状態が $\psi(x)=\psi(g^{-1}-x)$ を満たすことから，$C_1/C_2$ は

$$\frac{C_1}{C_2}=\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_a^b dyk(y)\right) \qquad \text{(E)}$$

となる．基底エネルギーがトンネル障壁の高さより十分小さいとき，$a \ll 1/g$ が成り立つことに注意して，以下の問に答えよ．

(2) $x$ が領域 II にあり，$a \ll x \ll (a^2/g)^{1/3}$ を満たすとき，式 (D) の $\psi(x)$ は

$$\psi(x) \approx B_1 x^{\gamma_1}\exp\left(\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)+B_2 x^{\gamma_2}\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) \qquad \text{(F)}$$

の漸近形をもつ．$B_i$ および $\gamma_i$ を $C_i$ $(i=1,2)$ および $E$ を用いて表せ．ここで，$a \ll x \ll (a^2/g)^{1/3}$ のときに成り立つ近似式

$$\int_a^x dyk(y) \approx \int_a^x dy\left(m\omega y-\frac{E}{\omega y}\right) \qquad \text{(G)}$$

および $a \approx \sqrt{2E/(m\omega^2)}$ を使ってもよい．

(3) 領域 I と領域 II は $a \ll x \ll (a^2/g)^{1/3}$ において重なりをもつ．重なり合った領域で，小問 (1) で求めた領域 I の解の漸近形と小問 (2) で求めた領域 II の漸近形を比較して，$C_1/C_2$ を $\nu$ の関数として表せ．

(4) 小問 (3) の解に式 (E) の $C_1/C_2$ を代入すると，$\nu$ の満たす式が得られる．基底エネルギーがトンネル障壁の高さより十分小さいとき，$\nu$ はゼロに近くなる．このとき $g^2\hbar/(m\omega) \ll 1$ となることに注意し，$\nu$ を求めよ．ここで，$\nu$ がゼロに近いとき，$\Gamma(-\nu) \approx -1/\nu$ が成り立ち，また $g^2\hbar/(m\omega)$ が十分小さいとき

$$\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_a^b dyk(y)\right) \approx \exp\left(-\frac{m\omega}{6g^2\hbar}\right)\exp\left(\frac{2E}{\hbar\omega}\right)\left(\frac{g^2\hbar}{m\omega}\right)^{-\frac{E}{\hbar\omega}}\left(\frac{2E}{\hbar\omega}\right)^{-\frac{E}{\hbar\omega}} \qquad \text{(H)}$$

と近似できることを使ってよい．

## II-2 (統計力学) (100 点)

一次元イジング模型は以下のハミルトニアンによって記述される:

$$\mathcal{H} = -J\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1} - H\sum_{i=1}^{N}\sigma_i. \tag{A}$$

ここで $J$ は交換相互作用の結合定数であり，$H$ は磁場である．$\sigma_i$ は $i$ 番目のサイトにおけるスピンの状態を表すスピン変数であり，$\sigma_i = \pm 1$ のいずれかの値をとる．分配関数は全てのスピン変数について和をとることにより

$$Z = \sum_{\{\sigma_i=\pm1\}_{i=1}^{N}} \exp(-\beta\,\mathcal{H}) \tag{B}$$

と表される．ただし，$\sum_{\{\sigma_i=\pm1\}_{i=1}^{N}}$ は各サイトにおけるスピン変数 $\sigma_i$ $(1 \le i \le N)$ について和をとることを意味する．また，ボルツマン定数を $k_{\mathrm{B}}$ とし，$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ とする．以下では $J > 0$ を考え，温度 $T$ および $H \ge 0$ を変化させるとする．

分配関数を求める際に一部のスピン変数についての和を先に計算し，その影響をパラメータの変化で表現することで，相転移の臨界的な振る舞いを知ることができる．ここでは一次元イジング模型に対してこの方法を適用する．以下では $j = \beta J$, $h = \beta H$ とし，無次元化したハミルトニアン $\tilde{\mathcal{H}}_N(j,h) = \beta\mathcal{H}$ を考える:

$$\tilde{\mathcal{H}}_N(j,h) = -j\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\,\sigma_{i+1} - \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i + \sigma_{i+1}). \tag{C}$$

(1) まず簡単のため，3 つのスピンからなる系を考える．3 つのスピン変数のうち $\sigma_2$ についてのみ和をとることにより

$$\sum_{\sigma_2=\pm1}\exp\left\{j(\sigma_1\,\sigma_2+\sigma_2\,\sigma_3)+\frac{h}{2}(\sigma_1+2\sigma_2+\sigma_3)\right\} = A\exp\left\{j'(\sigma_1\,\sigma_3)+\frac{h'}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right\} \tag{D}$$

という等式が得られる．この等式に $(\sigma_1,\sigma_3) = (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$ をそれぞれ代入し，$e^{4j'}$, $e^{4h'}$ を $j$, $h$ の関数で表せ．この問題において，$A$ は求めなくてよい．

(2) 前問の結果を用いて，$x' \equiv e^{-4j'}$, $y' \equiv e^{-2h'}$ を $x \equiv e^{-4j}$, $y \equiv e^{-2h}$ によって表せ．

次に周期境界条件 $\sigma_{i+N} = \sigma_i$ を課す．$N = 2^n$ とし，整数 $n$ は十分に大きいものとする．分配関数 $Z_N = \sum_{\{\sigma_i=\pm1\}_{i=1}^{N}}\exp\left[-\tilde{\mathcal{H}}_N(j,h)\right]$ において偶数番号のサイトのスピン変数についてのみ和をとることによって，

$$Z_N = A^{N/2}\cdot Z'_{\frac{N}{2}} = A^{N/2}\sum_{\{\sigma_k=\pm1\}_{k=1}^{N/2}}\exp\left[-\tilde{\mathcal{H}}_{\frac{N}{2}}(j',h')\right] \tag{E}$$

と書ける．この操作により一次元イジング模型のパラメータ $j$, $h$ が $j'$, $h'$ に変化したとみなすことができる．

(3) この操作によってパラメータが変化しない点を固定点と呼ぶ．また，相転移が起こる臨界点は固定点であると考えられる．ここでは $j$, $h$ の代わりに $x$, $y$ をパラメータとし，一次元イジング模型における固定点を求めよう．固定点の一つは $(x, y) = (0, 1)$ であり，物理的には磁場をゼロにしてから低温極限を取った状態に対応する．その他の固定点を求め，それぞれの固定点に対応する温度を述べよ．

(4) $(x, y) = (0, 1)$ の固定点近傍におけるパラメータの変化について考えよう．パラメータ $(x, y)$ が

(a) $x = \epsilon$, $y = 1$

(b) $x = 0$, $y = 1 - \epsilon$

で与えられるそれぞれの場合に，この操作によりパラメータ $(x, y)$ が固定点から離れていくか，あるいは近づいていくか，それぞれ述べよ．ただし，$0 < \epsilon \ll 1$ とする．

## II-3A (力学) (50 点)

重力ポテンシャルの下での質点の運動について考える．質点の質量を $m$，万有引力定数を $G$，重力中心の質量を $M$ として以下の問いに答えよ．ただし，重力中心は十分重く動かないとする．また，重力ポテンシャルは無限遠点で 0 とする．

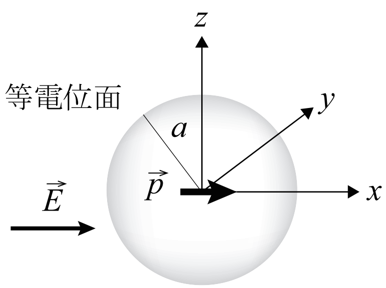
(1) ポテンシャル中心から質点までの位置ベクトルを $\vec{r}$，その大きさを $r(=|\vec{r}|)$ として系のラグランジアンを書け．

(2) 速度の絶対値の二乗 $\left|\dot{\vec{r}}\right|^2$ を二次元の極座標で表せ．また，小問 (1) のラグランジアンから質点の運動方程式を導き，角運動量の大きさ $\ell$ が保存することを示せ．

(3) 系のエネルギー $E$ と角運動量の大きさ $\ell$ は保存量であるのでこれを定数とみなし，動径方向の運動エネルギー $m\dot{r}^2/2$ を $r$ の関数として表せ．運動方程式が解を持つのは $m\dot{r}^2/2 \geq 0$ の場合であるが，このうち特に質点がポテンシャルに拘束されて楕円軌道を描く場合，長軸および短軸の両端では動径方向の運動エネルギー $m\dot{r}^2/2$ がゼロになることに注意して，楕円軌道を描くための系のエネルギー範囲を求めよ．ただし $\ell$ は与えられているものとせよ．

## II-3B (電磁気学) (50 点)

図のような直角座標系において，$x$ 軸に平行な一様な外部電場 $\vec{E}$ の中に新たに電気双極子モーメント $\vec{p}$ を原点に置くことを考える．なお，双極子は外部電場と同じ向きに配置したとする．以下では真空中で考え，その誘電率を $\varepsilon_0$ とする．解答は SI 単位系を用いて答えよ．




図

(1) 図に示すように，双極子まわりには球状の等電位面がある．その球面の半径 $a$ を $p = |\vec{p}|$ および $E = |\vec{E}|$ を用いて求めよ．

(2) さらに帯電していない半径 $a$ の導体球殻を置くことを考える．球殻の厚みは十分に薄いものとし，球殻の中心は双極子の位置と同じとする．そのとき，導体球殻の外側表面に誘起される電荷密度 $\sigma(\theta)$ を求めよ（$\theta$ は $x$ 軸からの角度）．