平成 30 年度大学院入学試験問題　I（3 時間）

注意

(1) 問題 I–1，I–2 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ．裏面を用いてもよい．

(2) 問題 I–3 は独立した 2 つの小問，I–3A，I–3B からなる．解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ．裏面を用いてもよい．

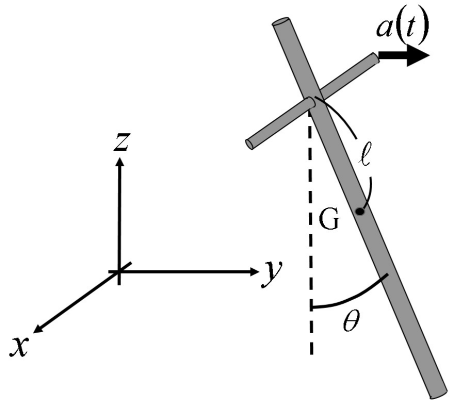
(3) 各解答用紙は横長に使用して，表側の左上部（線より上）に問題番号，受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の他の部分に受験番号，氏名を書いてはいけない．この線より上の欄には表，裏とも解答を書いてはいけない．

(4) 解答用紙は 3 問（計 4 枚）すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない．

(5) 問題冊子は表紙を含めて 7 ページまである．

I-1 (力学) (100 点)

図のように，質量 M の棒が，その重心 G から距離 ℓ の位置で，x 軸に平行な回転軸に垂直に取りつけられている．棒の回転軸まわりの慣性モーメントは I で，棒は回転軸のまわりに yz 平面内を滑らかに回転するものとする．z 軸は鉛直方向を向き，z の値が減少する方向に重力加速度 g で重力がはたらいているものとする．図に示したように，鉛直下向きから測った棒の傾きの角度を θ とする．



図

(1) 回転軸の位置が不動であるとして，棒にはたらく回転軸まわりのトルクを θ の関数として求めよ．

(2) 前問と同様，回転軸の位置が不動であるとして，θ の微小振動を考える．微小振動の角振動数 ω_0 を求めよ．

以下では，回転軸の位置が y 方向に加速度 $a(t)$ で運動する場合を考える．

(3) このとき，θ の運動を表す運動方程式を書き下せ．
［ヒント］ θ は回転軸の運動とともに並進する非慣性座標系における角度座標であることに注意せよ．

以下の問には，M, ℓ, g, I を<u>用いず</u>に，小問 (2) で定義した ω_0 を<u>用いて</u>答えよ．

(4) 回転軸の運動の加速度が

$$a(t) = \epsilon g \sin(\Omega t) \tag{A}$$

となるように，y 方向に振動させる．θ の振幅が小さいとして，θ に関して線形化し，$\Omega \neq \omega_0$ の場合に，角振動数 Ω で周期振動する θ の特解を求めよ．

(5) 小問 (4) において，$\epsilon \ll 1$ であっても，Ω が ω_0 に十分近い場合，線形近似が破綻する．その場合についても適用できる近似解を得るために，振動の非線形性を取り入れることを考える．運動方程式において θ の 3 次の非線形項までを取り入れる近似をする．ただし，ϵ が乗じられた項に関しては θ の高次の補正をすべて無視するものとする．このとき，θ_1，および，θ_3 を定数として，近似解が

$$\theta = \theta_1 \sin(\Omega t) + \theta_3 \sin(3\Omega t) \tag{B}$$

という高次の高調波を無視する形で与えられるとして，θ_1 を決定する代数方程式を導け．ただし，$|\theta_3|$ は，たかだか，$O(|\theta_1|^3)$ であると仮定してよいものとする．

（このページは白紙である）

I-2 (電磁気学) (100 点)

図に示すように，$z = 0$ に水平 (xy 平面内) に置かれた半径 a の円形回路 C に時間変化する電流 $I(t)$ を流す (ここで，z 軸を中心軸とする円柱座標系の $+\phi$ 方向を正の向きとする)．また，$z = z_0$ ($z_0 > 0$) に円形回路と同じ半径 a の金属で作られた円環を水平に置く．円環の中心は z 軸に一致している．ただし，重力加速度は $-z$ 方向に g で与えられるものとする．なお，解答は SI 単位系で述べよ．

(1) 円形回路 C の磁気双極子モーメント $\vec{\mu}$ を，μ_0，a，I を用いて表せ．ただし，μ_0 は真空中での透磁率である．

(2) この円電流により発生する，位置 $\vec{r}$ でのベクトルポテンシャル $\vec{A}(\vec{r})$ は，磁気双極子モーメント $\vec{\mu}$ を用いて

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\vec{\mu}\times\vec{r}}{r^3}\right) \tag{A}$$

と書ける．$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$ を計算することで得られる磁束密度 $\vec{B}(\vec{r})$ を，磁気双極子モーメント $\vec{\mu}$ を用いて表せ．ここで，

$$\nabla \times \left(f\vec{A}\right) = f\left(\nabla \times \vec{A}\right) - \vec{A} \times (\nabla f)\ , \tag{B}$$

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) \tag{C}$$

（$\vec{A}$，$\vec{B}$，$\vec{C}$ はベクトル，f はスカラー）等を用いても良い．

以降の小問では，$z_0 \gg a$ であるとし，$\rho^2 + z_0^2 \approx z_0^2$ (ただし，ρ は z 軸からの距離であり，$0 \le \rho \le a$) のように主要項のみを残す近似をして良い．

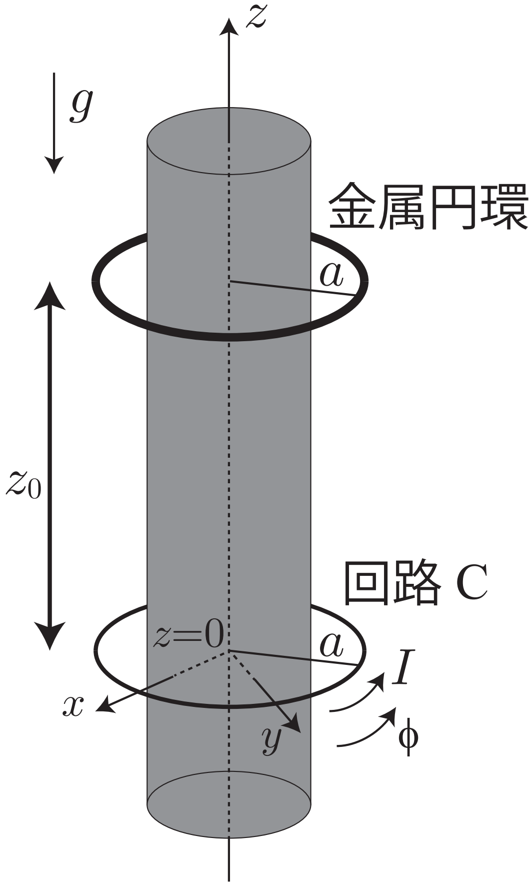
(3) 円環の抵抗を R とする時，円環に流れる電流 I^{ring} を求めよ．また，$dI/dt > 0$ の時の I^{ring} の向きを答えよ．ただし，円環は固定されているとし，電流 I^{ring} による誘導磁場は考慮しない．

以下では円環の運動に着目する．円環は z 方向のみに滑らかに動くものとする．

(4) 円環の質量を m，z 方向の速度を v_z として，この円環の重心の運動方程式を示せ．ただし，a，I，R，g を含む形で表せ．また，円環が動くことに伴う誘導電流は無視できるほど小さいとする．

(5) 円形回路 C に流れる電流を $dI^2/dt = C_0$ (C_0 は正の定数) となるように時間変化させると，円環にかかる力と重力がつり合った．この時の高さ z_0 を求めよ．

(6) $t=0$ で，小問 (5) で求めたつり合いの位置 $z=z_0$ で円環が静止していたとする．この時に，極めて短時間で不連続に回路 C における電流を $dI^2/dt = C_0 + C_1\delta(t)$ ($\delta(t)$ はデルタ関数，C_1 は正の定数) のように変化させる．この直後 ($t=t_1$，ただし，t_1 は十分小さい) の円環の速度 $v_z(t=t_1)$ を求めよ．



図

I-3A (物理数学) (50 点)

たかだか有限個の不連続点を持つ絶対積分可能な関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $\widetilde{f}(k)$ は

$$\widetilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx} \tag{A}$$

で与えられる．一方，フーリエ逆変換は

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{f}(k)\, e^{+ikx} \tag{B}$$

で与えられる．以下の問いに答えよ．

(1) 以下の積分を $\widetilde{f}(k)$ を用いた一重積分の形で求めよ

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)|^2. \tag{C}$$

［ヒント］以下に示すフーリエ変換を用いたデルタ関数の表示を用いてもよい

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx}. \tag{D}$$

(2) T を正の実数として，以下のように定義される関数

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq T) \\ 0 & (|x| > T) \end{cases} \tag{E}$$

をフーリエ変換せよ．

(3) 以下の積分を求めよ

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \frac{\sin^2 k}{k^2}. \tag{F}$$

［ヒント］前問の結果を用いて求めることもできる．

I-3B (統計熱力学) (50 点)

三次元空間で，化学ポテンシャル 0 のボース・アインシュタイン分布をしている光子気体を考える．高温では，純粋な光子気体から電子陽電子対の生成

$$\gamma \rightleftarrows e^+ + e^- \tag{A}$$

が可能になる．これらが温度 T の熱平衡状態にある理想気体とみなせるとして以下の問に答えよ．ただし，電子の運動量の大きさを p，電子の質量を m，光速を c，ボルツマン定数を k_B，プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とせよ．また，電子のエネルギーは $c\sqrt{p^2+m^2c^2}$ で与えられる．

(1) 温度 T，化学ポテンシャル μ_- を持つ自由電子の数密度は，

$$n_- = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{\boxed{\quad ア \quad}} \tag{B}$$

と書ける．$\boxed{ア}$ に入る表式を運動量の大きさ p の関数で表せ．

(2) 上記の熱平衡状態にある電子および陽電子気体のそれぞれの化学ポテンシャルを求めよ．

ここで，温度が十分高く，$k_\mathrm{B}T \gg mc^2$ を満たすとして，以下の問に答えよ．

(3) 上記の熱平衡状態にある電子の数密度が温度 T の何乗に比例するかを答えよ．

(4) 上記の熱平衡状態にある気体の全エネルギー密度を求めよ．ここで，$\int_0^\infty x^3(e^x+1)^{-1}dx = 7\pi^4/120$，$\int_0^\infty x^3(e^x-1)^{-1}dx = \pi^4/15$ を用いてよい．