

平成 29 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

注意

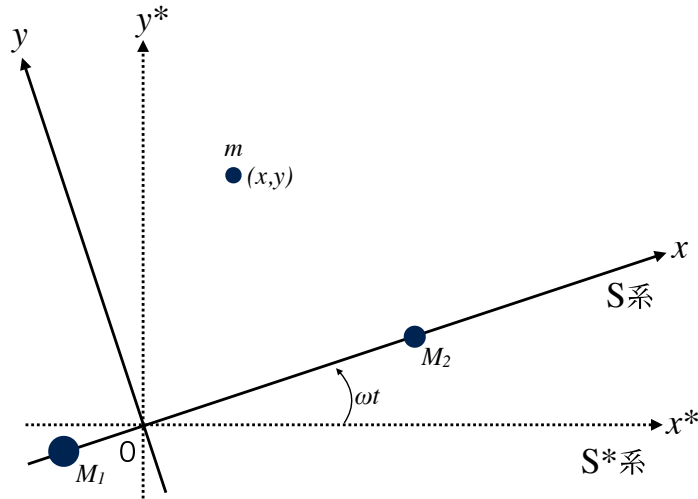
- (1) この問題冊子は，問題 I-1，I-2，I-3 の 3 問からなり，表紙を含めて 7 ページまでである．
- (2) 各問の解答はそれぞれ，所定の解答用紙に記入せよ．各解答用紙の上部の欄に受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の表，裏とも上部の横線より上に解答を書いてはいけない．
- (3) 問題 I-1，I-2 については，解答用紙の裏面を用いてもよい．
- (4) 問題 I-3 は独立した 3 つの小問 A，B，C からなる．それぞれの解答を解答用紙の表と裏の指定された欄に書け．
- (5) 解答用紙は 3 問すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない．

I-1 (力学) (100 点)

質量がそれぞれ M_1 と M_2 である天体 1 と天体 2 が，共通重心の周りを円運動している．簡単のため，以下では運動は x - y 平面のみとする．天体 1 と天体 2 の距離を a とすると，これら 2 天体は重心を原点とする x^* - y^* 平面上にある慣性系 (S^* 系) において，回転角速度 $\omega = \sqrt{G(M_1 + M_2)/a^3}$ で原点のまわりを回る．一方で， x - y 平面上でこれら 2 天体を x 軸上に常に保ちながら角速度 ω で回転する回転座標系 (S 系) を仮定すると， S^* 系における成分 (x^*, y^*) は S 系での成分 (x, y) を用いて以下のように書ける．

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{A})$$

また， $\mu_1 \equiv M_1/(M_1 + M_2)$ および $\mu_2 \equiv M_2/(M_1 + M_2)$ を用いると， S 系における天体 1 と天体 2 の座標はそれぞれ $(-\mu_2 a, 0)$ ， $(\mu_1 a, 0)$ と書ける．



- (1) 質量 M_1, M_2 に対して質量 m が無視できるほど小さい天体 3 を考える． S 系からみたときの天体 3 に対するラグランジアンを書け．式を見やすくするために $r_1 \equiv \sqrt{(x + \mu_2 a)^2 + y^2}$ および $r_2 \equiv \sqrt{(x - \mu_1 a)^2 + y^2}$ を用いてもよい (以下同様) ．
- (2) 天体 3 の S 系における運動方程式を x, y 成分それぞれについて書き下せ．
- (3) S 系からみて，天体 3 の加速度と速度がともに 0 になる平衡点 (ラグランジュ点) が 5 つ存在することが知られている．そのうち， x 軸上に無い点が 2 つあり， $y > 0$ のものを L_4 点， $y < 0$ のものを L_5 点と呼ぶ．それらの座標を求めよ．

- (4) これより平衡点における天体3の線形安定性を考える．平衡点 (x_e, y_e) からの微小変位を ξ, η とすると，微小変位についての運動方程式は2次の項を無視して

$$\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} + a\xi + b\eta = 0 \quad (\text{B})$$

$$\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} + b\xi + c\eta = 0 \quad (\text{C})$$

と書ける．ただし a, b, c は適当な定数である．解の形を $\xi = Ae^{\lambda t}$, $\eta = Be^{\lambda t}$ とおいたとき， $A = B = 0$ 以外の解が存在するための条件を示せ．

- (5) L_4 点において

$$a = -\frac{3}{4}\omega^2, \quad b = -\frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu_1)\omega^2, \quad c = -\frac{9}{4}\omega^2 \quad (\text{D})$$

である．天体3の L_4 点周りの微小運動が不安定とならないための条件を示せ．

- (6) 微小変位についての運動方程式 (B), (C) を仮に

$$\ddot{\xi} + a\xi + b\eta = 0 \quad (\text{E})$$

$$\ddot{\eta} + b\xi + c\eta = 0 \quad (\text{F})$$

に変更すると（ただし a, b, c の値は式 (D) のままとする），平衡点周り微小運動は常に不安定となることを示せ．

- (7) L_4 点における重力ポテンシャルは上に凸となっており，重力のみが働く場合には L_4 点周りの微小運動は常に不安定である．問 (5) で L_4 点が不安定とならない場合があった理由を簡潔に述べよ．

I-2 (量子力学) (100 点)

引力ポテンシャル $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ を及ぼしあった質量 m の 2 粒子からなる量子系の束縛状態を考える. $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ は 2 粒子の座標である. 重心座標 $\mathbf{r}_G = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ と 相対座標 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \equiv (x, y)$ とに分けて考え, 以下, 重心は止まっているものとし, $|\mathbf{r}| = r$ と書く.

先ず, 2 次元で, ポテンシャルが円筒対称な場合

$$V(r) = \begin{cases} 0 & (r > a), \\ -V_0 & (r < a), \end{cases} \quad (\text{A})$$

($V_0 > 0$) を考える.

(1) 2 次元ラプラシアン ∇^2 を円筒座標 (r, θ) で表わせ. ただし, 結果のみでも良い. また, $x = r \cos\theta, y = r \sin\theta$ である.

(2) 定常状態の波動関数 ψ を, 角運動量の z 成分 L_z の固有値 $\hbar n$ に対する固有関数 $\Phi_n(\theta)$ で

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_n R_n \Phi_n(\theta) \quad (\text{B})$$

のように展開した時の係数 R_n は動径 r の関数である. $R_n(r)$ が満たす微分方程式を書け. ただし, エネルギー固有値は E と表記せよ.

(3) 引力の強さは無次元パラメタ

$$\lambda = \frac{mV_0a^2}{4\hbar^2} \quad (\text{C})$$

で表現できる. 引力が弱く, λ が十分に小さい時の基底状態のエネルギー固有値 E を λ と V_0 を用いて表わせ.

ただし, 2 つの微分方程式

$$\frac{d^2 X_{\pm}}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dX_{\pm}}{dz} \pm X_{\pm} = 0 \quad (\text{D})$$

の物理的に許される解の $z \rightarrow 0$ における漸近的ふるまいがそれぞれ,

$$X_+(z) \simeq 1 - z^2/4, \quad X_-(z) \simeq \ln(c/z) \quad (\text{E})$$

(c は正の定数) であることを用いてよい.

次に, x 座標上の引力ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} V_1 & (x < 0), \\ 0 & (0 < x < b), \\ V_2 & (x > b), \end{cases} \quad (\text{F})$$

の下にある 1 次元系を考える. ただし, $V_1 \geq V_2 > 0$ であるとする.

- (4) $V_1 = V_2$ の場合には, 円筒対称な 2 次元ポテンシャル (A) の場合と同様, 束縛状態は必ず存在することを示せ.
- (5) $V_1 > V_2$ である場合には, 束縛状態が一つも存在しない状況が生まれる. そのための条件を, $mV_2b^2/\hbar^2$ と比 V_2/V_1 を用いて表わせ.

I-3A (物理数学) (30 点)

$g = g(x, t)$ に関する拡散型偏微分方程式

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty, 0 \leq t) \quad (\text{A})$$

を, $g(x, t = 0) = \delta(x)$ なる条件のもとに解け. 必要なら, 積分公式

$$\int_0^\infty \exp(-a\lambda^2) \cos(b\lambda) d\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right) \quad (\text{B})$$

を使ってもよい.

I-3B (統計力学) (40 点)

二つの縮退していないエネルギー準位 $0, \Delta$ をもつ独立な粒子 N 個からなる系が, 温度 T で熱平衡にある.

- (1) この系の分配関数 $Z(T)$ を書き下せ. ただし, ボルツマン定数は k とする.
- (2) $Z(T)$ を用いて, この系のヘルムホルツの自由エネルギー $F(T)$ を求めよ.
- (3) $F(T)$ を用いて, この系のエントロピー $S(T)$ を求めよ.
- (4) $T \rightarrow \infty$ での S の値を求めよ. また, その物理的意味について式を含めて簡潔に説明せよ.
- (5) エントロピーは T, F と内部エネルギー U だけを使って表現できる. その表式を書き下せ.
- (6) $U(T)$ を求めよ.

I-3C (力学) (30 点)

半径 R の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ の中に質量 m の質点が置かれている．ここで鉛直方向上向きに z 座標をとる．質点には鉛直方向下向きに重力（加速度 g ）が働いており，質点は球面から離れずに滑らかに運動するとする．この時，次の問いに答えよ．

- (1) 質点を，球面の南極 $(x, y, z) = (0, 0, -R)$ 付近で， $y = 0$ を保ちながら微小振動をさせた時の振動の周期 T を求めよ．
- (2) 質点が高さ $z = -z_0$ ($z_0 > 0$) の水平面上で円運動する場合の速度 v_0 を求めよ．
- (3) $(x, y, z) = (R, 0, 0)$ に置かれた質点に y 方向の速度 v_1 を与えたとする．その後，質点は球面上を運動し，その高さ z も時間変動する．高さの最小値 z_1 を求めよ．

平成 29 年度大学院入学試験問題 II (3 時間)

注意

- (1) この問題冊子は，問題 II-1，II-2，II-3 の 3 問からなり，表紙を含めて 7 ページまでである．
- (2) 各問の解答はそれぞれ，所定の解答用紙に記入せよ．各解答用紙の上部の欄に受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の表，裏とも上部の横線より上に解答を書いてはいけない．
- (3) 問題 II-1，II-2 については，解答用紙の裏面を用いてもよい．
- (4) 問題 II-3 は独立した 4 つの小問 A，B，C，D からなる．それぞれの解答を解答用紙の表と裏の指定された欄に書け．
- (5) 解答用紙は 3 問すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない．

II-1 (電磁気) (100 点)

真空中の Maxwell 方程式は、電場 $\mathbf{E}$ 、磁束密度 $\mathbf{B}$ 、電荷密度 ρ 、電流密度 $\mathbf{j}$ 、真空の誘電率 ϵ_0 および真空の透磁率 μ_0 を用いて以下のように表される。

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{A})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{B})$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \quad (\text{C})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{D})$$

- (1) 物質中において、分極電荷密度を ρ_d とし、分極電荷密度は分極ベクトル $\mathbf{P}$ によって $\rho_d = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ と表すことができるものとする。ここで分極電流密度 $\mathbf{j}_d$ は以下のように表される。

$$\mathbf{j}_d = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (\text{E})$$

この式から分極電荷密度と分極電流密度において電荷保存則が成り立っていることを示せ。

- (2) ここで、分極電荷密度以外の電荷密度を ρ_e 、これによる電流密度を $\mathbf{j}_e$ とする。また、磁化ベクトルを $\mathbf{M}$ とし、磁化電流密度を $\mathbf{j}_m$ とすると $\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ と表すことができる。電束密度を $\mathbf{D}$ 、磁場を $\mathbf{H}$ と表すことにし、 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ 、および $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ が成立しているものとしたときに、 ρ_e および $\mathbf{j}_e$ を用いて、(A)–(D) に相当するこの物質中の Maxwell 方程式を導け。

ここで、電荷 e を持つイオンと電荷 $-e$ の電子が、それぞれ単位体積あたり N 個存在している有限の領域を考える。この領域に、角振動数 ω 、振幅 $\mathbf{E}_0$ の電磁波が作用した場合を考える。なお、これ以降、電子の速さは光の速さ c に比べて充分小さいものとし、イオンの運動およびイオンによる電磁波の散乱は無視できるものとする。また、電子間の距離は十分大きく、それらの相互作用は考えなくて良い。

- (3) 電子の運動方程式は、質量を m 、その変位を $\mathbf{x}$ として以下のように与えられるものとする。このとき、電流密度 $\mathbf{j}$ を求めよ。ただし、電子の全体としての並進運動は考えず、振動している成分だけを考えればよい。

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -e \mathbf{E}_0 \sin(\omega t) \quad (\text{F})$$

- (4) ここで、このような真空中の有限領域における電子とイオンの集団を、角振動数 ω に依存した誘電率 $\epsilon(\omega)$ および透磁率 $\mu(\omega)$ の媒質として考えることができるものとする。このとき、 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ および $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ が成り立っているものとして、この媒質の誘電率 ϵ を求めよ。

- (5) 次に，電子に変位 x に比例する弾性的な束縛力 $-m\omega_0^2 x$ が加わった場合の電子の運動方程式を書け．
- (6) 問(5)の場合の媒質の屈折率 n を求めよ．また， n^2 の ω 依存性の概形を図示せよ．ただし， $\omega \neq \omega_0$ であるとする．なお， n は $\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}$ で与えられるものとする．

II-2 (統計熱力学) (100 点)

分子の占有体積 b による斥力と、分子数 N に比例し体積 V に反比例する平均場的な引力が作用する分子をファンデルワールス分子と呼ぶことにしよう。温度 T の熱浴に接した体積 V の箱の中に N 個のファンデルワールス分子がある系について、以下の問に答えよ。ただし、ボルツマン定数を k とせよ。

- (1) (a) この系のポテンシャルエネルギーを $-a\frac{N^2}{V}$ で近似し、ハミルトニアンが

$$H_N = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - a\frac{N^2}{V} \quad (\text{A})$$

で与えられるとする。ここで $\mathbf{p}_i$ は i 番目の分子の運動量、 m は個々の分子の質量であり、 a は正の定数とする。さらに、分子はそれぞれの占有体積を除いた有効体積 $V_f = V - Nb$ 中で熱運動をしていると考える。この系の分配関数を求めよ。

- (b) 問 (1)(a) の結果からファンデルワールスの状態方程式を求めよ。ただし、圧力を P とする。
- (2) ファンデルワールスの状態方程式はある温度 T_c (臨界温度) 以下では、分子系が自発的に縮小することを許してしまう。したがって、 $T < T_c$ ではある範囲の V に対してこの状態方程式が熱平衡状態を記述していない。この点を修正して、 $T < T_c$ における熱平衡状態の等温状態曲線を描け。ただし、横軸を体積、縦軸を圧力にとること。
- (3) $T = T_c$ のときに圧縮率が無限大となる点を臨界点と呼ぶ。臨界点における圧力 P_c 、温度 T_c 、体積 V_c を求めよ。
- (4) 臨界温度以上では系は一様な流体状態であり、臨界温度以下では気体と液体は圧力、温度が等しく、体積が異なる状態として区別が可能である。臨界温度よりやや低い温度で、気体と液体が共存し得る最大の体積 V_g と最小の体積 V_ℓ が

$$\frac{V_g - V_\ell}{V_c} \simeq \text{const.} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^\beta \quad (\text{B})$$

を満たす。この臨界指数 β を求めよ。

(このページは白紙である)

II-3A (物理数学) (25 点)

- (1) 区間 $-1 \leq x \leq 1$ で $f(x) = x^2$ と表される周期 2 の周期関数をフーリエ級数展開せよ.
- (2) 問 (1) の結果を用いて, 以下の値を求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (\text{A})$$

II-3B (力学) (25 点)

複数の質点がばねでつながった系の振動について考える. その最も簡単な例は, 質量 m の質点 1 と質点 2 が弾性定数 K のばねによって図 1 のように壁につながれ, 質点間は弾性定数が G ($G \neq K$) のばねでつながっている系である. ただし, 二つの壁の間の距離は三つのばねの自然長の和に等しいものとする. この系に縦振動 (質点の x 方向の振動) モードは二つあり, その各々における質点の振動の様子は図 2 のように描写される. 図 2 の矢印は質点 j の変位ベクトル x_j ($j = 1, 2$) を表わす.

これを参考に, 図 3 のように, 図 1 の弾性定数 G のばねが質量 $2m$ の質点 3 を伴った二本の弾性定数 G のばねに置き換えられた系を考える. ただし, この場合においても壁の間の距離は四つのばねの自然長の和に等しいものとする. 図 3 の系の各縦振動モードの固有振動数を求めよ. また, 各モードにおける各質点の変位ベクトル x_j ($j = 1, 2, 3$) の様子を図 2 の例にならって図示せよ. ただし, 結果は $G \gg K$ の近似の下で導出すればよいものとする.

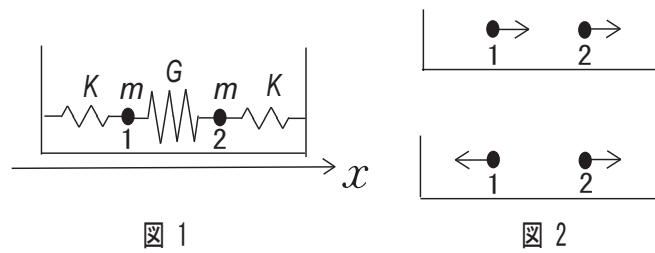


図 1

図 2

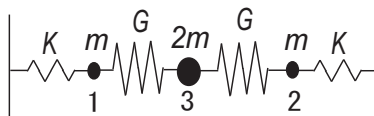


図 3

II-3C (量子力学) (25 点)

大きさ $1/2$ の 2 個のスピン $\hat{s}_1, \hat{s}_2$ からなる系のハミルトニアンが、式 (B) で与えられている。相互作用の強さとして $J > 0$ とし、 $0 \leq x \leq 1$ とする。

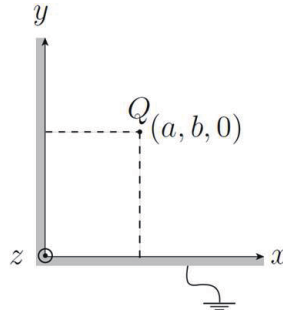
$$\mathcal{H} = (1 - x)J\hat{s}_1^z\hat{s}_2^z + xJ\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 \quad (\text{B})$$

ここで、 $\hat{s}_1^z, \hat{s}_2^z$ はスピンの z 成分を表す。

- (1) $x = 0$ の場合について、エネルギー（固有値）と縮退度を求めよ。ただし、 $\hat{s}_1^z$ と $\hat{s}_2^z$ はそれぞれ固有値 $\pm 1/2$ を取りうることに注意せよ。
- (2) $x = 1$ の場合について、エネルギー（固有値）と縮退度を求めよ。ただし、大きさ S のスピンに対して $\hat{S}^2$ の固有値が $S(S+1)$ であることに注意せよ。また関係式 $(\hat{s}_1 + \hat{s}_2)^2 = \hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2 + 2\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2$ を使ってよい。
- (3) x が 0 から 1 まで変化したとき、エネルギー準位がどのように変わるかを、横軸を x 、縦軸をエネルギーとして縮退度も含めて概略を図示せよ。

II-3D (電磁気学) (25 点)

図のような座標系 (x, y, z) において、接地した 2 枚の半無限導体を直交させたもの (zx 面 ($x > 0$) と yz 面 ($y > 0$)) を考える。ここで、点電荷 Q を位置 $(a, b, 0)$ に置いた場合の電位を求めたい。なお、図において矢印の方向をそれぞれ x と y の正方向とする。



- (1) 導体によって区切られ、点電荷 Q がある領域、すなわち $x > 0$ かつ $y > 0$ 、における電位を求めよ。
- (2) 問 (1) で求めた電位が導体のある位置 (zx 面 ($x > 0$) および yz 面 ($y > 0$)) で 0 になっていることを示せ。

平成 29 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) この問題冊子は，問題 III-1，III-2，III-3 の 3 問からなり，表紙を含めて 9 ページまでである．
- (2) 各問の解答はそれぞれ，所定の解答用紙に記入せよ．各解答用紙の上部の欄に受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の表，裏とも上部の横線より上に解答を書いてはいけない．
- (3) 問題 III-1 については，解答用紙の裏面を用いてもよい．
- (4) 問題 III-2 は独立した 3 つの小問 A，B，C からなる．それぞれの解答を解答用紙の表と裏の指定された欄に書け．
- (5) 問題 III-3 は 2 つの小問 A，B からなる英語の問題である．それぞれの解答を解答用紙の指定された欄に書け．
- (6) 解答用紙は 3 問すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない．

III-1 (量子力学) (100 点)

一次元量子系の粒子 (質量 m) が調和振動子のポテンシャル $V_0(x)$

$$V_0(x) = \frac{m}{2}\omega^2 x^2 \quad (\text{A})$$

に束縛されているとする. このとき次の問いに答えよ.

(1) 生成消滅演算子 $a^\dagger, a$ を

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}p, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}p \quad (\text{B})$$

のように座標 x と運動量 $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ の線形結合として定義すると基底状態は $a|0\rangle = 0$ で定義される. これを利用して, 束縛状態のエネルギー固有値が n を 0 以上の整数として $E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ で与えられることを導け. また, 対応する (規格化された) エネルギー固有状態 $|n\rangle$ を基底状態 $|0\rangle$ に生成演算子 $a^\dagger$ を作用させて構成せよ.

さて, 一次元量子系のポテンシャルが

$$V(x, t) = \frac{m}{2}\omega^2(x - \eta(t))^2 \quad (\text{C})$$

のように時間に依存して変化する場合における量子系の時間発展を調べたい. $t < 0$ においては, パラメーター $\eta(t)$ は時間に依存しない定数 η_0 であり, 量子系はポテンシャルが

$$V_1(x) = \frac{m}{2}\omega^2(x - \eta_0)^2 \quad (\text{D})$$

で与えられるハミルトニアンの基底状態にあるものと仮定する. 時刻 $t = 0$ 以降 $\eta(t)$ は時間に依存して変化する. このとき以下の問いに答えよ.

(2) 上記のように量子系が時間発展する場合に, 座標 x と運動量 p の時刻 t における期待値 $\bar{x}(t)$ と $\bar{p}(t)$ の時間発展を定める微分方程式を求めよ.

(3) 関数 $\eta(t)$ が, 次のような時刻 t の一次関数 (T を正の定数として)

$$\eta(t) = \eta_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) \quad (0 < t < T) \quad (\text{E})$$

で与えられる場合を考える．また $t = T$ 以降は $\eta(t) = 0$ のままで変化しないとする．従って $t > T$ ではポテンシャルが $V_0(x) = \frac{m}{2}\omega^2 x^2$ で与えられる調和振動子となる．このとき，任意の時刻 $t(> 0)$ における期待値 $\bar{x}(t)$ と $\bar{p}(t)$ を決定せよ．

- (4) 特に問 (3) において， T が非常に大きい場合 (時間変化が非常に遅い場合) を考える．この場合に時刻 $t > T$ において，問題 (1) で定義したエネルギー固有状態 $|n\rangle$ が観測される確率 P_n を求めよ．
- (5) 特に問 (3) において， T が非常に小さい場合 (時間変化が瞬時の場合) を考える．この場合に時刻 $t > T$ において，問題 (1) で定義したエネルギー固有状態 $|n\rangle$ が観測される確率 P_n を求めよ．
- (6) $\eta(t)$ が $\eta(0) = \eta_0$ を満たす一般の関数であるときに， x と p の期待値からのずれを表す $(x - \bar{x}(t))^2$ と $(p - \bar{p}(t))^2$ の期待値を計算し，不確定性原理との関係を述べよ．

III-2A (計測と統計) (40 点)

実数データ $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ の各々が, 同一の分布から独立に取り出されたとして以下の問いに答えよ.

(1) データ x_i が区間 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ の一様分布に従う場合,

- (a) $N = 2$ のサンプル平均 $\bar{x} \equiv (x_1 + x_2)/2$ の従う分布を求め, 図示せよ.
(ヒント) 次式を計算すればよい.

$$p(\bar{x}) = \frac{1}{12} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx_1 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx_2 \delta\left(\bar{x} - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

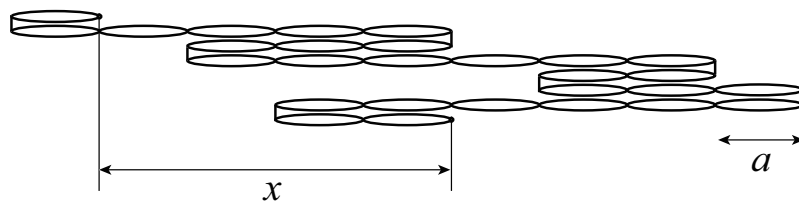
- (b) N が大きい極限で, サンプル平均 $\bar{x} \equiv \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$ の従う分布関数は, 平均 A, 分散 B の C 分布である. これら A, B, C を記せ. また, 解答の背景にある定理は何かを述べよ.

(2) データ x_i が平均 0, 分散 1 の正規分布に従う場合,

- (a) $N = 2$ のサンプル平均 $\bar{x} \equiv (x_1 + x_2)/2$ の従う分布を求め, 図示せよ.
(b) $N = 2$ のサンプル平均を不偏分散 $s^2 = (x_1 - x_2)^2/2$ の平方根を使って定義される量 $t \equiv \frac{\bar{x}}{s/\sqrt{2}} = \frac{x_1 + x_2}{|x_1 - x_2|}$ の従う分布を求め, 図示せよ.

III-2B (統計力学) (30 点)

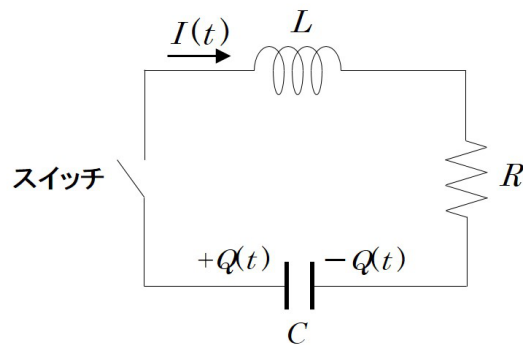
図のように, N 個の要素からなる鎖が一次元上に置かれている. 要素の長さは a で, 折れ曲がりの角度は 0° または 180° であるとする. また, 要素の質量は m とする.



- (1) 鎖の両端が置かれた位置の間の距離 x が与えられたときの, 系のエントロピーを求めよ.
- (2) この鎖が温度 T の熱浴に接して平衡状態にあるとき, 両端に加わる力 f を $\frac{x}{Na}$ の関数として求めよ. ただし, N が大きいとき, $\log N! \simeq N \log N - N$ を使ってよい.
- (3) $\left| \frac{x}{Na} \right|$ が十分小さいときの力 f を求めよ. この力は温度, 要素の質量にどう依存するかを述べよ.

III-2C (線形回路) (30 点)

図のように，インダクタンス L のコイル，抵抗 R ，容量 C のコンデンサ，スイッチからなる回路がある．コンデンサに電荷 Q_0 が帯電した状態で， $t = 0$ にスイッチを入れる．以下では， $R^2 - \frac{4L}{C} < 0$ の場合を考える．



- (1) コイル，抵抗，コンデンサの電位差の和が 0 になることを用いて，コンデンサに蓄えられる電荷 $Q(t)$ に対する微分方程式を立てよ．
- (2) 問 (1) で立てた方程式に， $Q(t) = Ae^{\lambda t}$ を代入し， λ を求めよ．ただし， A は定数とする．
- (3) コンデンサに蓄えられる電荷 $Q(t)$ ，および回路に流れる電流 $I(t)$ を求めよ．ただし， $Q(t=0) = Q_0$ ， $I(t=0) = 0$ ， $I(t)$ は図の矢印の向きを正とする．

III-3A (Expanding Universe) (60 points)

The excerpt below is taken from Saul Perlmutter’s 2011 Nobel Prize in Physics lecture. Read the passage carefully and answer questions [Q-a]–[Q-k] below in English. Write your answers in clear, easy-to-read text.

Apparently we have a Universe that is dominated by some new ingredient, some previously unknown “Dark Energy” that makes the Universe expand faster and faster. It is so rare that you come across something that is not part of our current physics model! This is one of the best [Q-a] outcomes that you could ever get in a project like this. I feel very lucky to be able to work on this at all, because here was a project where any result you could discover would be exciting: We might have found that the Universe was infinite, or that it was finite and going to come to an end. [Q-b] Been have results of either great these would. Instead we found an answer that was even better than “great”, in that it was a surprise. [Q-c] This is not something that you can even wish for in science.

This outcome is a perfect example of how science can so often be [Q-k] two-headed. On the one hand, it was only possible to discover what came as a surprise to all of us because our field, physics, had already made such great progress in understanding the Universe. [Q-d] Less than a century ago we had no idea that there was more to the Universe than our own Milky Way. [Q-e] (e1) immense size of (e2) Universe, (e3) fact that it is expanding, (e4) fact that it is populated with such (e5) things as (e6) exploding stars — all this and more had to be discovered before we could do (e7) work that led us to [Q-f] contemplate (e8) unknown form of energy that accounts for more than two-thirds of everything there is.

It’s amazing how much we figured out, but on the other hand it’s amazing how big a mystery has opened up as a result, and how much we still have left to discover. One of the real pleasures of doing science — which will continue to be true, I believe, [Q-g] on any given day for the next few centuries — is that we have so much knowledge to build upon, yet there is still be so much for us to discover.

These two aspects of science remind us that science is a method, not a finished product. [Q-h] Or know it where will we lead don’t what new, seemingly [Q-i] will magical us give the future in powers it. We never know whether what we find will turn out to be useful, but we do know that in the past, [Q-j] we made a major step forward in our understanding of how the world works, we’ve ultimately been able to solve more problems, including very practical problems. I think that’s the only way we can proceed as basic scientists: We try to see what we can understand, and we hope it opens more possibilities for what we can do in the world.

Answer the following questions concerning the passage above.

- [Q-a] Which of the following words could replace the underlined text and not alter the meaning of the sentence?
- | | |
|------------------|---------------|
| a1) explanations | a2) results |
| a3) fallouts | a4) reactions |
- [Q-b] The original sentence in this position has been scrambled. Reconstruct it using only the underlined words. Change the capitalization and include appropriate punctuation as necessary.
- [Q-c] Which of the following best describes what the author thinks is something one cannot even wish for in science?
- | | |
|---|-----------------------------------|
| c1) to discover that the Universe is infinite | c2) to work on something exciting |
| c3) to achieve a great result | c4) to obtain a surprising result |
- [Q-d] Write a complete sentence with about 20 words that describes the **role** of the underlined sentence in this paragraph using only one of the following words: motivation, example, conclusion, unification.
- [Q-e] Fill in each of the blanks (e1)–(e8) with the correct article (“the”, “an”, or “a”). Capitalize your answers as necessary and if no article is needed write “ ϕ ” in the answer space.
- [Q-f] Which of the following best describes the meaning of the underlined word?
- | | |
|---------------------------|------------------------|
| f1) think seriously about | f2) disregard entirely |
| f3) observe | f4) make a guess about |
- [Q-g] Based on the underlined text, how frequently does the author expect to enjoy science?
- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| g1) every single day | g2) as much as possible |
| g3) with great frequency | g4) often, but not always |
- [Q-h] The underlined words have been scrambled. Put them in the correct order. Change the capitalization and include appropriate punctuation as necessary.
- [Q-i] The underlined words have been scrambled. Put them in the correct order. Change the capitalization and include appropriate punctuation as necessary.
- [Q-j] From the following list of words choose the best one to replace [Q-j] in this sentence.
- | | |
|------------|--------------|
| j1) if | j2) wherever |
| j3) always | j4) whenever |
- [Q-k] Using about 50 or 60 words and your own expressions explain what is meant when the author describes science as being “two-headed”.

III-3B (Thermodynamic Square) (40 points)

Read the following passage and answer questions [Q-1]–[Q-6] as well as questions [Q-A]–[Q-C] below in English. Write your answers in clear, easy-to-read text.

In 1929, Professor Max Born delivered a lecture on Maxwell’s relations in which he used a diagram like the one in Figure 1. This “thermodynamic square” contains a great deal of information:

(1) The four fundamental thermodynamic potentials U , F , G , and H are exhibited at the edges of the square and are flanked* at the corners by [Q-1] the thermodynamic parameters upon which they depend:

$$U = U(S, V), \quad (1a)$$

$$F = [Q-2], \quad (1b)$$

$$G = G(T, P), \quad (1c)$$

$$H = H(S, P). \quad (1d)$$

(2) The two arrows provide plus and minus signs for the differential form of the first law of thermodynamics. If an arrow points away from a thermodynamic parameter, the differential of that parameter has a positive sign. On the other hand, [Q-3]. This convention gives

$$dU = TdS - PdV, \quad (2a)$$

$$dF = -SdT - PdV, \quad (2b)$$

$$dG = [Q-4], \quad (2c)$$

$$dH = TdS + VdP. \quad (2d)$$

(3) The Maxwell relations can be obtained. They depend only upon the parameters at the corners of the square, and the orientation of the arrows. Figure 2 depicts two situations which lead to [Q-5] the Maxwell relations,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S, \quad (3a)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P. \quad (3b)$$

(4) It can be extended to magnetic systems. In order to express the thermodynamic relations for magnetic materials, P and V are replaced by the applied magnetic field H_a and the magnetization M . However, in the thermodynamic square a minus sign is needed for M for the following reason: Application of P results in the reduction of V , while [Q-6].

*flank (*v.t.*): to place something on each side of

Adopted from: Ronald Forrest Fox, J. Chem. Edu. **53** (1976) 441-442.

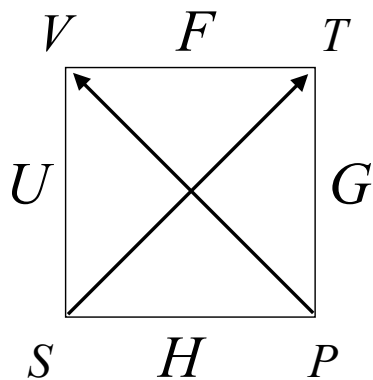


Figure 1. Thermodynamic square.

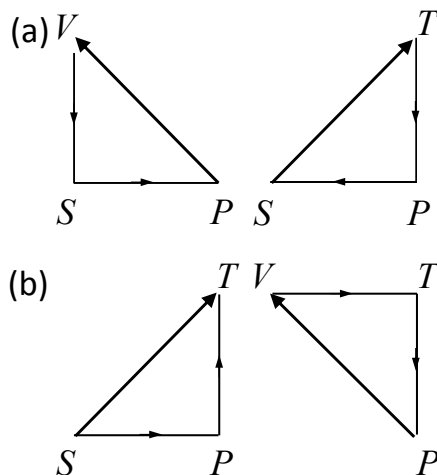


Figure 2. Maxwell relation diagrams.

1 Answer the following questions concerning the passage above.

[Q-1] Among the thermodynamic parameters, T and P represent temperature and pressure, respectively. What do V and S represent, respectively?

[Q-2] Fill in the brackets with a suitable expression.

[Q-3] Fill in the brackets to complete the sentence.

[Q-4] Fill in the brackets with a suitable expression.

[Q-5] Write down the other two Maxwell relations (in any order).

[Q-6] Complete the sentence by providing an appropriate phrase in the brackets.

2 Answer the following questions concerning a magnetic system.

[Q-A] Draw a thermodynamic square for a magnetic system.

[Q-B] For a magnetic system, write down the relation corresponding to Equation (2b).

[Q-C] Write down the Maxwell relation for the partial derivative of magnetization with respect to temperature at constant magnetic field.