

平成28年度大学院入学試験問題 I (3時間)

注意

- (1) 問題I-1, I-2, I-3の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して, 解答用紙表側の左上部(線より上)に問題番号, 受験番号, 氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない。
- (3) 解答用紙は3問すべて提出すること。なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて7ページまでである。

I-1 (力学) (100点)

図1のように，地面に固定された水平な面 F の上に，半径 R ，長さ L のパイプ A が1本置かれている．このパイプ A の壁の厚さは無視できるものとし，質量分布はパイプ A の壁面全面にわたって均等で，パイプ A 全体の質量が M であるものとする．このパイプ A の内面には，パイプ A の中心軸 O と平行に長さ L の棒 B が1本固定されている．棒 B の太さは無視できるものとし，質量分布は棒 B の長さ方向にわたって均等で，棒 B 全体の質量はパイプ A の質量 M の α 倍であるものとする．また，重力加速度は図1の下向きに g で与えられるものとする．このパイプ A と棒 B からなる複合体 AB の運動について考察してみよう．以下の各問への解答に際してはその導出過程も含めて記述すること．

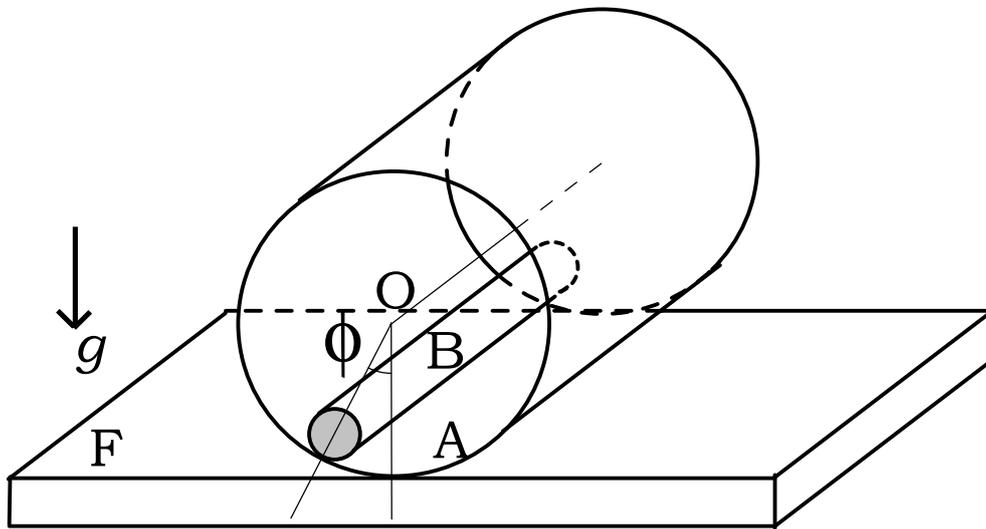


図1

- (1) 複合体 AB の重心を通り中心軸 O に平行な慣性中心軸を C とする．パイプ A の中心軸 O 周りのパイプ A の回転角度を ϕ ，その時間微分を $\dot{\phi}$ とし，複合体 AB の慣性中心軸 C まわりの回転の運動エネルギーを求めよ．ただし角度 ϕ は複合体 AB の平衡位置を基準として定義するものとする．
- (2) 複合体 AB の全運動エネルギーを求めよ．
- (3) 複合体 AB の運動エネルギーと重力ポテンシャルからなるラグランジアンを角度 ϕ を一般化座標として求めよ．

ここで、複合体 AB が面 F の上で滑ることなく回転して運動する場合を考える。このような場合を完全に粗い面と呼び、ころがりに起因してエネルギーの散逸が発生しないことを意味している。

- (4) 問 (3) のラグランジアンを基にして、 ϕ についてのラグランジュの運動方程式を求めよ。
- (5) 複合体 AB が平衡位置の近傍に留まるとき、 ϕ が十分小さいと近似することにより、複合体 AB が平衡位置の近傍で周期運動することを示し、その角振動数 ω を求めよ。

次に、時刻 $t = 0$ のときに複合体 AB がその平衡位置 $\phi = 0$ にあるが静止しておらず、パイプ A の中心軸 O が自身と直交する水平軸の向き（図 1 の右向き）に速度 V で動いている場合を考える。

- (6) 複合体 AB は、初速 V が小さいときは $t = 0$ のときの位置のまわりで振動し続けるが、ある初速 V_0 を越えると一方向に回転し続ける状態に移り変わることを示し、 V_0 を求めよ。
- (7) 複合体 AB は、初速 V が V_0 より大きいときは一方向に回転し続ける。その運動の特徴を、 $\dot{\phi}$ を ϕ の関数としてグラフにすることで示せ。

I-2 (電磁気学) (100点)

電気を流す導体が運動したときに誘起される電場，磁場，電流について考察してみよう．真空中で電場 E ，磁場 B の満たすマクスウェル方程式は， ε_0 ， μ_0 をそれぞれ真空の誘電率と透磁率， ρ を電荷密度， j を電流密度として，

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{A})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{B})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{C})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{D})$$

で与えられるものとする．以下の設問に答えよ．ただし解答に際しては，その導出過程も示すこと．

まず，導体の運動により誘起される電場と磁場について考察する．半径 a の円板状で十分に広くて薄い金属極板を持った平行板コンデンサーが，一定の直流電圧 V の電池に接続されている（図1）．極板の厚みは十分に薄く無視できる．またコンデンサー内に発生する電場はコンデンサー外部には漏れないものとする．電池をつないだまま，コンデンサーの極板間の距離を $d + h \sin \omega t$ ($d > h$) で振動させた．このとき金属極板の振動により，コンデンサー内部に交流磁場が発生する．発生した交流磁場により誘起される電場の効果は無視できる程度に，極板の振動はゆっくりしているものとし，コンデンサー内の電場は一様であると近似できるとする．

- (1) 式(A)で与えられるガウスの法則を，金属極板にあてはめることにより，時刻 t でのコンデンサーの容量を求めよ．
- (2) コンデンサーの中心軸からの距離 r の点における，時刻 t での交流磁場の方向と大きさを求めよ．
- (3) 真空中の単位体積あたりの電磁場のエネルギーは， $\frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2$ と書ける．マクスウェル方程式により，電流が存在しないとき，閉じた空間の電磁場のエネルギーの時間変化は，その空間の表面を通過するベクトル S を使って表すことができることを示し， S を E と B を用いて表せ．なお，必要なら任意のベクトル A と C について成り立つ関係式， $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{C})$ を用いよ．
- (4) 極板間に発生する電磁場のエネルギーの流れの向きを図で示し，その大きさを求めよ．

- (5) 電磁場のエネルギーの流れにより，時刻 $t=0$ から $t = \frac{\pi}{2\omega}$ の間に，極板間の空間から外に流れ出た電磁場のエネルギーを求めよ．さらにこのエネルギーと，コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーの， $t=0$ から $t = \frac{\pi}{2\omega}$ の間の変化との大小関係を議論せよ．

次に，磁場中を運動する導体に誘起される電場と電流を考察する．半径 A ，電気伝導度 σ の金属円柱が，中心軸に垂直な方向の一様で一定の磁場 B の中で，一定の角速度 Ω で中心軸のまわりを回転している (図 2)．磁場方向を x 軸，中心軸方向を z 軸，回転方向を z 軸正方向から見て反時計回りとする．なお，円柱は十分に長く端の効果は考えなくてもよいものとし，磁場のないときには中心軸まわりに摩擦なく自由に回転できるものとする．また金属の透磁率は μ_0 とせよ．なお，金属円柱は帯電していないものとする．

- (6) 一定の磁場中で，導体が運動すると導体内部に電場が発生する．電場の方向と大きさを中心軸からの距離 r と x 軸から測った角度 θ の関数として表せ．なお，誘起される電流により生ずる磁場の影響と渦電流の効果は無視してよい．
- (7) 問 (6) のとき，円柱の中心軸に垂直な断面における電流密度を r, θ の関数として求め，この断面における等電流面を図示せよ．
- (8) 一定の角速度 Ω で回転させるために必要な，円柱の単位長さあたりの仕事率を求めよ．

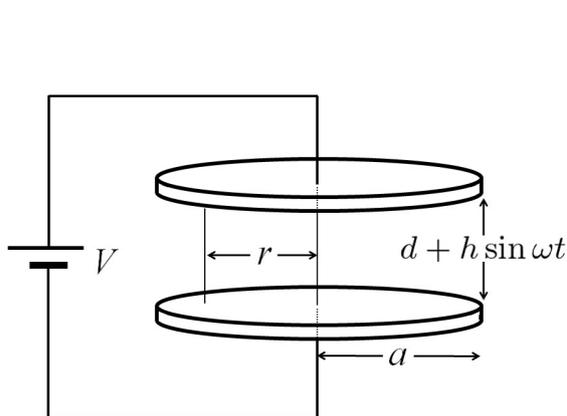


図 1

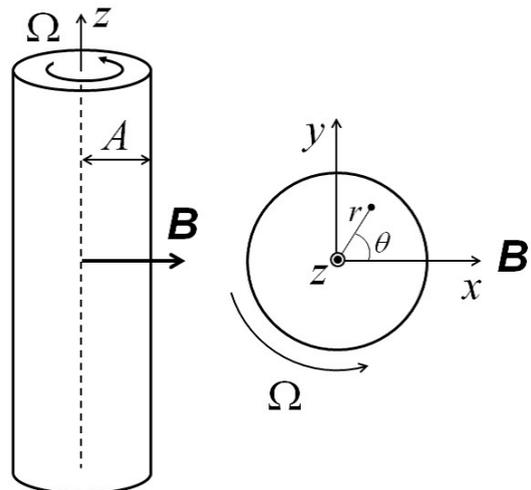


図 2

I-3 (統計力学) (100点)

古典的な気体粒子が格子点上にのみ存在できるとする格子気体を考えよう．いま体積 V の領域に M 個の格子点を置き，各格子点は体積 $v_0 = V/M$ を占めるとする． $N (< M)$ 個の気体粒子が温度 T の熱平衡状態にあるとし，以下，化学ポテンシャル μ が与えられたグランドカノニカル分布を考える．ただし，古典系の場合は，運動エネルギーの部分の計算は位置座標に関する計算とは独立に実行できるので，ここでは位置座標に関する部分のみを考える．ボルツマン定数を k_B として以下の問に答えよ．

- (1) まず粒子が相互作用しない場合を考えよう．このときハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_0 = -\mu \sum_{i=1}^M \rho_i \quad (\text{A})$$

と与えられる．ただし， ρ_i は，各格子点上に気体粒子がある場合は 1，ない場合は 0 をとるものとする．この系の大分配関数

$$\Xi_0 = \sum_{\{\rho_i=0,1\}} \exp\left(-\frac{\mathcal{H}_0}{k_B T}\right) \quad (\text{B})$$

を T, μ, M の関数として求めよ．

- (2) グランドポテンシャルを $J = -k_B T \ln \Xi_0$ と定義すると，ヘルムホルツの自由エネルギー F との間に $J = F - \mu N$ の関係がある．内部エネルギー U ，エントロピー S ，圧力 P に対して $dU = TdS - PdV + \mu dN$ が成り立つことを用いて dJ を求めよ．またこの結果を利用して， μ を与えたときの平均粒子数 N を計算し， μ を格子点あたりの平均粒子数 $n = N/M$ の関数として求めよ．
- (3) 体積が $V = v_0 M$ を通じて M で決まることに注意して，問(2)の結果を参照しながら，圧力 P を n の関数として求めよ．また気体が十分希薄である場合，すなわち $n \ll 1$ のとき，理想気体の状態方程式が得られることを示せ．

次に粒子間に相互作用のある場合を考える．2つの気体粒子が互いに隣接しているときだけ引力が働き $-\epsilon (< 0)$ のエネルギーを持つとすると，ハミルトニアンは以下ようになる：

$$\mathcal{H} = -\epsilon \sum_{(i,j)} \rho_i \rho_j - \mu \sum_{i=1}^M \rho_i \quad (\text{C})$$

ただし， (i, j) は全ての互いに隣接する格子点の対について和をとることを表す．また，ある格子点に隣接している格子点の数 (配位数) を z とする．

- (4) 平均場近似を用いて \mathcal{H} を変形しよう．まず， ρ_i を平均値 $\langle \rho_i \rangle$ とその周りのゆらぎ $\delta \rho_i$ に分けて $\rho_i = \langle \rho_i \rangle + \delta \rho_i$ と表したうえで式 (C) に代入し，ゆらぎの相関の項 $\delta \rho_i \delta \rho_j$ を無視する．最後に，ゆらぎ $\delta \rho_i$ を ρ_i と $\langle \rho_i \rangle$ を用いて消去すると，平均場近似で得られるハミルトニアン \mathcal{H}^* の主要部分は式 (A) で μ を有効化学ポテンシャル μ^* におきかえたものになる．平均値 $\langle \rho_i \rangle$ は格子点 i によらず $\langle \rho_i \rangle = \langle \rho \rangle$ であるとして \mathcal{H}^* を求め，有効化学ポテンシャル μ^* を $z, \epsilon, \langle \rho \rangle, \mu$ を用いて表せ．

- (5) \mathcal{H}^* に対応する大分配関数

$$\Xi^* = \sum_{\{\rho_i=0,1\}} \exp\left(-\frac{\mathcal{H}^*}{k_B T}\right) \quad (\text{D})$$

とグランドポテンシャル J^* を求めよ．

- (6) 問 (1)-(3) で得られた理想気体の結果を参照しながら格子点あたりの粒子数 $n = N/M$ を計算し，これが $\langle \rho \rangle$ に等しいことから， n を μ の関数として定める自己整合方程式を求めよ．またこの方程式を解くことにより， μ を n の関数として求めよ．

- (7) 圧力 P を n の関数として定めよ．さらに気体が希薄である場合には，この結果が， n の 2 次までの近似でファンデルワールスの状態方程式

$$P = \frac{N_A k_B T}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2} \quad (\text{E})$$

に帰着することを示し， a と b を ϵ, v_0, z, N_A を用いて表せ．ただし， N_A はアボガドロ数で， V_m は気体 1 モル当たりの体積である．また，必要ならば $|x| \ll 1$ の時に成り立つ展開 $\ln(1+x) = x - x^2/2 + \dots$ ， $x/(1-x) = x + x^2 + \dots$ を用いてよい．

平成28年度大学院入学試験問題 II (3時間)

注意

- (1) 問題II-1, II-2, II-3の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して, 解答用紙表側の左上部(線より上)に問題番号, 受験番号, 氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない。
- (3) 解答用紙は3問すべて提出すること。なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて7ページまでである。

II-1 (力学) (100点)

2次元平面に束縛された，中心力場中の質点の運動について考える．中心力ポテンシャル Φ は，中心からの距離 r のべき関数として $\Phi(r) = -C/r^\alpha$ のように表せるとする ($C > 0$ とする)．質点の質量を 1 とし，以下の各問に答えよ．

- (1) 質点の運動を表すラグランジアンを，極座標表示における一般化座標 (r, ϕ) を用いて書き下し， (r, ϕ) が満たす運動方程式を導出せよ．
- (2) 保存量があることを用いて， r の運動方程式が $\ddot{r} + dV_{\text{eff}}(r)/dr = 0$ と表せることを示し，関数 $V_{\text{eff}}(r)$ を保存量とポテンシャル $\Phi(r)$ で書き表せ．ただし， $\lim_{r \rightarrow \infty} V_{\text{eff}}(r) = 0$ とする．
- (3) 質点の運動が半径 r_0 ，角速度 Ω_0 の等速円運動で表される場合を考える．この時， Ω_0 を C, α, r_0 を用いて表せ．また，この円運動が安定に存在するために， α が満たす条件を求めよ（ここでは， r 方向の微小摂動に対して，変位が微小に留まる場合を安定，時間とともに増大する場合を不安定という）

以下では， α は前問で求めた条件を満たすとし，半径 r_0 ，角速度 Ω_0 の円運動まわりの摂動について考える．

- (4) 円運動からの微小変位を次のように表す：

$$r = r_0(1 + \epsilon x), \quad \phi = \Omega_0 t + \epsilon y \quad (\text{A})$$

ここで， ϵ は振幅の大きさを表す無次元の微小量である ($\epsilon \ll 1$)．(A) 式を問 (1) で求めた運動方程式に代入し， ϵ の 1 次のオーダーで成り立つ式を書き下すと，以下のような摂動方程式が得られる：

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \text{M} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \text{N} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{B})$$

行列 M, N を角速度 Ω_0 と α を用いて表わせ．

- (5) 前問で得られた摂動方程式 (B) において，振動解 $(x, y) = (A, B)e^{i\omega t}$ を仮定する． $\omega \neq 0$ の場合に，振動数 ω と角速度 Ω_0 の間に成り立つ関係を導け．
- (6) 摂動方程式 (B) の右辺に， $(f_x, f_y) = -k(x, y)$ という力がつけ加わったとする．これは質点つきのバネ（バネ定数 k ）を半径 $r = r_0$ にとりつけて等速回転させた場合に対応する．振動解 $(x, y) = (A, B)e^{i\omega t}$ を仮定して，振動数 ω を求めると，バネ定数 k が正でも ω が純虚数になり，解が指数関数的に増大する場合がある（つまり不安定）．解が指数関数的に増大する条件を，バネ定数に対する条件として Ω_0 を用いて表せ．

(このページは白紙である)

II-2 (量子力学) (100点)

一次元(座標 x) 量子系の一粒子問題(質量 m)において, 図1のようなポテンシャル $V(x)$ に束縛された状態を考える.

$$V(x) = -U \quad b \leq |x| \leq a+b \quad (\text{A})$$

$$V(x) = 0 \quad |x| < b, |x| > a+b \quad (\text{B})$$

ただし, $U > 0$, $a > 0$, $b \geq 0$ とする. 束縛エネルギー $E (< 0)$ の状態の波動関数(実関数とする)は以下のシュレディンガー方程式を満たす.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) + V(x)\phi(x) = E\phi(x) \quad (\text{C})$$

パリティ変換 $x \rightarrow -x$ に対する $V(x)$ の対称性より, 束縛状態は $\phi(x) = \phi(-x)$ の正パリティ状態もしくは $\phi(x) = -\phi(-x)$ の負パリティ状態である. 以下では, a と U を一定に保ったまま, b を変えたときに束縛状態がどのように変化するか考える.

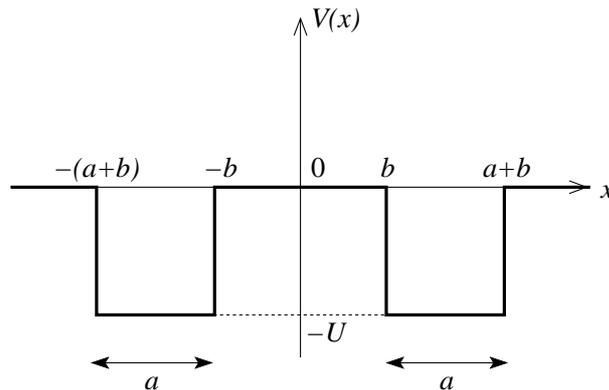


図1

- (1) $b = 0$ の場合を考える. このときのポテンシャルを $V^{(0)}(x)$ と表すと, $V^{(0)}(x)$ は幅 $2a$, 深さ U の井戸型ポテンシャルである. $\gamma = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$, $\beta = \sqrt{\frac{2m(E+U)}{\hbar^2}}$ として, 正および負パリティ状態のそれぞれについて, γ を β と a で表せ.
- (2) $b > 0$ で b が十分小さいとき, $b = 0$ の場合の束縛エネルギー $E^{(0)}$ からのエネルギー変化を摂動論で評価する.
 - (a) $b = 0$ の場合の波動関数を $\phi^{(0)}(x)$ と表す. $x = 0$ および $x = a$ での $\phi^{(0)}(x)$ の値を, それぞれ, $\phi_0 \equiv \phi^{(0)}(0)$ および $\phi_a \equiv \phi^{(0)}(a)$ とおいたとき, 正および負パリティ状態のそれぞれについて, ϕ_0 を ϕ_a , β , a を用いて表し, $|\phi_0|$ と $|\phi_a|$ の大小関係を示せ.

- (b) b を 0 からわずかに増加させた場合のエネルギー変化 $\Delta E = E - E^{(0)}$ を考える. b の値は十分小さく, ポテンシャルの微小変化 $\Delta V(x) = V(x) - V^{(0)}(x)$ を摂動項とみなす. エネルギーの一次の補正項を b の一次までの近似で求めたとき, 正および負パリティ状態のそれぞれについての ΔE を ϕ_0, ϕ_a, U, b を用いて示せ. また, ΔE と 0 との大小関係を示せ. ただし, ϕ_0 および ϕ_a は, $\int_{-\infty}^{+\infty} \{\phi^{(0)}(x)\}^2 dx = 1$ を満たすように規格化された波動関数に対して定義されているものとする.
- (3) a, U を適当にとり, $b = 0$ の場合に $2n + 1$ 個 (n は 0 か正の整数) の束縛状態が存在する状況を考える. エネルギーの低い方から正パリティ, 負パリティの束縛状態が交互に存在している. a, U を一定に保ったまま, パラメータ b を変えたとき, b をある値 b_c より大きくとると負パリティの束縛状態が 1 つ増える. これは, $b > b_c$ では $2n + 2$ 個の束縛状態が存在し, b を b_c に近づけると下から $2n + 2$ 番目の状態のエネルギー E はゼロに近づくことに対応する. ここで, b_c は小さくなく摂動論は成り立たないものとする. 以下では, この $2n + 2$ 番目の状態の波動関数 $\phi_{2n+2}(x)$ の振る舞いを考察し, b_c の値を求める.
- (a) $b > b_c$ において, 領域 $x \geq a + b$ における波動関数の関数形 $\phi_{2n+2}(x)/\phi_{2n+2}(a+b)$ を $\gamma = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$ を用いて表せ. また, その結果から, $b \rightarrow b_c$ の極限 ($E \rightarrow 0$) における $x \geq a+b$ での $\phi_{2n+2}(x)/\phi_{2n+2}(a+b)$ を示せ.
- (b) $b \rightarrow b_c$ の極限 ($E \rightarrow 0$) において, 領域 $-b \leq x \leq b$ における波動関数の関数形 $\phi_{2n+2}(x)/\phi_{2n+2}(b)$ を $E = 0$ のシュレディンガー方程式を解くことにより求めよ. ただし, $\phi_{2n+2}(x)$ は負パリティ状態であることに注意すること.
- (c) $b > b_c$ のとき, $\phi_{2n+2}(x)$ は領域 $b < x < a + b$ に何個のゼロ点 ($\phi_{2n+2}(x) = 0$ となる点) をもつか. (ヒント: $\phi_{2n+2}(x)$ は, $|x|$ が有限の領域に $2n+1$ 個のゼロ点をもつ.)
- (d) $b \rightarrow b_c$ の極限 ($E \rightarrow 0$) での波動関数 $\phi_{2n+2}(x)$ を, $n = 1$ の場合について, x の関数として図示せよ. ただし, 波動関数は $\phi_{2n+2}(a+b) = 1$ と規格化すること.
- (e) $\beta_0 = \sqrt{\frac{2mU}{\hbar^2}}$ とし, b_c を β_0, a を用いて表せ.

II-3 (物理数学) (100点)

1次元のランダムウォークを考える．原点を出発点とするランダムウォークの n ステップ後の位置 S_n は確率変数で，以下のように与えられる．

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad (\text{A})$$

ここで，確率変数 X_i は，等確率で 1 か -1 をとる．ただし， S_0 は確率 1 で 0 をとるとする．また， $X_i (i = 1, \dots, n)$ は独立で， X_i に対する平均を $\langle \quad \rangle$ と表すとき， $\langle X_i X_j \rangle = \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle (i \neq j)$ を満たすものとする．

(1) ランダムウォーク S_n の平均 $\langle S_n \rangle$ と分散 $\langle (S_n - \langle S_n \rangle)^2 \rangle$ を求めよ．

S_n の個々の事象は， i ステップ後の位置の値を s_i とおくととき， (s_1, s_2, \dots, s_n) と表すことができる．これを S_n の経路と呼ぶ．図1に $n = 10000$ のときに得られた経路を示した．この経路では， $i > 2k$ の全てで s_i は正の値をとる．常識では s_i の半分程度が正の値をとる確率が高いと思われるが，実際はそうではない．以下では， $s_i > 0$ の割合が大きい経路は高い確率で実現されることを確かめる．

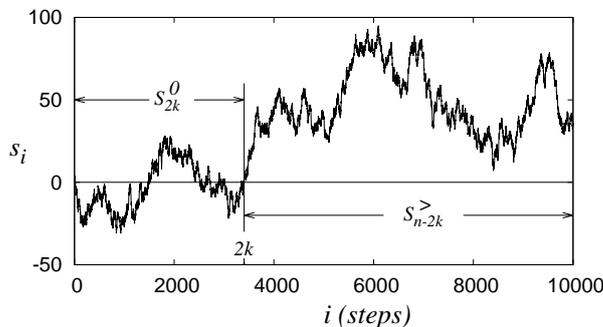


図1

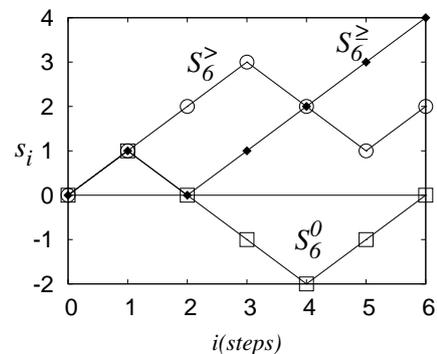


図2

図1の経路は， $2k$ ステップ目に原点に戻る経路と原点を出た後 $n - 2k$ ステップの間 $s_i > 0$ となる経路に分けられる．ここで，原点を出た後 $2k$ ステップ目に原点に戻る経路の集合を事象 S_{2k}^0 ，原点を出た後 k ステップの間 $s_i > 0$ となる経路の集合を事象 $S_k^>$ とそれぞれ呼ぶ．

(2) 事象 S_{2m}^0 が実現される確率 $P(S_{2m}^0) = u_{2m}$ を求めよ．スターリングの公式 $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$ を用いて $m \gg 1$ の場合に， u_{2m} の漸近形を求めよ．以下では， $P(S_0^0) = u_0 = 1$ とする．

原点を出た後 k ステップの間 $s_i \geq 0$ である経路の集合を事象 $S_k^>$ と呼ぶ. 図 2 に事象 $S_6^>$ (◆), $S_6^>$ (○) と S_6^0 (□) に属する経路の例を示した.

事象 $S_{2m}^>$ と事象 S_{2m}^0 に属する経路は 1 対 1 対応させることができるので, それぞれの事象に属する経路の総数は等しい. 従って, 実現確率は等しく $P(S_{2m}^>) = P(S_{2m}^0)$ である. この確率は u_{2m} である. 以下, この関係を既知として用いよ.

- (3) 事象 $S_{2m}^>$ と事象 $S_{2m-1}^>$ に属する経路の総数が等しいことを示せ. また, $P(S_{2m}^>)$, $P(S_{2m-1}^>)$ と $P(S_{2m}^>)$ の関係を求めよ. 奇数回のステップでは原点に戻れないことに注意せよ.

図 1 の経路が属する, 原点を出た後 $2k$ ステップ目に原点に戻り, その後の引き続き $2m-2k$ ステップの間は正となる事象 $S_{2k}^0 + S_{2m-2k}^>$ が実現される確率 $P(S_{2k}^0 + S_{2m-2k}^>)$ を求めよう.

- (4) 事象 S_{2k}^0 と事象 $S_{2m-2k}^>$ は独立なので, 事象 $S_{2k}^0 + S_{2m-2k}^>$ の実現確率は以下の関係を満たす.

$$P(S_{2k}^0 + S_{2m-2k}^>) = P(S_{2k}^0)P(S_{2m-2k}^>)$$

この実現確率を $\alpha_{2k,2m}$ とおく. このとき, $\alpha_{2k,2m}$ を適切な j に対する u_{2j} を用いて表せ. スターリングの公式を用いて, $m, k, m-k \gg 1$ の場合に $\alpha_{2k,2m}$ の漸近形を求めよ. ただし, $x = k/m$ の関数として表せ.

ランダムウォーク S_{2m} の中で, 原点より上にあるステップ数が $2k (k \geq 0)$ である事象を $Q_{2k,2m}$ と表す. ただし, $s_{2i} = 0$ のとき, s_{2i} の符号は s_{2i-1} と同じとみなす. 事象 $Q_{2k,2m}$ が実現される確率を $\beta_{2k,2m}$ とおくと,

$$P(Q_{2k,2m}) = \beta_{2k,2m} = 2\alpha_{2k,2m} \quad (\text{B})$$

であることを示そう.

- (5) 原点を出た後 $2i$ ステップ後に初めて原点に戻ってくる確率を f_{2i} とおく. このとき, u_{2m} を f_{2i} と $u_{2j} (1 \leq i \leq m, 0 \leq j < m)$ を用いて表せ.
- (6) $Q_{2k,2m}$ の経路の中で初期の $2r$ ステップ目に初めて原点に到達するものは, $0 < i < 2r$ の全てで $s_i > 0$ となる場合と $s_i < 0$ となる場合の 2 通りある. その後, それぞれ $Q_{2k-2r,2m-2r}$ と $Q_{2k,2m-2r}$ に属する経路が後に続くことになる. この関係を用いて, $\beta_{2k,2m}$ を f_{2a} と $\beta_{2b,2c} (a < m, c < m, b \leq k)$ を用いて表わせ.
- (7) 式 (B) が成り立つことを示し, $\beta_{2k,2m}$ を適切な j に対する u_{2j} を用いて表せ. ただし, $b \leq k, c < m$ の場合にも式 (B) が成り立つとして $\beta_{2b,2c}$ に代入せよ.

平成 28 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題は III-1 から III-5 まで 5 問ある。この中から 3 問選択せよ。4 問以上選択した場合はすべての解答が無効になることがある。
 - (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
 - (3) 各解答用紙は横長に使用して、解答用紙表側の左上部（線より上）に問題番号，受験番号，氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号，氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表，裏とも解答を書いてはいけない。
 - (4) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない。
 - (5) 問題冊子は表紙を含めて 17 ページまでである。
-

III-1 量子力学（電磁場による荷電粒子の閉じ込め）

III-2 電磁気学（輻射）

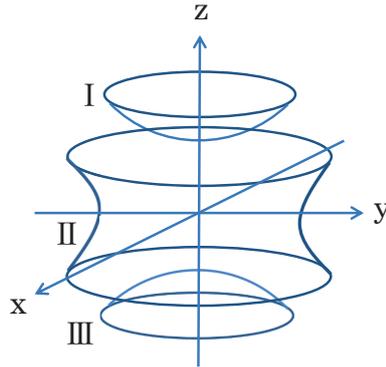
III-3 統計力学（Bose-Einstein 凝縮）

III-4 実験（放射化分析）

III-5 天文学

III-1 (量子力学：電磁場による荷電粒子の閉じ込め) (100点)

下図の I, II, III は軸対称な電極であり，系全体には z 方向に大きさ $B(> 0)$ の一様な磁場がかけられている．この装置の原点付近の空間に質量 m ，電荷 $q(> 0)$ の非相対論的な粒子をトラップすることを考える．原点付近のスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルは，それぞれ， $\phi = -\frac{1}{2}\kappa(x^2+y^2-2z^2)$ および $\mathbf{A} = (-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0)$ で与えられると仮定して，以下の間に答えよ．重力は無視してよい．



まず，古典論的に運動を解析する．

- (1) (a) 粒子の位置座標 x, y, z に対する運動方程式を書け．
 (b) $\zeta = x + iy$ を用いて， x 方向と y 方向の運動方程式を1つにまとめると， $m\ddot{\zeta} = -iqB\dot{\zeta} + q\kappa\zeta$ となる．これは2階の定数係数線形微分方程式なので，一般解は積分定数 C_1, C_2 を用いて

$$\zeta = C_1 e^{-i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_2 t} \quad (\text{A})$$

と書ける．ここで， $\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_c + \Delta$, $\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_c - \Delta$ と書いたときの ω_c と Δ を m, q, B, κ で表わせ．

- (c) 粒子を原点付近に閉じ込めるためには， κ はどのような条件を満たせばよいか．以下， κ はその条件を満たしていると仮定する．また，以下では $\Delta > 0$ と仮定する．
- (2) 一般に，ラグランジアン $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - q\phi + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}$ から，正準運動量と速度の関係が求められる．このことを利用して以下の間に答えよ．
- (a) x, y の正準共役量 p_x, p_y を \dot{x}, \dot{y}, x, y で表わせ．
 (b) 上で求めた p_x と p_y に関する2式を， $\eta = p_x + ip_y$ と ζ を用いて1つの式にまとめよ．(答えは m と ω_c を使って表わせ．)

その結果に式 (A) を代入すると，次式がえられる．

$$\eta = -im\Delta(C_1 e^{-i\omega_1 t} - C_2 e^{-i\omega_2 t}) \quad (\text{B})$$

つぎに、量子論を考える。

- (3) ハミルトニアンを xy 方向 (z 軸に垂直な方向) の運動に関する部分 H_{xy} と z 方向の運動に関する部分 H_z の和の形に書け。

H_{xy} を対角化するために、ハイゼンベルク描像における x, y, p_x, p_y の時間発展を考える。今の場合、ハミルトニアンが位置と運動量の2次式であるため、位置と運動量に対するハイゼンベルク方程式は、古典的な正準方程式と同じ形となる。このことから直ちに、上の式(A)と式(B)が x, y, p_x, p_y の時間発展を与えていることがわかる。ただし、今の場合は、 C_1, C_2 は演算子である。

- (4) まず、 H_{xy} と C_1 および C_2 の交換関係を求める。式(A)の ζ がハイゼンベルク方程式を満たすことから、 $[H_{xy}, C_1], [H_{xy}, C_2]$ はそれぞれ C_1, C_2 の定数倍であることがわかる。それらの定数を ω_1, ω_2 で表わせ。導出も示せ。
- (5) つぎに、 $C_1, C_1^\dagger, C_2, C_2^\dagger$ の間の交換関係を求める。

- (a) 式(A)と式(B)より、 C_1, C_2 を ζ, η の線形結合で表わせ。
- (b) 上の結果と正準交換関係から、 $C_1, C_1^\dagger, C_2, C_2^\dagger$ の間の交換子が計算できる。その結果、交換子のうち、 $[C_1, C_1^\dagger] = \frac{\hbar}{m\Delta}$ と $[C_2, C_2^\dagger] = -\frac{\hbar}{m\Delta}$ 以外はすべてゼロであることがわかる。例として、 $[C_1, C_1^\dagger]$ の計算過程を示せ。
- (c) 上のことは、適当な正の定数 κ_1, κ_2 を用いて、 $C_1 = \kappa_1 a, C_2 = \kappa_2 b^\dagger$ とおくと、 $a, a^\dagger, b, b^\dagger$ は2組の生成消滅演算子となることを意味している。 κ_1, κ_2 を求めよ。ただし、 $a, a^\dagger, b, b^\dagger$ は、 $[a, a^\dagger] = 1, [b, b^\dagger] = 1$, 他の交換子 = 0 を満たすものとする。

- (6) 以上の結果から、 H_{xy} が対角化できる。

- (a) 問(5)(c)と問(4)の結果を利用すると、 $[H_{xy}, a] = -\hbar\omega_1 a, [H_{xy}, b] = \hbar\omega_2 b$ であることがわかる。そのような H_{xy} は定数項をのぞき、 $H_{xy} = ra^\dagger a + sb^\dagger b$ の形にきまる。係数 r, s を ω_1, ω_2 で表わせ。
- (b) H_{xy} の固有値を求めよ。エネルギー固有値に最小値は存在するか。
- (c) $a|0\rangle = 0, b|0\rangle = 0$ で定義される状態 $|0\rangle$ と a^\dagger, b^\dagger を用いて、各エネルギー固有値に対する規格化された固有状態を書け。

III-2 (電磁気学：輻射) (100点)

マクスウェル方程式より，加速度運動をする荷電粒子から電磁波が放射されることが示される．非相対論的な速さ $u \ll c$ (c は光速) で運動する電子の加速度ベクトルを $\dot{\mathbf{u}}$ とする．図1のように， $\dot{\mathbf{u}}$ から角度 θ をなす方向の単位ベクトルを \mathbf{n} としたとき，電子から \mathbf{n} 方向に距離 R だけ離れた観測位置における電磁波の電場は，近似的に

$$\mathbf{E} = \left[\frac{-e}{4\pi\epsilon_0 R c^2} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{u}}) \right] \quad (\text{A})$$

と表せることが知られている．ここで $e (> 0)$ は素電荷， ϵ_0 は真空の誘電率である． $[\]$ 記号は，電子の位置から観測位置まで光速 c で情報が伝達することを反映した「遅延時間」での値を表す．解答では，電子の位置の変動による遅延時間の違いは無視し， $[\]$ 記号は省略せよ．また，以下の問の全てについて，必要なら光速 c ，真空の誘電率 ϵ_0 ，素電荷 e ，電子質量 m を解答に含めよ．

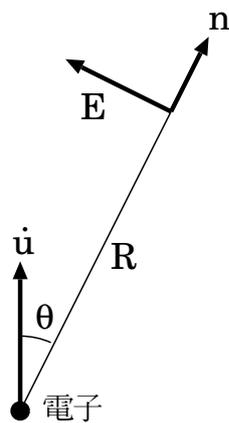


図1

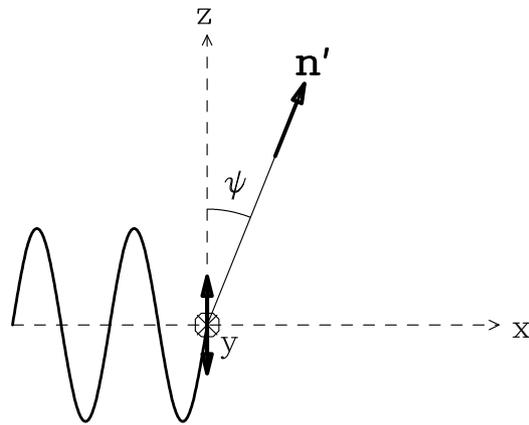


図2

- (1) 観測位置における電磁波の磁場 \mathbf{B} を， \mathbf{E} と \mathbf{n} を用いて表せ．
- (2) ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ が単位時間・単位面積あたりのエネルギー流束（フラックス）であることに留意し， \mathbf{n} 方向に観測される単位立体角あたりの放射強度 $dP/d\Omega$ ($\text{J s}^{-1} \text{str}^{-1}$) を $\dot{\mathbf{u}}$ ， θ を用いて表せ．さらに全方向で積分した放射強度 P (J s^{-1}) を求めよ．
- (3) 図2のように， $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ の位置にある自由電子に，原点における電場が $\mathbf{E} = (0, 0, E_0 \sin(\omega t))$ で表される角振動数 ω の直線偏光した電磁波が， x 軸正方向へ向かって入射する場合 (z 軸方向への直線偏光) を考えよう．電子が加速度運動を行なう結果，入射方向とは異なる方向にも電磁波が放射される（トムソン散乱）．微分散乱断面積 $d\sigma_T/d\Omega$ は，時間平均した単位立体角あたりの散乱光の放射強度を，時間平均した入射光のフラックスで割った

値として定義される． $x - z$ 平面内にあり， z 軸から角度 ψ をなす方向の単位ベクトルを n' とする．問 (2) の結果を使い， n' 方向への散乱光の，1 周期で時間平均した単位立体角あたりの放射強度を， ψ と E_0 を用いて表せ．次に，それを 1 周期で時間平均した入射フラックスと比較することで，微分散乱断面積 $d\sigma_T/d\Omega$ を ψ の関数として求めよ．ただし，電磁波の磁場によるローレンツ力と，放射による電子のエネルギー損失は無視する．

- (4) 同様に，原点における電場が $E = (0, E_0 \sin(\omega t), 0)$ で表される直線偏光した電磁波が， x 軸正方向へ向かって入射する場合 (y 軸方向への直線偏光) を考える．問 (3) で定義した n' 方向の微分散乱断面積を求めよ．
- (5) 同様に， z 軸方向と y 軸方向に直線偏光した同じ強度の電磁波が，時間的に等確率でランダムに入れ替わりながら x 軸正方向へ向かって入射する場合について， n' 方向の微分散乱断面積を求めよ．測定する時間は電磁波の入れ替わりの時間間隔より十分長いとし，時間平均を考えること (このときの入射光は完全無偏光とみなせる．) また， $\psi = 0$ および $\psi = \pi/2$ の時に，散乱光が直線偏光しているかどうかを述べよ．
- (6) 直線偏光フィルターとは，フィルターの特定な軸 (偏光軸) に平行な偏光成分のみを透過させる光学素子である．図 3 のように，完全無偏光の電磁波を等方的に放射する中心光源を， x 軸方向に長い直方体の形をした一様密度のトムソン散乱体が囲っている系を考える． z 軸方向遠方より，この系全体から放射される電磁波を直線偏光フィルターを通して見た場合，強度が最大になるのはフィルターの偏光軸がどの軸に平行なときか．理由とともに述べよ．ただし，散乱は最大 1 回のみ起こるとし，吸収は無視せよ．

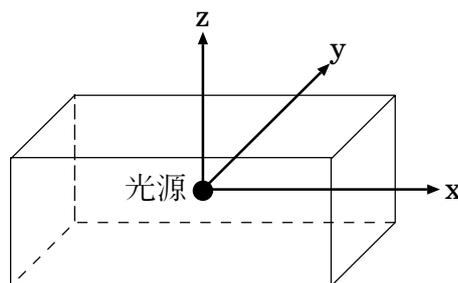


図 3

- (7) 大きさ B の一様磁場の中に，非相対論的速さ v をもつ電子群が入射する場合を考える．その結果，磁場に巻き付いて電子はらせん運動を行なう．速度と磁場のなす角が完全にランダムとして平均した場合，電子 1 個あたりから放射される放射強度 (J s^{-1}) を B, v を用いて表せ．

III-3 (統計力学：Bose-Einstein 凝縮) (100 点)

ボース統計に従う原子気体の Bose-Einstein 凝縮 (BEC) は，原子間相互作用の弱い極限で実現される凝縮であり，1995 年にルビジウムやナトリウムを用いた BEC 生成が相次いで報告された．こうした実験では，調和ポテンシャルに閉じ込められた状態で BEC が実現するため，一様系の BEC とは異なる性質を示す．以下では，原子同士の相互作用は無視し，グランドカノニカル分布の取り扱いでポテンシャルに閉じ込められたボース粒子の BEC について調べる．以下，必要に応じてプランク定数 \hbar ，ボルツマン定数 k_B を用いて各設問に答えよ．

各ボース粒子が感じるポテンシャルは，以下の調和振動子型ポテンシャルで表せる．

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (\text{A})$$

ここで m は粒子の質量であり， ω_a ($a = x, y, z$) は調和振動子ポテンシャルの形を決める角振動数である．このポテンシャル中の粒子のエネルギー準位 ε は次式で与えられる．

$$\varepsilon(n_x, n_y, n_z) = \left(n_x + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_z ; \quad (\text{B})$$

$$(n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots)$$

温度 T ，化学ポテンシャル μ が与えられたとき，系に存在する平均粒子数は，ボース分布関数 $f(\varepsilon) = 1/\{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1\}$ ($\beta = (k_B T)^{-1}$) を用いて，

$$\mathcal{N}(T, \mu) = \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \sum_{n_z=0}^{\infty} f(\varepsilon(n_x, n_y, n_z)) \quad (\text{C})$$

で与えられる．

- (1) ボース分布関数を $f(\varepsilon) = \sum_{\ell=1}^{\infty} e^{\ell\beta(\mu-\varepsilon)}$ と書き直した上で，式 (C) の (n_x, n_y, n_z) に関する幾何級数和を実行すると，

$$\mathcal{N}(T, \mu) = \sum_{\ell=1}^{\infty} e^{\ell\beta(\mu - \frac{3}{2}\hbar\omega_m)} h(\ell\beta\hbar\omega_x) h(\ell\beta\hbar\omega_y) h(\ell\beta\hbar\omega_z) \quad (\text{D})$$

という表式が得られる．ここで角振動数の算術平均を $\omega_m \equiv (\omega_x + \omega_y + \omega_z)/3$ とした．式 (D) に現れる関数 $h(x)$ を求めよ．

以下では、全粒子数 N が与えられている場合を考え、 N は十分大きな数であるとする。BEC の発現をあらわに見るため、式 (C) の和を基底状態 $(n_x, n_y, n_z) = (0, 0, 0)$ の占有数 N_0 とそれ以外の状態和 \sum' で表される粒子数 \mathcal{N}' とに分離して、

$$N = \mathcal{N}(T, \mu) = f(\varepsilon(0, 0, 0)) + \sum'_{n_x, n_y, n_z} f(\varepsilon(n_x, n_y, n_z)) \quad (\text{E})$$

$$\equiv N_0(T, \mu) + \mathcal{N}'(T, \mu)$$

と表す。ここで $\mathcal{N}'(T, \mu)$ は励起状態にある粒子数であり、以下のように表せる：

$$\mathcal{N}'(T, \mu) = \sum_{\ell=1}^{\infty} e^{\ell\beta(\mu - \frac{3}{2}\hbar\omega_m)} \{h(\ell\beta\hbar\omega_x) h(\ell\beta\hbar\omega_y) h(\ell\beta\hbar\omega_z) - 1\} \quad (\text{F})$$

ある温度 T での化学ポテンシャル μ は、 $\mathcal{N}(T, \mu) = N$ を満たすように定まることに注意して、十分大きな粒子数 N のもとで N_0 と \mathcal{N}' を求めると図 1 のようなふるまいが得られる。

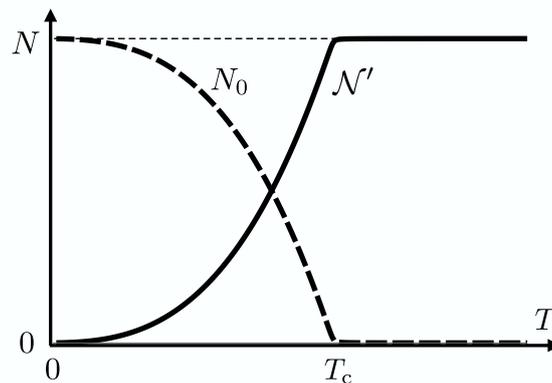


図 1

- (2) 高温から温度を下げていくと、ほぼゼロであった基底状態の占有数が急に巨視的な値になる（つまり $N_0 \gg 1$ ）。このように N_0 が十分大きくなる時、化学ポテンシャルはある上限値 μ_c に近づくと期待される。式 (E) から N_0 の表式を具体的に書き下し、その式をもとに上限値 μ_c を求めよ。

式 (F) より、励起状態の粒子数 \mathcal{N}' は化学ポテンシャルの増加関数であり、与えた温度のもとで上限値 μ_c に近づけると \mathcal{N}' は最大となる。従って、前問の結果と図 1 のふるまいから、この最大値が系の全粒子数 N と等しくなるときに BEC が発現するとみなし、そのときの温度を転移温度 T_c と定めることができる：

$$N = \mathcal{N}'(T_c, \mu_c) \quad (\text{G})$$

以下、このような T_c について考えよう。

(次ページに続く)

- (3) $\beta\hbar\omega_a \ll 1$ ($a = x, y, z$) であるような状況を考える．式 (F) の $\{\dots\}$ 内を $\beta\hbar\omega_a$ について最初の 2 項まで展開することにより，

$$\mathcal{N}'(T, \mu) = X \sum_{\ell=1}^{\infty} \tilde{z}^{\ell} \left\{ \frac{1}{\ell^3} + Y \frac{1}{\ell^2} \right\} \quad (\text{H})$$

という表式を得る．ただし $\tilde{z} \equiv e^{\beta(\mu - \frac{3}{2}\hbar\omega_m)}$ である．式 (H) に現れる係数 X および Y を，温度 T ，角振動数の算術平均 $\omega_m \equiv (\omega_x + \omega_y + \omega_z)/3$ ，幾何平均 $\Omega \equiv (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$ を用いて表せ．(ヒント： $x \ll 1$ のとき， $h(x) \simeq \{x(1 - x/2)\}^{-1}$ と近似できることを用いよ．)

- (4) 式 (H) の $\{\dots\}$ 内の第 1 項のみを残す最低次の近似で式 (G) を解くことにより，転移温度 $T_c^{(0)}$ を求めよ (最終的な結果はツェータ関数 $\zeta(s) = \sum_{\ell=1}^{\infty} 1/\ell^s$ を用いて表せ．) また，転移温度以下における基底状態の占有数の比率 N_0/N を温度 $T/T_c^{(0)}$ の関数として表せ．

- (5) 前問で無視した式 (H) の第 2 項の影響を考えよう．転移温度は $T_c^{(0)} \rightarrow T_c = T_c^{(0)} + \Delta T_c$ のようにずれることが期待されるが， $\beta\hbar\omega_a \ll 1$ ($a = x, y, z$) の状況では係数 Y は微小量となり，転移温度のずれ ΔT_c は十分小さいとして扱える．式 (H) を用いて式 (G) を微小量の 1 次まで展開することで転移温度のずれを求め，比 $\Delta T_c/T_c^{(0)}$ を全粒子数 N と振動数 ω_m, Ω を用いて表せ．(結果はツェータ関数を用いて表すこと．)

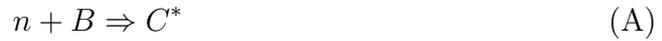
- (6) 角振動数が $\omega_x = \omega_y = \omega_z/8$ の関係を満たし，かつ $\Omega = 10^3$ [s^{-1}] と与えられたとする．転移温度のずれ $\Delta T_c/T_c^{(0)}$ を 1% におさえるために必要な粒子数 N とその時の転移温度 T_c はいくらか，それぞれ有効数字 1 桁で求めよ．ただし， $\hbar = 6.58 \times 10^{-16}$ [$\text{eV}\cdot\text{s}$]， $k_B = 8.62 \times 10^{-5}$ [$\text{eV}\cdot\text{K}^{-1}$] とし，以下の数表を参考にせよ．

| | $s = 2$ | $s = 3$ | $s = 4$ |
|----------------------|---------|---------|---------|
| $\{\zeta(s)\}^{1/3}$ | 1.18 | 1.06 | 1.03 |
| $\{\zeta(s)\}^{2/3}$ | 1.39 | 1.13 | 1.05 |
| $\zeta(s)$ | 1.64 | 1.20 | 1.08 |

(このページは白紙である)

III-4 (実験：放射化分析) (100点)

安定な原子核 B からなる原子を一定量含む薄い試料に、中性子 n の粒子線を一定時間照射し、次式のように、原子核 C の励起状態 C^* を生成する。



この励起状態は、(B)のように、非常に短い時間で全て基底状態 $C_{g.s.}$ に遷移した後、さらに原子核 D に崩壊する際 100%の確率で γ 線を放出するものとする。



この γ 線の放出数を計測し、試料中の原子核 B の個数を調べることを考える。

- (1) 試料中に原子核 B からなる原子が m モル存在するとして、中性子の照射により毎秒生成される C^* の個数 A_{C^*} を F, σ, m, N_A を用いて表せ。ただし、 F は中性子の毎秒 1 cm^2 当たりの入射数、 σ は反応断面積とよばれる量であり、 $\sigma \equiv [\text{単位時間} \cdot \text{標的核} 1 \text{ 個あたりの反応数}] / [\text{単位時間} \cdot \text{単位面積あたりの入射中性子数}]$ により定義され、単位は cm^2 である。 N_A はアボガドロ数、試料の中性子線に垂直な断面の面積は 1 cm^2 とする。また、原子核 C^* に変換される B の個数は、試料中の B の個数に対して無視できるものとする。
- (2) 前問で示されたように、基底状態 $C_{g.s.}$ は中性子照射により生成され続けるが、その一方、崩壊 (B) で示されているように D に崩壊していく。この崩壊定数 (放射性原子核 1 個が単位時間に崩壊する確率) を λ とし、試料中の状態 $C_{g.s.}$ の個数 $N_{C_{g.s.}}$ を中性子の照射を開始してからの時間 t の関数として考えるとき、成り立つ微分方程式を示せ。
- (3) その解を求めよ。ただし、照射開始の $t = 0$ において $N_{C_{g.s.}} = 0$ とする。
- (4) 原子核 B が $m = 1.0 \times 10^{-6}$ モル含まれていると推定される試料に対して、照射終了直後から 1 時間の γ 線測定によって m を 1.0% 以下の精度で求めたい。 $F = 1.0 \times 10^7 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$, $\sigma = 1.0 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$, $\lambda = \frac{1.0}{3600} / \text{秒}$ であるとき、何時間以上の照射が必要であるかを有効数字 2 桁で求めよ。ここで、放出される γ 線は全て検出されるものとし、さらに、 m の精度は γ 線計測に起因し、その計数はポアソン分布に従うものとする。計算の際、 $N_A = 6.02 \times 10^{23}$, 自然対数の底 e の値を 2.72 とし、図 1 を利用してよい。

崩壊 (B) において原子核 $C_{g.s.}$ が D に崩壊する際、実際には前問まで考慮しなかった β 線も放出される。次に、この β 線のエネルギーを測定するための検出器について定性的に考察してみる。

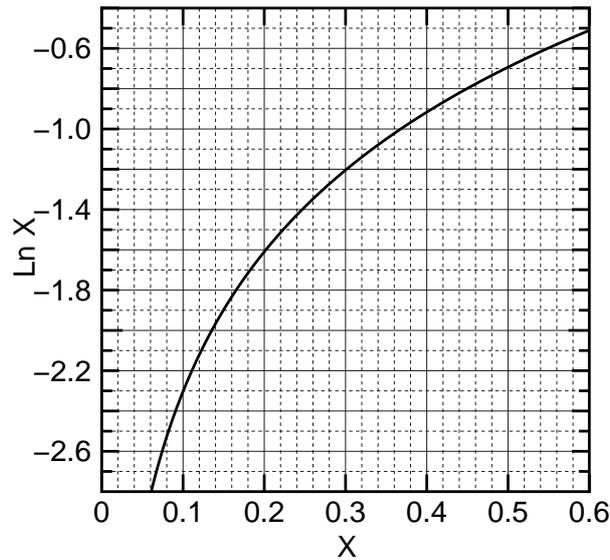


図 1

(a)と(b)の二種類のシンチレータ(注1)を β 線検出器の候補とし,これらに,放出される β 線と同程度のエネルギーで,且つエネルギーの揃った(単色)電子線を入射させるシミュレーションを行ったところ,おおよそ図2のような結果となった.

シミュレーションでは,空気中において,座標 $(x[\text{cm}],y[\text{cm}],z[\text{cm}])=(0,0,0)$ に直径4 cmの円柱状シンチレータ材(図2各図中央の□枠)及び座標 $(0,0,-2)$ には点状電子線源(黒点)が配置され,各シンチレータの厚さ(z 方向の長さ)は入射電子がほとんど透過しないように予め決められていた.そして,線源から細く絞られた数百個の単色電子がシンチレータへ垂直に入射させられた.

図2には,線源から射出された電子一つ一つに対して,入射電子と入射後の電子の飛跡((a-1)と(b-1))及び電子の入射後に制動放射(注2)で発生した光子の飛跡((a-2)と(b-2))が $x-z$ 面に射影されて描かれており,電子や光子が,シンチレータ内で吸収されたり,外に流出している様子が表されている.ただし,各シンチレータにおいて,一つの電子が射出される毎に,これらは一連の事象として生じるが,それぞれの成分の寄与を明確にするために分けて描かれている.

- (5) 入射電子のエネルギーをできるだけ損なわずに測定するという観点から考えたとき,どちらのシンチレータが検出器として適当であるかを,シミュレーションの結果を踏まえ,「後方散乱」(注3)と「制動放射」の用語を用いて論ぜよ.
- (6) 図2の(a-2)と(b-2)の結果から,制動放射によるエネルギーの流出を抑えるために,シンチレータに対して施せる改良点を一つ挙げよ.

(次ページに続く)

(注1)「シンチレータ」: 放射線のエネルギーがシンチレータ内で失なわれると、そのエネルギーに応じた強度の蛍光が放出される物質。その失われ方は放射線の種類に依存する。この蛍光はシンチレータに接続された光検出器により電気信号に変換され、エネルギーが測定される。

(注2)「制動放射」: 入射電子がシンチレータ材の原子核や電子のクーロン場で加速を受け、電磁波を放射する現象。その結果として、電子は入射エネルギーの一部を失う。

(注3)「後方散乱」: 固体内に入射した電子の一部が、内部で散乱され再び入射面から外へ放出される現象。後方散乱の度合いは散乱体の原子番号とともに増加する。

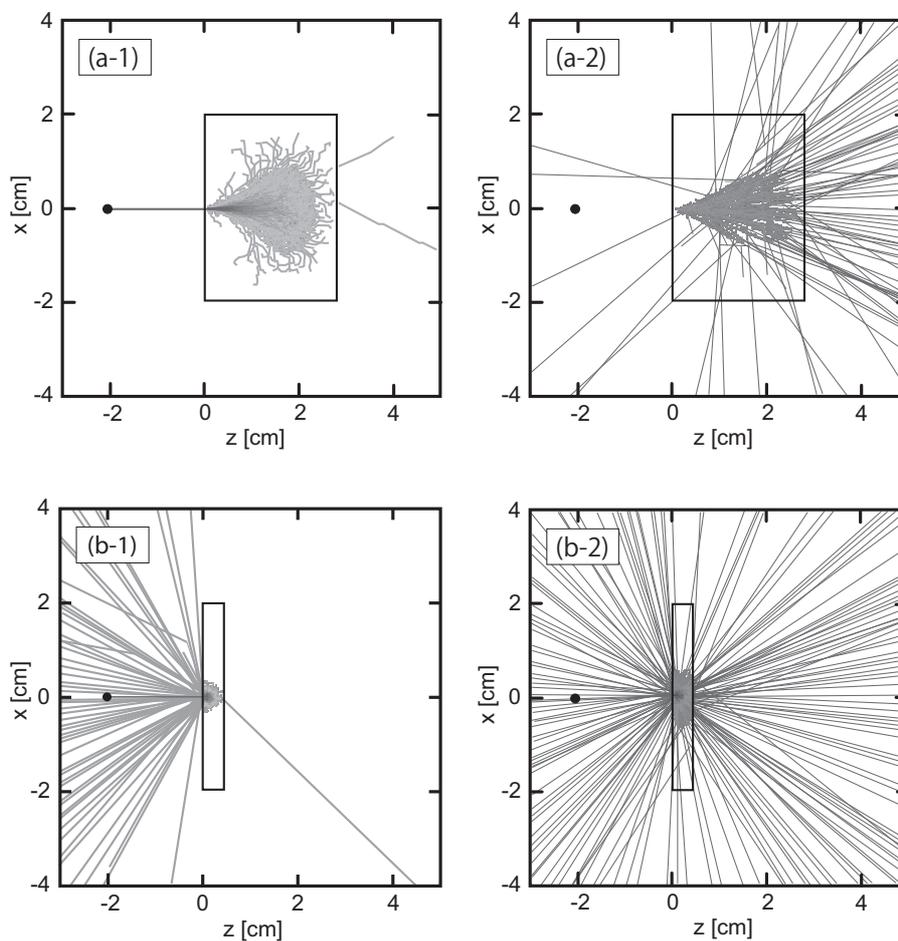


図 2

(このページは白紙である)

III-5 (天文学) (100点)

熱的プラズマから観測される輻射を考えよう．周波数 ν における単位面積・単位時間・単位周波数・単位立体角あたりの輻射強度を I_ν ($\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{str}^{-1}$) で表す．空間座標 s に沿った輻射輸送の式は，散乱過程を無視すれば

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu \quad (\text{A})$$

と書ける．ここで α_ν (m^{-1}) は吸収係数， j_ν ($\text{J m}^{-3} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{str}^{-1}$) は単位体積・単位時間・単位周波数・単位立体角あたりの放射エネルギーである．以下の問題すべてにおいて，プラズマは温度 T の熱平衡状態にあり，キルヒホッフの法則

$$\frac{j_\nu}{\alpha_\nu} = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (\text{B})$$

が成り立っているとする．ここで $B_\nu(T)$ はプランク関数であり， h はプランク定数， c は光速， k_B はボルツマン定数である．以降，簡単のため $B_\nu(T)$ を B_ν と示すことにする．

- (1) 熱的プラズマの表面で I_ν が方向によらず一定の場合，プラズマ表面から放射される単位面積・単位時間・単位周波数あたりのフラックス F_ν ($\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$) を I_ν を用いて表せ．ただし，プラズマ外部から内部へ向かう輻射場はゼロとせよ．

図1のように，水素のみからなり陽子イオン数密度 n ，温度 T ，半径 R の一様な完全電離プラズマ球を考える．素過程として，熱制動放射（自由自由放射）およびその逆過程（自由自由吸収）のみを考慮する．この放射は等方的であり，その単位体積・単位周波数あたりの放射率 ϵ_ν ($\text{J m}^{-3} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$) は

$$\epsilon_\nu = An^2 T^{-1/2} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \quad (\text{C})$$

と近似的に表すことができるとして，以下の問(2)-(6)に答えよ．ただし，式(C)の A は定数である．

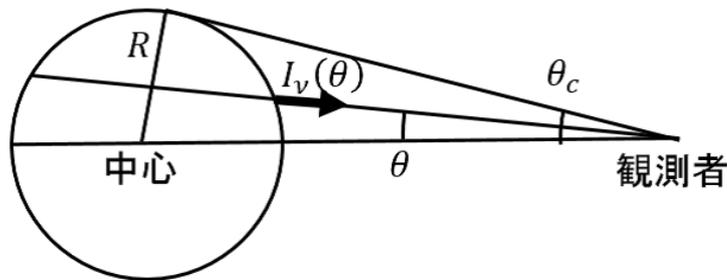


図1

- (2) ϵ_ν が n^2 に比例する理由を, 簡単に説明せよ.
- (3) 周波数で積分した全放射率 $\epsilon(\equiv \int \epsilon_\nu d\nu)$ の温度依存性を求めよ.
- (4) 自由自由吸収係数 $\alpha_\nu^{\text{ff}}(\text{m}^{-1})$ を求め, $h\nu \ll k_B T$ および $h\nu \gg k_B T$ の場合の周波数依存性を示せ.

プラズマが放射を行う典型的な周波数において $\alpha_\nu R \gg 1$ の場合は光学的に厚い状況であると呼ばれ, このときプラズマ球表面において $I_\nu = B_\nu$ となる. 一方, $\alpha_\nu R \ll 1$ の場合は光学的に薄い状況であると呼ばれ, このとき光線の経路に沿った系のサイズを L とすればプラズマ球表面においてその光線方向について $I_\nu = j_\nu L$ となる. プラズマ球外部における吸収・放射は完全に無視できるとして以下の問(5)と(6)に答えよ. その答えは, R, B_ν, ϵ_ν のうち必要なものを用いて表せ.

- (5) 図 1 のプラズマが光学的に厚い場合に, 単位周波数あたりの光度 $L_\nu(\text{J s}^{-1} \text{Hz}^{-1})$ を計算せよ. このプラズマ球の中心と観測者を結ぶ直線と視線方向(光線方向)とのなす角度を θ とする. このプラズマ球を遠方から観測した時の見込み角度が θ_c であるとして, 観測される I_ν の強度分布を θ の関数 $I_\nu(\theta)$ として概略を図示せよ(厳密な関数形を求める必要はない). この際, $\theta = 0$ における I_ν の値も記述すること.
- (6) このプラズマが光学的に薄い場合に L_ν を求め, さらに観測される I_ν の強度分布の概略を θ の関数として図示せよ. 厳密な関数形を求める必要はないが, $\theta = 0$ における I_ν の値を記述すること. プラズマの見込み角度は θ_c であるとする.

(次ページに続く)

次に、温度勾配のあるガス内の輻射輸送について考察しよう。局所的には熱平衡になっているとする。図2のように、 z 軸方向のみに物理量が変化し、 z 軸と垂直な方向には無限に広がったプラズマを考える。温度は z のみの関数 $T(z)$ となる。 z 軸と光線とのなす角度を θ とすれば、任意の方向(θ)に向かう光線の任意の場所(z)における輻射強度は z と θ のみの関数 $I_\nu(\theta, z)$ と表すことができるが、以下ではこれを単純に I_ν と表す。散乱は無視できるとする。

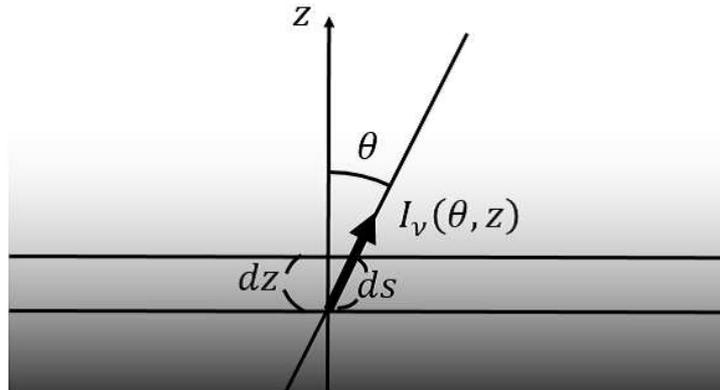


図2

- (7) z 方向についての輻射輸送の方程式($\partial I_\nu / \partial z$)を I_ν , α_ν , B_ν , θ を用いて表せ。
- (8) 以下、 I_ν の z 方向の変化が十分に小さく、 $B_\nu \gg (1/\alpha_\nu)(\partial I_\nu / \partial z)$ が成り立っているとする。問(7)の結果を I_ν について解き、ゼロ次解が $I_\nu^0(\theta, z) = B_\nu$ となることを示せ。さらに、この方程式の解 $I_\nu(\theta, z)$ を $\partial B_\nu / \partial z$ の1次の項まで求めよ。
- (9) 任意の位置 z での z 軸正方向への正味のフラックス $F(z) = \int F_\nu d\nu$ ($\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1}$)は、問(8)の結果を用いて

$$F(z) = -\kappa \frac{dT}{dz} \quad (\text{D})$$

と表すことができる。この拡散係数 κ を、ロスランドの平均吸収係数 $\alpha_R(\text{m}^{-1})$

$$\alpha_R \equiv \frac{\int_0^\infty \partial B_\nu / \partial T d\nu}{\int_0^\infty (1/\alpha_\nu) \partial B_\nu / \partial T d\nu} \quad (\text{E})$$

を用いて表せ。 $\int_0^\infty B_\nu d\nu = \sigma T^4 / \pi$ (σ はシュテファン・ボルツマン係数)の関係を用いてよい。

(このページは白紙である)

平成28年度大学院入学試験問題 IV (1時間)

英語 (100点)

注意

- (1) 問題IV-1, IV-2の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、解答用紙表側の左上部(線より上)に問題番号, 受験番号, 氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない。
- (3) 解答用紙は2問すべて提出すること。なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて5ページまでである。

IV-1

以下の英文は、Walter Lewin 著 “For the Love of Physics” からの抜粋である（一部略）。これを読んで以下の問に答えよ。

In 1600,

(a) a result of his experiments

(b) Not only was

(c) in other ways

(d) Their work is made even

(注)

Gilbert：ギルバート（人名），physician：医者，geographic：地理学上の，
magnetite：磁鉄鉱，wander：あちこちさまよう，viable：ものになる，
Curie temperature:キュリー温度，ferromagnetic:強磁性の，involved:込み入った，
dynamo effect:ダイナモ効果，astrophysicist:天体物理学者，thorny:めんどろな，
geological：地質学上の，millennia：millennium（千年）の複数形，
stroll：ぶらつき

- (a) 下線部 (a) の “a terrella” とはどのようなものを説明し，どういう実験結果を示したかを本文に即して簡潔に日本語で答えよ.
- (b) 下線部 (b) を和訳せよ.
- (c) 下線部 (c) に関連して，筆者は，どういう理由で地球は単なる棒磁石とは違っていると言っているのか，本文に即して，日本語で説明せよ.
- (d) 下線部 (d) を和訳せよ.

IV-2

以下の文章は、小林誠、益川敏英両氏のノーベル賞の受賞理由を述べた文章をもとに作成されたものである。下線部 (a)–(d) を英訳せよ。

(a) 小林・益川の論文は1972年9月1日に投稿された。その当時、3つのクォークのみが知られていた。彼らの理論は6個のクォークを含むものであり、その当時特に注目はされなかった。4番目のクォークの存在に関しては、1970年に Sheldon Glashow, Jean Iliopoulos, Luciano Maiani によって提案された有力な証拠があった。 (b) 弱い相互作用に関するその当時存在した理論には一つ問題があったのだ。実験では観測されていない、ストレンジネスを変える中性カレントの存在を導いてしまうものだったのである。 (c) 3人の著者は、チャーム・クォークと呼ばれることになった4番目のクォーク, c , を導入することを提案した。このクォークの導入により、2つの全ファミリーが得られ、ストレンジネスを変える中性カレントが確かに抑制されるのである。1974年に、新しいとても重い粒子, J/ψ 粒子が、実際に Samuel Ting らと Burton Richter らによって発見された。その粒子は $c\bar{c}$ 状態であることが、比較的すぐに理解された。 (d) 数年後にはチャーム量子数をもった粒子も発見された。新しい重いレプトンのいくつかの兆候が、1975年に見え始め、1977年にはその発見が確立された。このことは、レプトンの3番目のファミリーの存在を示すものであった。この段階になって、小林・益川の論文は注目され始めた。

(ヒント)

小林・益川：Kobayashi-Maskawa, 論文を投稿する：submit a paper,
弱い相互作用：weak interaction, チャーム・クォーク：charm quark,
ファミリー：family, レプトン：lepton

(このページは白紙である)