平成27年度大学院入学試験問題　I（3時間）

注意

(1) 問題I–1，I–2，I–3の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ．裏面を用いてもよい．

(2) 各解答用紙は横長に使用して，解答用紙表側の左上部（線より上）に問題番号，受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の他の部分に受験番号，氏名を書いてはいけない．この線より上の欄には表，裏とも解答を書いてはいけない．

(3) 解答用紙は3問すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない．

(4) 問題冊子は表紙を含めて7ページまである．

I-1 (物理数学) (100 点)

次式で定義される x, x' と t の関数 $G(x, x', t)$ を考える.

$$G(x, x', t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4t}} \tag{A}$$

(1) 以下の積分を計算して求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \tag{B}$$

(2) $t > 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, x', t) dx' \tag{C}$$

の積分を計算して求めよ.

(3) $x \neq x'$ のとき

$$\lim_{t \to +0} G(x, x', t) \tag{D}$$

を求めよ.

(4) $t > 0$ のとき，以下で定義される $H(x, x', t)$ を求めよ.

$$H(x, x', t) = \frac{\partial G(x, x', t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 G(x, x', t)}{\partial x^2} \tag{E}$$

(5) 連続で有界な任意の関数 $g_0(x)$ に対して

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_0(x') G(x, x', t) dx' \tag{F}$$

で，新しい関数 $v(x, t)$ を定義する．このとき $t > 0$ で

$$w(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \tag{G}$$

で定義される $w(x, t)$ を求めよ.

(6) $t > 0$ のとき，以下の極限を求めよ.

$$\lim_{t \to +0} v(x, t) \tag{H}$$

(7) $v(x, t)$ は，ある偏微分方程式の，ある初期条件のもとでの解になっているが，その偏微分方程式と初期条件を書け.

（このページは白紙である）

I-2 (力学) (100 点)

重心を上下に移動させることでブランコを漕ぐ運動を簡単なモデルで考えてみよう．図１のように，O を支点として，質量 m のおもり（質点）がついた棒振り子の平面上の運動を考える（棒の質量は無視できるとする）．おもりの位置 P を極座標 (r, θ) で表す．おもりは棒の上を移動し，それを $r = l(t)$ と表す．初期条件は，$t = 0$ で，おもりは $\theta = \theta_0$ の位置で静止していたものとする．重力加速度を $g\,(> 0)$ とする．

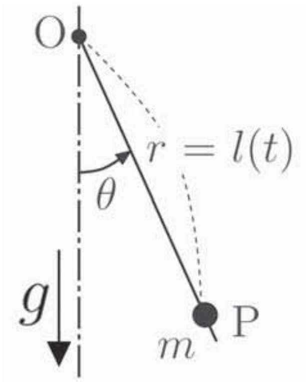

図１

(1) 支点 O を基準とし，おもりの持つ全エネルギー E を m，g，r，$\dot{r}$，θ，$\dot{\theta}$ を使って表せ.

拘束条件は $r = l(t)$ なので，ラグランジュの未定乗数法を使って拘束条件下でのラグランジアン L は，λ を未定乗数とし，

$$L = \frac{1}{2}m\{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\} + mgr\cos\theta - \lambda\{r - l(t)\}$$

と表せる．λ は独立変数とみなせ，λ に関するラグランジュ方程式を計算すると，$r - l(t) = 0$ となり，たしかに拘束条件が出てくる．

(2) r に関するラグランジュ方程式を導け.

(3) θ に関するラグランジュ方程式を導け.

問 (2) のラグランジュ方程式から，λ はおもりに対する拘束力であることがわかる.

(4) おもりのエネルギー E の時間変化を,

$$\frac{dE}{dt} = A\lambda$$

と表すとき, A を r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$ を使って表せ.

次に, $l(t)$ が

$$l(t) = l_0 + \epsilon \cos(2\omega_0 t + \gamma)$$

と周期的に変化する場合を考える（ただし l_0, γ, ϵ は正の定数, $\omega_0 = \sqrt{g/l_0}$ とする）. さらにおもりの移動量は l_0 に比べて十分小さく, $0 < \epsilon \ll l_0$ とする. また振り子のふれも微小で $\sin\theta \sim \theta \sim \theta_0 \cos\omega_0 t$ と近似できる間の運動を考え, 振り子の周期の変化も無視できるとする. 振り子の 1 周期を $T = 2\ \ /\omega_0$ として, 物理量 X に対する平均を $\langle X \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$ と定義する.

(5) $\left\langle \dfrac{dl}{dt}\dfrac{d^2 l}{dt^2} \right\rangle$ を計算して求めよ.

(6) エネルギー E の時間変化の平均 $\left\langle \dfrac{dE}{dt} \right\rangle$ を,

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = mg\epsilon\omega_0\theta_0^2 B$$

と表すとき, B を γ を使って表せ. 計算の途中で, $\left\langle \dfrac{dl}{dt} \right\rangle = 0$ という関係式を使ってもよい.

(7) この運動で, $\left\langle \dfrac{dE}{dt} \right\rangle$ を最大にするための γ の値を求め, そのときの θ と l の時間変化の関係について説明せよ.

I-3 (電磁気学) (100 点)

物質中の電子の古典的な運動を考えよう．電子の有効質量を m_e，電荷を $-e$ $(e>0)$ とする．静電場 (電場強度 $\boldsymbol{E}$) と静磁場 (磁束密度 $\boldsymbol{B}$) のもとで電子の (平均) 速度を $\boldsymbol{v}_e$ としたとき，電子の運動方程式は,

$$m_e\left(\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}+\frac{\boldsymbol{v}_e}{\tau_e}\right) \;=\; -e\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}_e\times\boldsymbol{B}\right)$$

で与えられる．ここで τ_e は衝突 (摩擦) による緩和時間である．

(1) 静磁場 $\boldsymbol{B}=(0,0,B)$，静電場 $\boldsymbol{E}=(E_x,E_y,0)$ がはたらくとして，定常状態 $(d\boldsymbol{v}_e/dt=\boldsymbol{0})$ にある電子の速度 $\boldsymbol{v}_e=(v_{ex},v_{ey},0)$ を求めよ．(ここでは簡単のため電子の z 方向の運動は考えないとしている．)

(2) 定常状態の電子は問 (1) で求めた速度にあるとし，電流密度 $\boldsymbol{j}$ は電子の数密度 n を用いて $\boldsymbol{j}=-en\boldsymbol{v}_e$ と表される．電流密度 $\boldsymbol{j}$ の x, y 成分は，電気伝導度テンソル σ を用いて以下のようにあらわされる．

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

電気伝導度テンソル σ の全成分を，e，n，B 及び，電子の易動度 $\mu_e=e\tau_e/m_e$ を用いて表せ.

図 1 のように x 方向に長い棒状の試料を考える．試料の x 軸両端につけた電極により電場を与え，電流が x 方向に流れているものとする．静磁場 $\boldsymbol{B}=(0,0,B)$ を印加した直後，$-x$ 方向の電子の流れはローレンツ力のため $-y$ 方向に曲げられるが，外部に流れ出ない (絶縁されている) 条件の下では $-y$ 軸方向の壁に電子がたまり電場を発生するようになり，問 (1) で考えた定常状態をとるようになる．そこでは発生した電場によりローレンツ力の影響は打ち消され，電子の $-y$ 方向の移動はない.

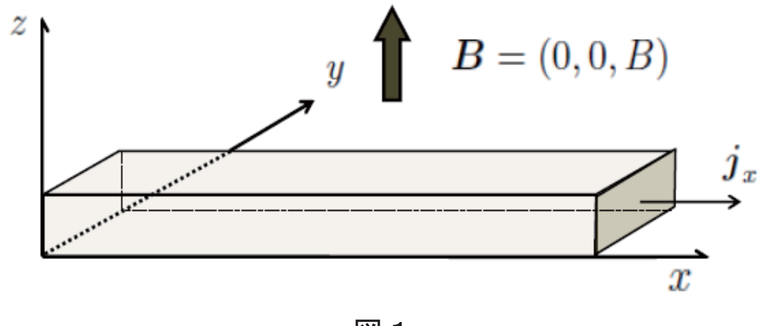

図 1

.

(3) 定常状態では，$j_y = 0$ から E_x と E_y の関係を知ることができる．この関係を用い，

$$R_{\rm H} = \frac{E_y}{B\, j_x}$$

と定義されるホール係数 $R_{\rm H}$，および，有効抵抗率 $R_{xx} \equiv E_x/j_x$ を求めよ．

次に電子と正孔 (電荷 e，有効質量 m_h) の二種類のキャリアーが存在する物質を考える．正孔の (平均) 速度を $\boldsymbol{v}_h$ としたとき運動方程式は

$$m_h \left(\frac{d\boldsymbol{v}_h}{dt} + \frac{\boldsymbol{v}_h}{\tau_h} \right) \ = \ e\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_h \times \boldsymbol{B}\right)$$

で与えられる．また，電子と正孔の数密度をそれぞれ n と p とし，電子，正孔の易動度をそれぞれ $\mu_e = e\tau_e/m_e$，$\mu_h = e\tau_h/m_h$ とする．

(4) 静磁場 $\boldsymbol{B} = (0,0,B)$，静電場 $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, 0)$ がはたらくとして，定常状態にある電子，正孔の速度を $\boldsymbol{v}_e$ と $\boldsymbol{v}_h$ とする．(簡単のため電子，正孔の z 方向の運動は考えないとしている．)　二種類のキャリアーがある場合の電流密度は $\boldsymbol{j} = -en\boldsymbol{v}_e + ep\boldsymbol{v}_h$ と表されるとしたとき，電気伝導度テンソル σ の全成分を求めよ．

この物質を図1のように配置し，電場を x 方向に，静磁場 $\boldsymbol{B}$ を z 方向にかけ充分の時間が経過し，電子，正孔ともに定常状態にあるという状況を考える．ここでも $j_y = 0$ より E_x と E_y の関係を知ることができる．

(5) ホール係数の $B \to 0$ の低磁場極限における表式を求めよ．

(6) ホール係数の $B \to \infty$ の高磁場極限における表式を求めよ．この表式からホール係数の符号は何を意味しているといえるか．

平成 27 年度大学院入学試験問題　II（3 時間）

注意

(1) 問題 II–1，II–2，II–3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ．裏面を用いてもよい．

(2) 各解答用紙は横長に使用して，解答用紙表側の左上部（線より上）に問題番号，受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の他の部分に受験番号，氏名を書いてはいけない．この線より上の欄には表，裏とも解答を書いてはいけない．

(3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない．

(4) 問題冊子は表紙を含めて 7 ページまである．

II-1 (力学) (100 点)

(1) x の関数 $y(x)$ に対して $y' = \dfrac{dy}{dx}$ と書く事にする．y と y' の関数 $L(y, y')$ に対して積分

$$T = \int_a^b L(y, y')dx \tag{A}$$

を考える．T の y について変分がゼロになるような y の従う微分方程式を書け．ただし $\delta y(a) = 0, \delta y(b) = 0$ とする．

(2) $y(x)$ が問 (1) で求めた微分方程式の解であるとき

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L\right) \tag{B}$$

を求めよ．

図 1 のような地球の表面上の点 P$(x = 0, y = 0)$ から，点 Q$(x = a, y = 0)$ まで，地下のトンネルを通って，列車で移動できる様にする事を考える．質量 m の列車は重力のみで加速と減速を受け抵抗ゼロで走れるとする．また，地球の表面は平面とし，重力ポテンシャルエネルギーは $g > 0$ を一定として，mgy で書けるとする．点 P から最も早く点 Q に到着するには，いかなる経路 $y(x)$ のトンネルを掘れば良いかを，以下のようにして求めよう．

(3) 点 P から速度ゼロで出発して点 (x, y) に到着した時の列車の速さ V を求めよ．

(4) $y(x)$ に沿って列車が進んだとき点 Q に達するまでの時間 T は，式 (A) の形に書ける．$y = y(x)$ に沿った長さ ds が $ds = \sqrt{1 + (y')^2}dx$ と書ける事に注意して $L(y, y')$ の具体的な表式を書け．

(5) 問 (2) の結果を積分して y' を y で表せ．

(6) $y' = -1/\tan\theta$ で新しい変数 θ を定義する．このとき θ の関数として $y(\theta)$ を求めよ．

(7) x も θ の関数 $x(\theta)$ と考えると

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dy}{d\theta}\frac{1}{y'} \tag{C}$$

となる．$x(\theta)$ は，この微分方程式を解く事により求める事ができる．$x = 0$ と $x = a$ で $y = 0$ となる条件から $x(\theta)$ を求めよ．

(8) トンネルで一番深い点の x 座標と y 座標を求めよ．

(9) 最短の時間 T を求めよ．

(10) $g = 9.8\ \mathrm{m\ s^{-2}}$，　$a = 1.0 \times 10^6\ \mathrm{m}$ とした時，上で求めた最短の時間 T は，何秒かを有効数字２桁で答えよ．

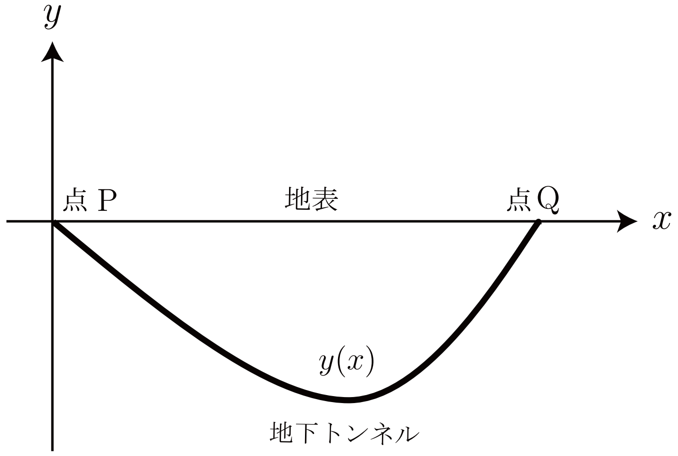

図 1

II-2 (量子力学) (100 点)

我々が観測する状態がハミルトニアンの固有状態と一致するとは限らない．例えば観測されるニュートリノの弱い相互作用の固有状態は，ニュートリノ一粒子状態のハミルトニアンの固有状態とは一致しない．このような場合に起こる量子振動現象を以下の二つの調和振動子からなる系の量子力学で考えてみよう．以下では，自然単位系 $\hbar = c = 1$ を用いる．

以下の交換関係を満たす二組の生成消滅演算子 $\hat{a}_1$, $\hat{a}_1^\dagger$, $\hat{a}_2$, $\hat{a}_2^\dagger$ で表される調和振動子を考える．

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij},\ [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \tag{A}$$

ここで，$i, j = 1, 2$，δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．系の真空 $|0\rangle$ は，

$$\hat{a}_1|0\rangle = 0,\ \hat{a}_2|0\rangle = 0 \tag{B}$$

で定義される．二つの調和振動子が相互作用している場合として，以下のハミルトニアンを考えよう．第 2 項を通じて二つの調和振動子は相互作用している．

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \omega_A \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \omega_B(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1) + \omega_C \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \\ &= (\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger) \begin{pmatrix} \omega_A & \omega_B \\ \omega_B & \omega_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{C}$$

ただし，ω_A，ω_B，ω_C は実数とする．

(1) 新しく消滅演算子を，

$$\hat{b}_1 = \hat{a}_1 \cos\theta + \hat{a}_2 \sin\theta,$$
$$\hat{b}_2 = -\hat{a}_1 \sin\theta + \hat{a}_2 \cos\theta$$

のように定義する。このとき実パラメーター θ を適当に選ぶことで，ハミルトニアンは，

$$\hat{H} = \sum_{i=1,2} \omega_i \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i = (\hat{b}_1^\dagger, \hat{b}_2^\dagger) \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix}$$

の形に書ける．このとき，$\omega_1, \omega_2, \tan 2\theta$ を ω_A，ω_B，ω_C を用いて表せ．ただし，$\omega_1 \leq \omega_2$ とする．

(2) 時刻 $t = 0$ で与えられる初期状態が $|\alpha\rangle = \hat{a}_1^\dagger|0\rangle$ であるとき，時刻 t での状態ベクトルを $|\psi(t)\rangle$ とし，時刻 t で $|\beta\rangle = \hat{a}_2^\dagger|0\rangle$ にある確率 $P(\alpha \to \beta)(t) = |\langle\beta|\psi(t)\rangle|^2$ を，ω_1，ω_2，θ を用いて表せ．

(3) 前問では時刻 $t=0$ に発生した状態 $|\alpha\rangle$ を時刻 t に状態 $|\beta\rangle$ として観測する確率を計算したが，実際に観測される確率は，以下の時間間隔 $[t-\Delta T/2, t+\Delta T/2]$ に対する時間平均

$$\overline{P}(\alpha \to \beta)(t) = \frac{1}{\Delta T}\int_{t-\Delta T/2}^{t+\Delta T/2} dt' P(\alpha \to \beta)(t') \tag{D}$$

であるとする．ただし，$t > \Delta T$ とする．このとき $\overline{P}(\alpha \to \beta)(t)$ の表式を求めよ．

(4) 問 (3) で求めた $\overline{P}(\alpha \to \beta)(t)$ を $\omega_2 > \omega_1$ のときに ΔT の関数として図示し，これの $\Delta T = 0$ での値，及び $\Delta T \gg 1/(\omega_2 - \omega_1)$ での極限値を図に明記せよ．

II-3 (統計力学) (100 点)

物質中の電子 (質量 m) の状態を考えよう．電子スピンは，z 軸を量子化軸とし $s_z = \pm 1/2$ の 2 方向しか取れない状態にある．この電子の集まり (“電子系” とよぶ) をスピンを持つ自由粒子の系と考える．以下では電子の電荷の効果は無視する．この電子系は N 個の電子からなり，体積 V の容器に入っているとする．電子の 1 粒子状態は運動量空間に一様な密度 $V/(2\pi\hbar)^3$ で分布している．スピン自由度も考慮すると，密度は $2V/(2\pi\hbar)^3$ となる．絶対零度では，電子は 3 次元運動量空間において原点を中心に描いた半径 p_F の球の内部の状態を満たし，p_F の大きさは内部の状態数が全電子数 N に等しいという条件から求めることができる．p_F をフェルミ運動量，$\epsilon_\mathrm{F} = p_\mathrm{F}^2/(2m)$ をフェルミエネルギーとよぶ．

(1) フェルミ運動量 p_F とフェルミエネルギー ϵ_F を N，V，m，$\hbar$ を用いて求めよ．また $D(\epsilon_\mathrm{F}) = dN/d\epsilon_\mathrm{F}$ で定義される状態密度 $D(\epsilon_\mathrm{F})$ を求めよ．

(2) 絶対零度における電子系の全運動エネルギー U_0 は N，ϵ_F を用いて

$$U_0 = \int_0^{\epsilon_\mathrm{F}} \epsilon D(\epsilon) d\epsilon = a_0 N \epsilon_\mathrm{F}$$

と表される．a_0 の値を求めよ．

(3) フェルミ気体とみなせる電子系の圧力は $P = -\,(dU_0/dV)$ で定義されるとし，電子系の PV を U_0 を用いて表せ．ただし，全粒子数 N は一定とする．

次に，フェルミ縮退をしている N 電子系の絶対零度における磁化 M を以下の手順で求めよう．電子スピン $s_z = \pm 1/2$ は磁気モーメント $\mp\mu_\mathrm{B}$ を持ち，外部磁場 $B(>0)$ の下でのゼーマンエネルギーは $\pm\mu_\mathrm{B}B$ である．磁場 B における $s_z = 1/2$ の電子，$s_z = -1/2$ の電子の数をそれぞれ，$N^+ = N(1-\alpha)/2$，$N^- = N(1+\alpha)/2$ とする ($\alpha > 0$)．

(4) 有限磁場での $s_z = 1/2$ の電子系が持つ運動エネルギー E^+ を，磁場 $B = 0$ のときのフェルミエネルギー ϵ_F，および N，α を用いて表せ．同様に，$s_z = -1/2$ の電子系が持つ運動エネルギー E^- を求めよ．

(5) 電子系の全ゼーマンエネルギー E_Z を N，B，μ_B，α を用いて表せ．

(6) 電子系の全エネルギーを $E_\mathrm{tot} = E^+ + E^- + E_\mathrm{Z}$ とする．$\mu_\mathrm{B}B \ll \epsilon_\mathrm{F}$ のとき E_tot は $\alpha \ll 1$ で最小値をとる．E_tot を最小にする α を求め，これに対応する電子系の磁化 M を ϵ_F，N，B，μ_B を用いて表せ．

さらに，この N 電子系の電子間に次のような相互作用が働くとする．すなわちスピンが平行な電子間の相互作用エネルギーを $-J(J \geq 0)$ とし，スピンが反平行な電子間には相互作用は働かないとする．

(7) $N \gg 1$ の条件下で，$s_z = 1/2$ の電子間に働く全相互作用エネルギーはどのように表されるか．J，N，α を用いて表示せよ．

(8) 電子系の全エネルギー E_{tot} に，スピン間に働く相互作用も考慮した全エネルギーを $\tilde{E}_{\mathrm{tot}}$ とする．$\mu_{\mathrm{B}}B \ll \epsilon_{\mathrm{F}}$，$NJ \ll \epsilon_{\mathrm{F}}$ のとき $\tilde{E}_{\mathrm{tot}}$ は $\alpha \ll 1$ で最小値をとる．$\tilde{E}_{\mathrm{tot}}$ を最小にする α を求め，対応する磁化 M を ϵ_{F}，N，B，μ_{B}，J を用いて表せ．

平成 27 年度大学院入学試験問題　III（3 時間）

注意

(1) 問題は III–1 から III–5 まで 5 問ある。この中から 3 問選択せよ．4 問以上選択した場合はすべての解答が無効になることがある．

(2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ．裏面を用いてもよい．

(3) 各解答用紙は横長に使用して，解答用紙表側の左上部（線より上）に問題番号，受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の他の部分に受験番号，氏名を書いてはいけない．この線より上の欄には表，裏とも解答を書いてはいけない．

(4) 解答用紙は 3 問すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない．

(5) 問題冊子は表紙を含めて 11 ページまである．

III–1　電磁気学：電磁波

III–2　量子力学：水素原子

III–3　統計力学：1 次相転移

III–4　実験：放射線測定

III–5　天文学：球対称ガス雲

III-1 (電磁気学：電磁波) (100 点)

Maxwell 方程式は電磁場の基本方程式であり，すべての電磁気的現象は下に示す 4 つの方程式によって記述される．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\rho(\boldsymbol{r},t)$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$ ($\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$) は，それぞれ電場強度と電束密度 (磁場強度と磁束密度) であり，誘電率 ϵ (透磁率 μ) により $\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}$ ($\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$) として関連付けられる．また，$\boldsymbol{j}$ と ρ は空間的に分布する電流密度と電荷密度である．

図 1 に示すように誘電率と透磁率がそれぞれ (ϵ_1, μ_1)，(ϵ_2, μ_2) である誘電体 1 と誘電体 2 が境界面 ($z=0$) において接触している場合を考える．ただし，$\epsilon_1<\epsilon_2$ であり，誘電体はどちらも帯電していないものとする．図 1 は zx 平面を示した図であり，y 軸は紙面に対して上向きに定義されている．

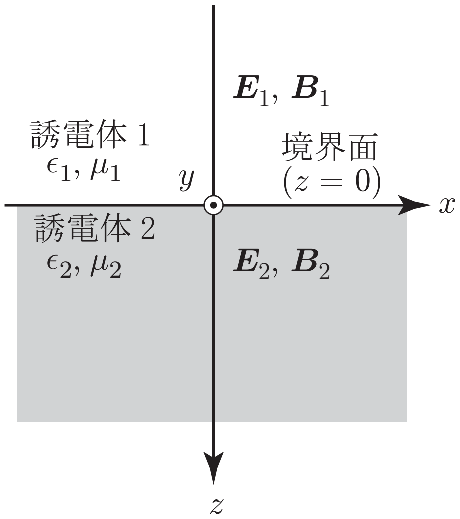

図 1

(1) 誘電体 1 の内部における電磁場の強度

$$\boldsymbol{E}_1=(E_{1x},\,E_{1y},\,E_{1z}),\ \boldsymbol{B}_1=(B_{1x},\,B_{1y},\,B_{1z})$$

と誘電体 2 の内部における電磁場の強度

$$\boldsymbol{E}_2=(E_{2x},\,E_{2y},\,E_{2z}),\ \boldsymbol{B}_2=(B_{2x},\,B_{2y},\,B_{2z})$$

とが境界面上において満たすべき境界条件を，Maxwell 方程式に基づいて導け．

(2) $\rho(\boldsymbol{r},t)=0$ であり，かつ，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{0}$ である領域において，電場強度 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ が満たすべき波動方程式を Maxwell 方程式に基づいて導け．

この誘電体の境界面に対し，図 2 に示すように，誘電体 1 の側から電磁波 A が $y=0$ の面内を角度 $\phi\,(0<\phi<\pi/2)$ で入射して，境界面上で反射波 A' と屈折波 A'' が発生する状況を考える．入射波の電場が

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{I}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ．ただし，$\boldsymbol{I}$ は電場の振幅を与える定ベクトルである．

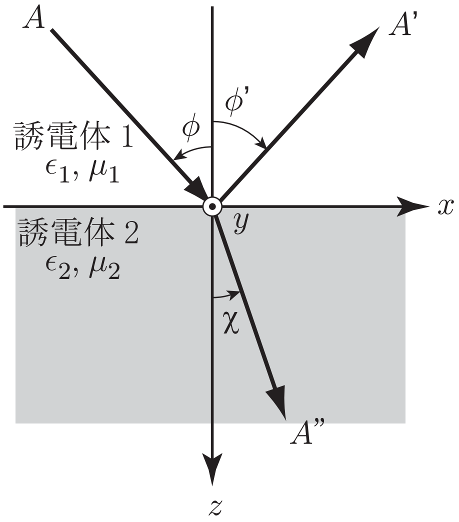

図 2

(3) 入射波の位相速度 $\boldsymbol{v}$ の絶対値を ϵ_1 と μ_1 を用いて表せ．また，この位相速度 $\boldsymbol{v}$ と電場の振幅ベクトル $\boldsymbol{I}$ が成す角を求めよ．

(4) 入射波の磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ を求めよ．

反射波 A' と屈折波 A'' の電場をそれぞれ，

$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{R}e^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega' t)},\qquad \boldsymbol{E}''(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{F}e^{i(\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}-\omega'' t)}$$

とおくことにする．

(5) 問 (1) で得た境界条件は，境界面上の任意の点において常に満たされていなければならない．この事実に基づいて，反射角 ϕ' と屈折角 χ を ϕ, ϵ_1, μ_1, ϵ_2, μ_2 のうち必要なものを用いて表せ．

III-2 (量子力学：水素原子) (100 点)

水素原子の原子核に対する電子の相対運動は次のハミルトニアンで記述される．

$$H_0 = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{|\boldsymbol{r}|}$$

ただし，μ は換算質量，e は素電荷，$\boldsymbol{p}$ は相対運動量，$\boldsymbol{r}$ は相対位置を表す．以下ではスピンと相対論的効果は無視する．

エネルギー準位と定常状態の波動関数を，デカルト座標 (x, y, z) と次の関係で与えられる放物座標 (v, w, φ) を用いて求めることを考えよう．

$$x = \sqrt{vw}\cos\varphi, \quad y = \sqrt{vw}\sin\varphi, \quad z = \frac{1}{2}(v - w)$$

各座標の取り得る値の範囲は，それぞれ $0 \leq v < +\infty$，$0 \leq w < +\infty$，$0 \leq \varphi < 2\pi$ である．また，ラプラシアン ∇^2 は次式で与えられる．

$$\nabla^2 = \frac{4}{v+w}\left(\frac{\partial}{\partial v}v\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w}w\frac{\partial}{\partial w}\right) + \frac{1}{vw}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

(1) エネルギー固有値 E の定常状態の波動関数 $\psi(v, w, \varphi)$ に対するシュレーディンガー方程式を書け．

$\psi(v, w, \varphi) = f_1(v) f_2(w) e^{im\varphi}$ とおいて v，w について問 (1) のシュレーディンガー方程式を変数分離する．$\beta_1 + \beta_2 = 1$ を満たす新たな定数 β_1，β_2 を導入すると，$f_1(v)$，$f_2(w)$ に対する方程式は以下のようになる．

$$\frac{d}{dv}\left(v\frac{df_1}{dv}\right) + \left(\frac{\mu E}{2\hbar^2}v - \frac{m^2}{4v} + \frac{\mu e^2}{\hbar^2}\beta_1\right) f_1 = 0 \tag{A}$$

$$\frac{d}{dw}\left(w\frac{df_2}{dw}\right) + \left(\frac{\mu E}{2\hbar^2}w - \frac{m^2}{4w} + \frac{\mu e^2}{\hbar^2}\beta_2\right) f_2 = 0 \tag{B}$$

(2) 上で導入した m は整数でなければならない．その理由を述べよ．

(3) 以下では $E < 0$ の解について考える．方程式 (A) において

$$E = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 N^2}, \quad v = \frac{N\hbar^2}{\mu e^2}s, \quad f_1(v) = g(s)$$

とおき，$g(s)$ に対する方程式を求めよ．

(4) 問 (3) で導入した $g(s)$ について，$s \to +\infty$，$s \to +0$ でそれぞれ漸近的に $g(s) \sim e^{-as}$，$g(s) \sim s^b$ と仮定する．$g(s)$ が $s \to +0$ で有限かつ $s \to +\infty$ でゼロになるように定数 a，b を求めよ．

(5) 問 (4) で求めた a, b を用いて，$g(s) = s^b e^{-as} h(s)$ とおき，$h(s)$ に対する方程式を求めよ．

(6) 合流型超幾何関数 $F(\alpha,\gamma; z)$ は以下で与えられる．

$$F(\alpha,\gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \cdots$$

ただし $(x)_n$ は $n \geq 1$ に対し $(x)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(x+k)$，$(x)_0 = 1$ を表す．

$F(\alpha,\gamma; z)$ は $u(z)$ に関する微分方程式

$$z\frac{d^2u}{dz^2} + (\gamma - z)\frac{du}{dz} - \alpha u = 0$$

の $z = 0$ で正則な解であり，α が 0 以下の整数の場合は多項式となるが，それ以外の場合は $z \to +\infty$ で漸近的に

$$F(\alpha, \gamma; z) \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-\gamma} e^z$$

のように振る舞う．このことを用いて $h(s)$ として許される解を求めよ．また，このとき導入される非負の整数の量子数を n_1 とおき，これを N，β_1，m を用いて書き下せ．

(7) $f_2(w)$ についても新たに非負の整数の量子数 n_2 を導入しその解を求める．方程式 (B) に対して問 (3)–(6) の手続きを考えると，問 (6) の量子数 n_1 を n_2 で置き換えた解が $f_2(w)$ の解として得られる．結局，エネルギー準位 E と波動関数 $\psi(v, w,\varphi)$ は量子数 (n_1, n_2, m) で完全に指定される．E をこれらの量子数で表せ．

III-3 (統計力学：1次相転移) (100 点)

磁気モーメントを持つ N 個の粒子の間に距離によらない相互作用が働く次のような系を用いて，磁性体の相転移について考える．すなわち，粒子 i ($i = 1, \ldots, N$) の磁気モーメントを $\boldsymbol{\mu}_i$ とするとき，すべての粒子対 (i, j) が相互作用エネルギー $-\dfrac{J}{N}\boldsymbol{\mu}_i \cdot \boldsymbol{\mu}_j$ ($J > 0$) をもつとする．したがって，ハミルトニアンは

$$H(\{\boldsymbol{\mu}_i\}) = -\frac{J}{N}\sum_{(i,j)} \boldsymbol{\mu}_i \cdot \boldsymbol{\mu}_j = -\frac{J}{2N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \boldsymbol{\mu}_i \cdot \boldsymbol{\mu}_j \tag{A}$$

で与えられる．ただし，磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}_i$ は，図 1 に示すような互いに 120° の角度をなす 3 つの向きのいずれかを取るベクトルとし，その大きさは $\mu = |\boldsymbol{\mu}_i|$ とする．また，図 1 のように磁気モーメントの向きにしたがって粒子の状態 1, 2, 3 を定める．状態 1 の向きは x 軸の正の向きである．

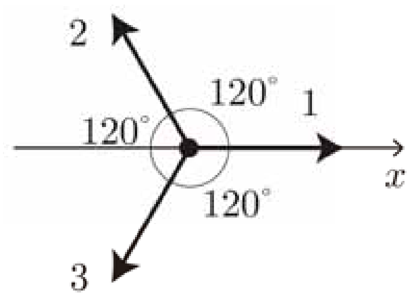

図 1

(1) 状態 1，2，3 を取る粒子数をそれぞれ N_1，N_2，N_3（したがって $N_1 + N_2 + N_3 = N$）とするとき，全磁化 $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\mu}_i$ の x 成分 M を (N_1, N_2, N_3) を用いて表す式を求めよ．また、同様にハミルトニアン (A) を (N_1, N_2, N_3) を用いて表すと，

$$H(N_1, N_2, N_3) = \frac{J\mu^2}{4N}\left[2N - (N_1 - N_2)^2 - (N_2 - N_3)^2 - (N_3 - N_1)^2\right] \tag{B}$$

となることを示せ.

(2) (N_1, N_2, N_3) に対応する系全体の状態 $\{\boldsymbol{\mu}_i\}$ の数を $\nu(N_1, N_2, N_3)$ とすると，エントロピーは $S(N_1, N_2, N_3) = k_{\mathrm{B}} \log \nu(N_1, N_2, N_3)$ で与えられる．ただし，k_{B} はボルツマン定数である．N が大きいときのスターリングの公式 $\log N! \simeq N \log N - N$ を用いて，$N_1 \gg 1$, $N_2 \gg 1$, $N_3 \gg 1$ における $S(N_1, N_2, N_3)$ の漸近形を求めよ．

この系の温度 T における分配関数 $Z_N(T) = \sum_{\{\boldsymbol{\mu}_i\}} \exp\left[-\frac{H(\{\boldsymbol{\mu}_i\})}{k_\mathrm{B}T}\right]$ は，

$$F(T; N_1, N_2, N_3) = H(N_1, N_2, N_3) - TS(N_1, N_2, N_3) \tag{C}$$

とおくと，N の分割 (N_1, N_2, N_3) についての和

$$Z_N(T) = \sum_{(N_1,N_2,N_3)} \exp\left[-\frac{F(T; N_1, N_2, N_3)}{k_\mathrm{B}T}\right] \tag{D}$$

で表される．また，式 (D) が成り立つとき，系の自由エネルギー $F(T)$ は $N \to \infty$ で漸近的に $F(T; N_1, N_2, N_3)$ の最小値と一致する．すなわち，

$$F(T) = \min_{(N_1,N_2,N_3)} F(T; N_1, N_2, N_3) \tag{E}$$

が成り立つ．このことを用いて系の熱力学的性質を議論しよう．

(3) $N_2 = N_3$ を仮定すると，$F(T; N_1, N_2, N_3)$ を (N_1, N_2, N_3) の代わりに磁化 M を用いて表すことができる．この関数 $F(T; M)$ を求めよ．

(4) $N_2 = N_3$ の条件の下で，$F(T; M)$ の極値を与える磁化 M が満たすべき式を求めよ．

(5) 高温から温度を下げていくと，ある温度 T_c で磁化 M が 0 から $M_s(\neq 0)$ へ不連続に変化する 1 次相転移が起きた．T_c と M_s が満たすべき式を $F(T; M)$ を用いて表せ．

(6) $M_s = N\mu/2$ が問 (5) の条件を満たすことを示し，転移温度 T_c を求めよ．

III-4 (実験：放射線測定) (100 点)

放射線測定について考えよう．線源から出るエネルギー E_0（ただし E_0 は　1MeV 領域）の　線（光子）のエネルギーを測定する．図 1 (a) に示す実験装置，シンチレータと光電子増倍管を使用し，図 1 (b) のエネルギースペクトルを測定した．エネルギースペクトルに見られるエネルギー値 E_1，E_2 は $E_1 \simeq E_0$，$E_1 > E_2$ の関係がある．

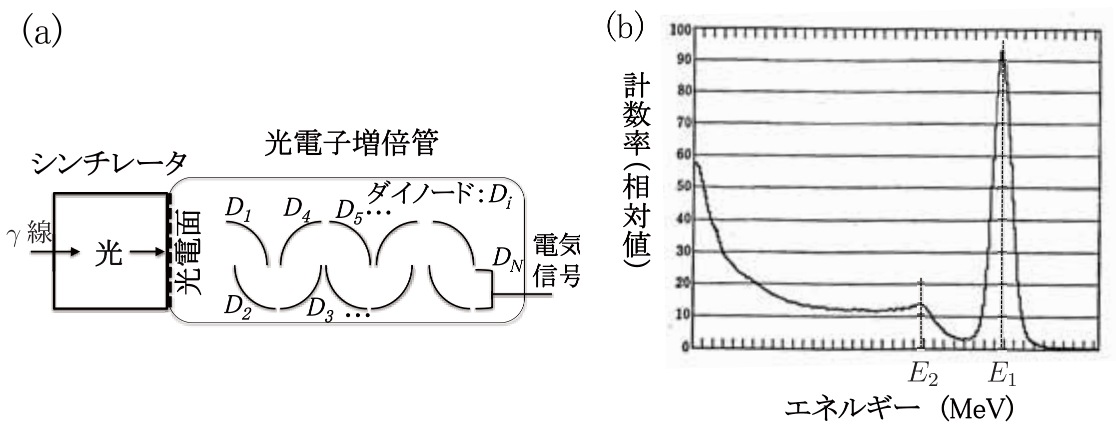

図 1

(1) 実験で使用したシンチレータは，(i) プラスチックシンチレータ，(ii) NaI(Tl) シンチレータのどちらか．そのシンチレータを選んだ理由も説明せよ．

図 1 (a) に光電子増倍管の模式図を示す．光電子増倍管は光を電気信号に変え，さらに増幅する装置で，微弱なシンチレーション光の測定に使用する．光電子増倍管には N 個のダイノード（D_1〜D_N）があり，光電面と第 1 ダイノード（D_1），第 i ダイノード（D_i）と第 $(i+1)$ ダイノード（D_{i+1}）の間（ただし $i = 1$　$N-1$）にはそれぞれ V/N の電圧がかかっている．各ダイノードにおける電子数の増幅率を $\alpha V/N$ とする．

(2) 光電子増倍管の動作原理を，光電面，ダイノードという言葉を使って説明せよ．

(3) 光電子増倍管の増幅率を求めよ．

(4) 光電子増倍管からの信号を処理するために，高周波信号のみを通す回路（ハイパスフィルター）を抵抗とコンデンサーのみで作りたい．どのような回路を作ればよいか．入力電圧を v_i，出力電圧を v_o，グラウンドは GND，抵抗 R，コンデンサー C，として回路図を書け．

図１ (b) の　線のエネルギースペクトルには二つの特徴がある．一つはエネルギー E_1 のピーク構造，もう一つはエネルギー E_2 以下の連続分布構造である．

(5) このエネルギー E_1 のピーク構造をつくる　線と物質との反応について説明せよ．

エネルギー E_2 以下はコンプトン散乱によるものが支配的である．以下，コンプトン散乱について考え，そのおこる回数は１回と仮定する．電子はその束縛エネルギーを無視して自由粒子として考える．図２のように，入射　線（光子）の４元運動量を $(E_0, \boldsymbol{p}_0 c)$，検出器中の電子の４元運動量を $(m_e c^2, \boldsymbol{0})$ として，電子は最初止まっているとする．m_e は電子の質量，c は光速である．散乱後の，　線の４元運動量を $(E_\gamma, \boldsymbol{p}_\gamma c)$，電子の４元運動量を $(E_e, \boldsymbol{p}_e c)$ とする．入射　線と散乱　線とのなす角（散乱角）は　とする．

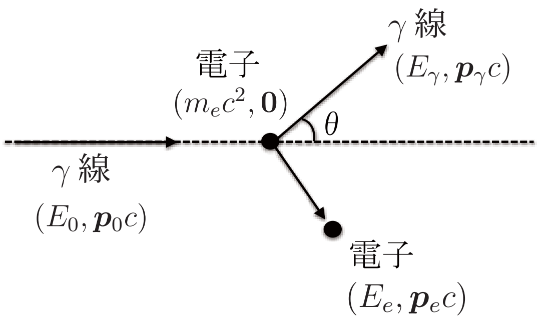

図２

(6) エネルギー運動量保存則を使って E_γ を計算せよ．答えは E_0，m_e，　，c を用いて表せ．

(7) 　線が後方散乱した場合，測定装置で観測されるエネルギーが最大となり，図１ (b) の E_2 となる．この E_2 を求めよ．答えは E_0，m_e，c を用いて表せ．

(8) 束縛されていない自由電子においては，問 (5) の反応はおこらないことを示せ．

III-5 (天文学：球対称ガス雲) (100 点)

星間ガスから星への進化の初期段階にある半径 R，質量 M のガス雲が，自己重力で自由落下して収縮する場合を考える．なお，以下の設問において必要であれば末尾に掲載する数値を用いよ．

(1) 球対称の運動方程式

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\rho \frac{GM(r)}{r^2}$$

より，平均密度が 10^{-19}kg m^{-3} のガス雲について，自由落下時間のオーダーを計算すると $\sim 10^A$ 年となる．ベキ指数 A を求めよ．ただし，ρ は密度，v は速度，$M(r)$ は半径 r 内の質量，G は万有引力定数である．

こうして収縮したガス雲は圧力が高まり圧力勾配が利くようになる．球対称なガス雲の力学的平衡状態について考えてみよう．ガスは理想気体でポリトロピック状態方程式 $p = K\rho^{1+1/n}$ を満たすものとする．ここで p は圧力，K は定数，n はポリトロピック指数である．

(2) このガス球の静水圧平衡の式を書け．

(3) 問 (2) の式と次の質量保存の式

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

から $M(r)$ を消去し，ポリトロピック状態方程式を用いると

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) K \frac{d}{dr}\left(r^2 \rho^{\frac{1}{n}-1} \frac{d\rho}{dr}\right) = B$$

となる．B を求めよ．

(4) ここで $r = \alpha\xi$ とし，$\rho = \rho_c \theta^n$ と変数変換すると

$$\frac{(n+1)K\rho_c^{(1-n)/n}}{4\pi G\alpha^2} \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right) = C$$

となる．ただし，α は定数，ρ_c は中心密度である．C を求めよ．

左辺の係数が 1 となるように α を定めれば，Lane と Emden が導いた方程式が得られる．以下の問では左辺の係数を 1 として答えよ．

(5) Lane-Emden 方程式は，中心 $\xi = 0$ における境界条件 $\theta(0) = 1$ と，$\theta'(0) = 0$ のもとで解くことができる．この境界条件の物理的意味を簡単に述べよ．また，$n = 1$ に対する解析解 $\theta(\xi)$ を求めよ（ヒント：変数変換 $\theta = \chi/\xi$ を用いよ）．

(6) 問 (5) の解ではガス球の表面 ξ_1 では $\theta(\xi_1) = 0$ となる．ξ_1 を求めよ．

(7) 太陽質量 $M_\odot$ と太陽半径 $R_\odot$ をもつ $n = 1$ のガス球の中心密度，中心温度を有効数字 1 桁の数値で計算せよ．ただしガスは電離水素からなるとせよ．

$G \simeq 7 \times 10^{-11}\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$，電離水素ガスの平均分子量 $\mu \simeq 0.5$，原子質量単位 $m_u \simeq 2 \times 10^{-27}\mathrm{kg}$，ボルツマン定数 $k_\mathrm{B} \simeq 1 \times 10^{-23}\mathrm{J\ K^{-1}}$，太陽質量 $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}\mathrm{kg}$，太陽半径 $R_\odot \simeq 7 \times 10^8\mathrm{m}$，1 年 $\simeq 3 \times 10^7$秒．

平成27年度大学院入学試験問題　IV（1時間）

英語　（100点）

注意

(1) 問題IV–1，IV–2の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ．裏面を用いてもよい．

(2) 各解答用紙は横長に使用して，解答用紙表側の左上部（線より上）に問題番号，受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の他の部分に受験番号，氏名を書いてはいけない．この線より上の欄には表，裏とも解答を書いてはいけない．

(3) 解答用紙は2問すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない．

(4) 問題冊子は表紙を含めて5ページまである．

IV-1

以下の英文は Daniel Kleppner 著 “Master Michelson’s measurement” からの抜粋である．読んで以下の問 (1)〜(3) に答えよ．

Albert A. Michelson,

著作権保護のためここは

空欄にしてあります。

(*a*)

(注)

Foucault: フーコー (フランスの物理学者),　revolving: 回転する

get sidetracked: 横道にそれる，　sojourn: 滞在，　interferometer: 干渉計

ether: エーテル

(1) Foucault の光速測定の方法について, 100 字程度の日本語で説明せよ.

(2) Michelson が行った改良とその結果について, 200 字程度の日本語で説明せよ.

(3) 下線部 (a) を和訳せよ.

IV-2

以下は朝永振一郎著「光子の裁判–ある日の夢–」からの抜粋である . ここでの被告とは光子のことである. 読んで以下の問 (1)〜(3) に答えよ.

「[redacted] (a) [redacted] [中略]

[redacted] (b) [redacted] [中略]

[redacted] (c) [redacted]

(注)
被告: defendant

(1) 下線部 (a) を英訳せよ.

(2) 下線部 (b) を英訳せよ.

(3) 下線部 (c) を英訳せよ.

（このページは白紙である）