京都大学大学院理学研究科物理学・宇宙物理学専攻

平成26 年度大学院入学試験問題

入試問題は以下の通りです。ただし、英語だけは原典の著作権保護のために、文章を点線にしてあります。文章については原典を参照してください。また、当日、試験時間内に3つの修正・加筆を行いました。修正点は下記問題に赤字にて説明してあります。

平成 25 年度専攻教育委員会

平成26年度大学院入学試験問題　I（3時間）

注意

(1) 問題I–1，I–2，I–3の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ．裏面を用いてもよい．

(2) 各解答用紙は横長に使用して，解答用紙表側の左上部（線より上）に問題番号，受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の他の部分に受験番号，氏名を書いてはいけない．この線より上の欄には表，裏とも解答を書いてはいけない．

(3) 解答用紙は3問すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない．

(4) 問題冊子は表紙を含めて6ページまである．

I-1 (力学) (100 点)

経路に沿った座標 s が，その地点での接線の水平に対する傾斜角 θ を用いた関数で表される形状のなめらかな床を考える．この床の上にある，質量 m の質点について，座標 s に沿った運動を考えよう．図 1 のように，質点が時刻 $t=0$ に $s=0$ の地点から初速度 v_0 で床の上を動き始めるとする．s, θ は図 1 の矢印の方向を正とし，重力加速度は g とする．

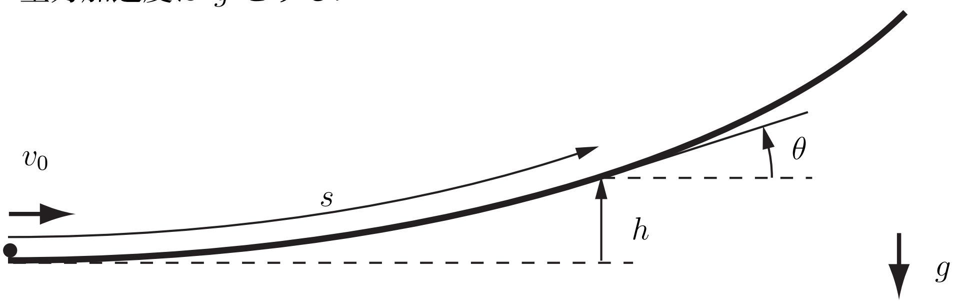

図 1

まず，床の形状が，$s=-a\sin\theta$ ($0 \le s \le a$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le 0$, a は正の定数) で表される場合を考える．なお，$\theta \le 0$ なので，図 1 とは異なり，床の形状は右下がりとなることに注意せよ．

(1) $s=0$ の地点を基準とする，質点の位置エネルギーを θ の関数として求めよ．ヒント：高さを h とすると $dh/ds = \sin\theta$ となることに注意．

(2) 経路に沿った質点の速度を v ($\equiv ds/dt$) として，v^2 を θ の関数として求めよ．

(3) 経路の曲率半径 ρ を θ の関数として求めよ．

(4) この質点に対する床の垂直抗力 N を θ の関数として求めよ．また，この質点が床から離れる地点の座標 s を a, g, v_0 を用いて表せ．

次に，床の形状が $s=a\sin\theta$ ($-a \le s \le a$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, a は正の定数) で表される場合について考える．

(5) この質点が床の範囲 ($-a \le s \le a$) の外に出ないための v_0 の条件を求めよ．また，この条件下で質点が経路に沿った座標 s で単振動することを示し，その角振動数 ω_0 を求めよ．

(6) この質点に対し，経路に沿った速度 v に比例する抵抗力 $-2m\beta v$ ($\beta > 0$) が働くとする．この質点が床の範囲の外に出ない条件のもとで，質点が $s<0$ の領域へ行かないための β の最小値 β_0 を求めよ．

(7) 問 (6) で求めた $\beta = \beta_0$ の抵抗が働くとき，この質点が床の範囲の外に出ないための v_0 の条件を a, g を用いて表せ．

(8) この質点に対して，問 (6) で求めた $\beta = \beta_0$ の抵抗と，経路に沿った外力 $f = mg\cos(\Omega t)$ が働くとする．十分に時間が経過した後に単振動をしている質点の座標 s を，a, Ω と r $(\equiv \Omega/\omega_0)$ を用いて，t の関数として表せ．ただし，ω_0 は問 (5) で求めた ω_0 である．また，その単振動の振幅の絶対値と，位相の遅れを，それぞれ r を横軸として図示せよ．なお，十分な時間が経過するまでの間に，質点は床の範囲の外には出ていないものとする．

I-2 (電磁気学) (100 点)

導体球近傍に置かれた点電荷がつくる静電ポテンシャルについて，鏡像法を用いて考える．以下では，真空中で考え，その誘電率を ε_0 とする．

図 1 のように半径 R の導体球の中心を原点 O とし，電荷量 q $(q > 0)$ の点電荷 A を $(x, y, z) = (0, 0, d)$ $(d > R)$ に置いた．なお，解答に際しては，必要に応じて球座標

$$
\begin{aligned}
x &= r \sin\theta \cos\varphi \\
y &= r \sin\theta \sin\varphi \\
z &= r \cos\theta
\end{aligned}
$$

を用いよ．

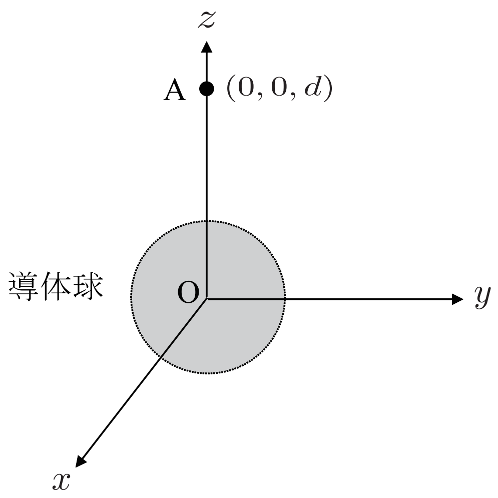

図 1

(1) まず，導体球が接地された場合について考える．導体球の表面で静電ポテンシャルは一定である．導体球に誘起された電荷の代わりに，電荷量 q_{B} の仮想の点電荷 B を $(0, 0, d_{\mathrm{B}})$ に置いて考えることとする．点電荷 A，B が導体球の外側の任意の点につくる静電ポテンシャル ϕ を，q_{B} と d_{B} を含む式で表せ．この結果から，q_{B} と d_{B} を R, d, q を用いて表せ．

(2) 次に，導体球が接地されておらず，電荷を持たない場合について考える．このとき問 (1) で求めた仮想の点電荷 B に加えて，仮想の点電荷 C を置いて考えればよい．この仮想点電荷 C の位置 $(0, 0, d_{\mathrm{C}})$，およびその電荷量 q_{C} を求めよ．また，このとき導体球が点電荷 A に及ぼす力の向きと大きさを求めよ．

(3) 次に，導体球が接地されておらず，かつ電荷量 Q $(Q > 0)$ を持つ場合について考える．点電荷Aには，問 (2) で求めた力に加えて導体球に与えられた電荷 Q による力が働く．点電荷Aの位置を z 軸方向に動かしたところ両者の力が釣り合った．このとき Q/q を d と R を用いて表せ．また，$Q \gg q$ のとき，

$$d \simeq R\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{Q}}\right)$$

と書けることを示せ.

次に，導体球を接地して，点電荷Aに加えて，電荷量 $-q$ の点電荷Dを $(x, y, z) = (0, 0, -d)$ に置いた．以下では，q/d^2 を一定としたまま，$d, q \to \infty$ の極限について考える．

(4) 鏡像法を用いて，点電荷A, Dが導体球の外側につくる静電ポテンシャル ϕ を上の極限で求めよ．

(5) 導体球がない場合は，点電荷A, Dが原点付近につくる電場は一様となる．その大きさ E_0 を求めよ．

(6) 問 (4) で求めた静電ポテンシャル ϕ から，導体球面に誘起される電荷分布 σ を求めよ．解答は，E_0 を用いて示せ.

I-3 (物理数学) (100 点)

以下の各問に答えよ.

(1) 次の定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \cos x^2\,dx$

(c) $\displaystyle \mathrm{PV}\int_{0}^{\infty} \frac{x^\alpha}{1-x}\,dx$

ただし PV は主値を表し, $-1<\alpha<0$ とする.

(2) 複素数 z に関する次の複素関数 $f(z)$ を考える. (x は z と独立な実変数である.)

$$f(z) = \exp\left\{\frac{x}{2}(z - z^{-1})\right\} \tag{A}$$

(a) $f(z)$ を $z=0$ の周りでローラン展開することで,

$$f(z) = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\{z^n + (-z)^{-n}\} \tag{B}$$

と変形できること, かつ, 式 (B) 中の $J_n(x)$ が

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)\,d\theta \tag{C}$$

と書けることを示せ.

(b) 式 (A) と式 (B) を用いて, $J_n(x)$ を $x=0$ の周りでテイラー展開した表式を求めよ.

(c) 前問 (b) で求めた展開式 $J_n(x)$ が次の方程式の解になっていることを示せ.

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}J_n(x) + x\frac{d}{dx}J_n(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0 \tag{D}$$

（このページは白紙である）

平成26年度大学院入学試験問題　II（3時間）

注意

(1) 問題II–1，II–2，II–3の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ．裏面を用いてもよい．

(2) 各解答用紙は横長に使用して，解答用紙表側の左上部（線より上）に問題番号，受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の他の部分に受験番号，氏名を書いてはいけない．この線より上の欄には表，裏とも解答を書いてはいけない．

(3) 解答用紙は3問すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない．

(4) 問題冊子は表紙を含めて7ページまである．

II-1 (力学) (100 点)

3 次元空間 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ にある静止質量 m_0 の質点の相対論的ラグランジアンは，

$$L = -m_0 c\sqrt{c^2 - v^2} - U(\boldsymbol{r}) \tag{A}$$

と書ける．ここで， c は光速，$\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$，$v \equiv |\boldsymbol{v}|$，$U(\boldsymbol{r})$ はポテンシャルである．

(1) オイラー・ラグランジュ方程式をたて，相対論的運動方程式

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F} \equiv -\boldsymbol{\nabla} U \tag{B}$$

を導け．ただし，$\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ である．

以下，静止質量 m_0，電荷 $-e$ (< 0) の相対論的電子のラグランジアンが，

$$L = -m_0 c\sqrt{c^2 - v^2} - \frac{k}{2} r^2 - e\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{C}$$

（k は正の定数，$r \equiv |\boldsymbol{r}|$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ はベクトルポテンシャル）で与えられる場合，どのような振動が生じるかを，以下のように調べてみよう．ただし，電子からの電磁波放射は無視できるとする．

(2) 式 (C) から，相対論的電子の運動方程式

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 \boldsymbol{v}) = -k\boldsymbol{r} - e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{D}$$

を導け．ここで， $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ は磁束密度である．

(3) $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$，$k = 0$ のとき，γ が一定となることを式を用いて示し，その物理的理由を述べよ．

以下，一様な定磁場を考え，$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ $(B > 0)$ とおく．

(4) $k = 0$ の条件下で運動方程式を解き，電子の運動を求めよ．

(5) $k > 0$ のときは，一般に γ は一定とならないが，近似的に γ がほぼ一定として運動方程式を解き，電子の x-y 面上の運動に，二つの異なる振動数をもつモードが生じること，およびその振動数の絶対値の差は，B に比例することを示せ．

（このページは白紙である）

II-2 (量子力学) (100 点)

ハミルトニアンが $H = H_0 + \tilde{H}(t)$ のように，時間に依存する小さな部分 $\tilde{H}(t)$ を持つ量子力学系を考えよう．

(1) この系の状態 $|\psi(t)\rangle$ を，H_0 の完全系 $|n\rangle$ $(H_0|n\rangle = E_n|n\rangle, n = 0, 1, 2, \cdots)$ を使って，

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) e^{-iE_n t/\hbar}|n\rangle \tag{A}$$

と表すとき，$a_n(t)$ の満たす微分方程式を求めよ．

(2) 初期 $t = -\infty$ にこの系が H_0 の固有状態 $|M\rangle$ にあったとして，$t = \infty$ で，この系が状態 $|N\rangle$ $(N \neq M)$ にある確率 P_{MN} を $\tilde{H}$ についての摂動論の（自明でない）最低次で表せ．

次に，座標 x で表される 1 次元空間にある質量 m の粒子のハミルトニアンが，

$$H_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \tag{B}$$

（$\hat{x}, \hat{p}$ はそれぞれ，この粒子の座標演算子と運動量演算子, ω は正の定数）と，時間に依存する

$$\tilde{H}(t) = q\,\hat{x}\,e^{-(t/\tau)^2} \tag{C}$$

（q, τ は正の定数）からなるときを考えよう．

(3) ハミルトニアン H_0 の基底状態と第 1 励起状態について，それぞれの規格化された波動関数を $A = m\omega/\hbar$ と x のみを使って表せ．またそれらのエネルギー固有値を $\hbar$ と ω を使って表せ．

ヒント：それらの状態の波動関数は，ガウス関数 $e^{-\beta x^2}$（β はある正の定数）と座標 x の多項式の積で表される．また，以下の数学公式を参考にしてもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (\alpha \text{ は正の定数}) \tag{D}$$

(4) この粒子が当初 $(t = -\infty)$，H_0 の基底状態にある．問 (2) の結果から，摂動論の最低次では，$t = \infty$ で H_0 のどの固有状態への遷移確率がゼロではないかを理由とともに述べよ．また，それらの状態への遷移確率を $\hbar, m, \omega, q, \tau$ のみを使って表せ．

（このページは白紙である）

II-3 (統計力学) (100 点)

一様な磁場 H がかけられている3次元理想フェルミ気体を考える．各フェルミ粒子は質量 m，スピン 1/2 を有し，スピンと磁場の間にはゼーマン相互作用が働いている．フェルミ粒子は電荷を持たず，磁場によるローレンツ力は働かないとする．また，系の体積は V とする．この系の熱力学ポテンシャル Ω は次式で与えられる．

$$\Omega = k_{\mathrm{B}}T\sum_{\boldsymbol{k},s}\ln[1-f(\varepsilon_{\boldsymbol{k}s})] \tag{A}$$

$$f(\varepsilon_{\boldsymbol{k}s}) = \frac{1}{\exp(\frac{\varepsilon_{\boldsymbol{k}s}-\mu}{k_{\mathrm{B}}T})+1} \tag{B}$$

$$\varepsilon_{\boldsymbol{k}s} = \frac{\hbar^2|\boldsymbol{k}|^2}{2m} - sg\mu_{\mathrm{B}}H \tag{C}$$

ここで k_{B} はボルツマン定数，$\hbar$ はプランク定数，T は温度，μ は化学ポテンシャル，$\varepsilon_{\boldsymbol{k}s}$ は運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ とスピンの磁場方向成分 s をもつ1個のフェルミ粒子のエネルギーで，式 (C) 右辺第1項は運動エネルギー，第2項はゼーマンエネルギーである．g は g-因子，μ_{B} はボーア磁子でそれぞれ定数である．s は 1/2，または $-1/2$ の値をとる．また，式 (B) で定義される $f(\varepsilon_{\boldsymbol{k}s})$ はエネルギー $\varepsilon_{\boldsymbol{k}s}$ を持つフェルミ粒子のフェルミ分布関数である．以下では μ が温度に依存しない正の一定値の場合を考える．

(1) スピン s を持ち，エネルギーが $\varepsilon_{\boldsymbol{k}s}=\varepsilon$ であるような1粒子状態の状態密度 $D_s(\varepsilon)$ を ε と s の関数として求めよ．結果は，$\varepsilon, s, m, \hbar, g, \mu_{\mathrm{B}}, H, V$ のうち，必要なものを用いて表せ．ただし，$D_s(\varepsilon)$ は，スピン s を持ち，エネルギーが 0 から ε の間にある全ての1粒子状態の数を $N_s(\varepsilon)$ として，$D_s(\varepsilon)=dN_s(\varepsilon)/d\varepsilon$ で定義される．

(2) 式 (A) からこの系のエントロピー S の表式を導出し，結果をフェルミ分布関数 $f(\varepsilon_{\boldsymbol{k}s})$ と k_{B} のみを用いて表せ．

(3) エントロピー S 一定のもとでの温度 T の磁場 H による微分，

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S$$

を定磁場比熱 C_H，温度 T，および

$$\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H$$

を用いて表せ．

訂正 1

【誤】 ，エネルギーが 0 から ε の間にある

【正】 ，エネルギーが ε 以下である

ただし，M は磁化で，

$$M = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial H}\right)_T$$

で与えられる．また，定磁場比熱 C_H は

$$C_H = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H$$

で与えられる．

(4) 以下では $\frac{1}{2}g\mu_{\rm B}H < \mu$ であるとする．低温領域 $k_{\rm B}T \ll \mu \pm \frac{1}{2}g\mu_{\rm B}H$ の場合を考える．C_H を温度 T について，0 でない最低次数まで展開して求めよ．結果は $k_{\rm B}$, T, m, $\hbar$, μ, g, $\mu_{\rm B}$, H, V のうち，必要なものを用いて表せ．ただし，必要であれば以下の関係式を用いてよい．$F(\varepsilon)$ を ε の関数，a を $a+\mu>0$ を満たす定数として，フェルミ分布関数 $f(\varepsilon)$ に対して，$k_{\rm B}T \ll \mu + a$ で次式が成立する．

$$\int_{-a}^{\infty} d\varepsilon F(\varepsilon)\left(-\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right) = F(\mu) + \frac{\pi^2}{6}(k_{\rm B}T)^2 \left.\frac{d^2F(\varepsilon)}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=\mu} + O(T^4) \qquad \text{(D)}$$

(5) 問 (4) と同じ条件下で $(\partial M/\partial T)_H$ を温度 T について，0 ではない最低次数まで展開して求めよ．結果は $k_{\rm B}$, T, m, $\hbar$, μ, g, $\mu_{\rm B}$, H, V のうち，必要なものを用いて表せ．

(6) 断熱消磁法（断熱的に印加磁場を減少させることによって温度を低下させる方法）を用いて，この系の温度を低下させることを考える．磁場 $H = H_0$ のとき，系の温度が $T = T_0$ であったとする．また，$k_{\rm B}T_0 \ll \mu$，および $g\mu_{\rm B}H_0 \ll \mu$ であるとする．この状態から断熱的に磁場を減少させることによって，この系が到達できる最低温度を求めよ．結果は H_0, T_0, $k_{\rm B}$, m, $\hbar$, μ, g, $\mu_{\rm B}$, V のうち，必要なものを用いて表せ．

また，この結果を用いて，この系を，上記の範囲の磁場で絶対零度 $T=0$ に到達させることが可能かどうか，理由とともに答えよ．

平成 26 年度大学院入学試験問題　III（3 時間）

注意

(1) 問題は III–1 から III–5 まで 5 問ある。この中から 3 問選択せよ．4 問以上選択した場合はすべての解答が無効になることがある．

(2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ．裏面を用いてもよい．

(3) 各解答用紙は横長に使用して，解答用紙表側の左上部（線より上）に問題番号，受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の他の部分に受験番号，氏名を書いてはいけない．この線より上の欄には表，裏とも解答を書いてはいけない．

(4) 解答用紙は 3 問すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない．

(5) 問題冊子は表紙を含めて 13 ページまである．

III–1　電磁気学（円筒コンデンサ）

III–2　量子力学（磁束と粒子）

III–3　統計力学（おもりと理想気体）

III–4　実験（相対論的粒子の測定）

III–5　天文学

III-1 (電磁気学：円筒コンデンサ) (100 点)

図1 のような半径 a, b $(a < b)$ の 2 つの中空円筒導体で構成される同軸円筒コンデンサを考え，軸と平行に x 軸をとる．極板の厚さと抵抗は無視できるほど小さく，また，円筒の長さはこれらの半径に比べて十分に長く，両端部での電場の乱れは無視できるものとする．両極板間は空気で満たされており，空気の誘電率，透磁率はそれぞれ真空中と同じ値 ε_0, μ_0 であるものとする．

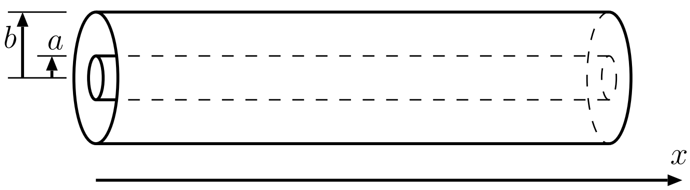

図1

(1) この円筒コンデンサの x 方向の単位長さあたりの静電容量 C，および x 方向の単位長さあたりの自己インダクタンス L を求めよ．

(2) 外周電極に対し，内周電極に電位差 V $(V > 0)$ を与えたとき，極板間の電場強度の最大値 $E_{\max}$ を V, a, b で表せ．また，特定の外周電極半径 b に対し $E_{\max}$ を最も低く抑えるには内周電極半径 a をいくらにすればよいか．

(3) 密度 ρ，誘電率 ε の非導電性誘電体液体に，図2 のようにコンデンサの一端を液面に対して垂直に差し込んだ状態で，電極間に電位差 V を与える．この状態での外部の液面高さに対する極板間の液面の高さを，鉛直上向きを正として求めよ．重力加速度を g とし，液面の形状は水平を保ったまま高さのみ変わるものとしてよい．

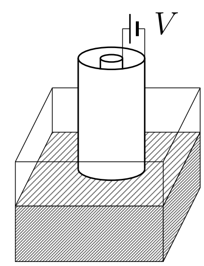

図2

(4) 図3 のように外周電極を接地した状態で，内周電極の一端で極板間の電位差を急に変化させたとき，厚さ dx 間での電流と電位の変化を dI, dV として，それらの伝達過程を考え，問 (1) の結果と合わせることで電位差の変化が x 方向に光速で伝わることを示せ．

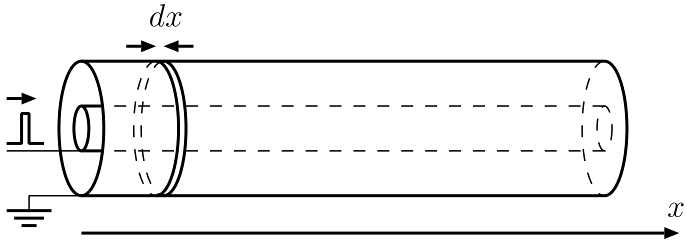

図3

このコンデンサを幅 Δx で分割して考えると，各部分での静電容量と自己インダクタンスを $\Delta C(\equiv C\Delta x), \Delta L(\equiv L\Delta x)$ として，等価回路は図4 のように表すことができる．

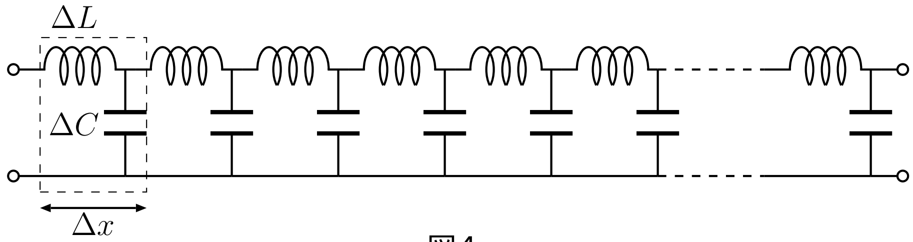

図4

(5) この回路が無限に続くものとして，左端に角振動数 ω の交流電圧を与えたときの全インピーダンス Z を求めよ．
ヒント： 図4 の破線枠内の回路を減らしても Z は変化しない．

(6) この等価回路では，ある一定の角振動数 ω_0 より角振動数が大きい交流は右へ伝わるほど減衰する．この角振動数 ω_0 を求めよ．

(7) $\Delta x \to 0$ の極限での Z, ω_0 の値を求め，この円筒コンデンサを電気信号の伝達媒体として用いるときの特徴を述べよ．

III-2 (量子力学：磁束と粒子) (100 点)

質量 m，電荷 e を持つ粒子が円周の長さが L の円上を 1 次元運動を行うものとし，粒子の円周上での位置を 1 次元座標 x で表す（図 1）．粒子にはポテンシャル $V(x)$ が作用しているとする．この円の内部を大きさ Φ の磁束が貫いている場合を考える．このとき，磁束は円の中心を通る細い管（円が存在する平面に垂直な方向に伸びている）の中に閉じ込められており，円周上での磁束密度は 0 であるとする．この粒子の量子力学的な定常運動を記述するシュレーディンガー方程式は，

$$H\psi(x) = E\psi(x) \tag{A}$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{d}{dx} - e\frac{\Phi}{L}\right)^2 + V(x) \tag{B}$$

で与えられる．ただし，Φ/L は円周上におけるベクトルポテンシャルの周方向成分である．また，以下では，$\psi(L) = \psi(0)$ という境界条件が成り立つとする．

(1) 変換 $\tilde{\psi}(x) = e^{i\theta(x)}\psi(x)$ で位相 $\theta(x)$ を適当に選ぶことによって，変換後の波動関数 $\tilde{\psi}(x)$ は，

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\tilde{\psi}(x) = E\tilde{\psi}(x) \tag{C}$$

を満たすようにできる．このときの $\theta(x)$ を求めよ．ただし，$\theta(0) = 0$ とする．

(2) 問 (1) のとき，$\tilde{\psi}(x)$ の満たすべき境界条件は，

$$\tilde{\psi}(L) = e^{i\chi}\tilde{\psi}(0) \tag{D}$$

となる．χ を求めよ．

(3) 波動関数 $\psi(x)$ の導関数が $x = L$ で連続であるという条件を，式 (D) を用いて，$\tilde{\psi}(x)$ についての条件に書き換えよ．

(4) $V(x) = 0$ のとき，エネルギー固有値 E を求めよ．

以下では，$V(x)$ が次式で与えられる場合を考える（図 2）．

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & 0 \le x < a \text{ のとき} \\ 0, & a \le x < a + b = L \text{ のとき} \end{cases} \tag{E}$$

ただし，$V_0 > 0$ である．

訂正 2

【誤】条件を

【正】条件 $\left(\left.\frac{d\phi(x)}{dx}\right|_{x=L} = \left.\frac{d\phi(x)}{dx}\right|_{x=0}\right)$ を

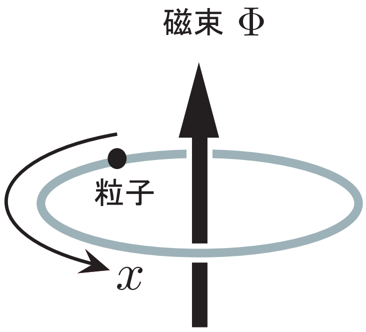

図１

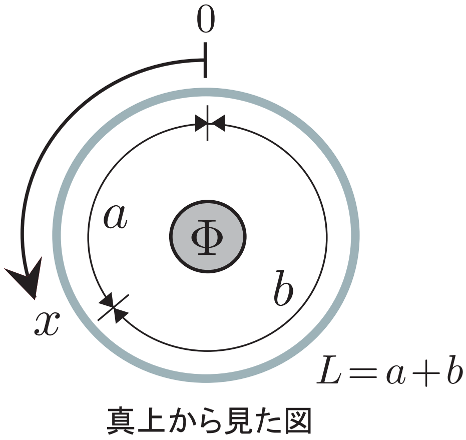

図２

(5) この系のエネルギー固有値を決める式は次のようになる．

$$\cos(ka)\cosh(\lambda b)+\frac{\lambda^2-k^2}{2k\lambda}\sin(ka)\sinh(\lambda b)=f(\Phi) \tag{F}$$

ただし，

$$k=\frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}, \qquad \lambda=\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \tag{G}$$

である．$f(\Phi)$ を求めよ．また，$f(0)=1$ となることを示せ．

以下では，$c_0\equiv aV_0(>0)$ を一定に保ちながら，$V_0\to+\infty$，$a\to 0$，$b\to L$ の極限をとった場合を考える．この場合，$V(x)$ は $x=0$ で $-\infty$ であるデルタ関数型ポテンシャルになる．

(6) 磁束がないとき（$\Phi=0$），$E<0$ の解の個数を，その理由とともに答えよ．その際，以下の事実を用いてもよい．

実数パラメータ ξ，実数変数 y に依存した関数 $F_\xi(y)$ が次式で与えられるとする．

$$F_\xi(y)=\cosh y-\xi\frac{\sinh y}{y} \tag{H}$$

$\xi\le 3$ のとき，$F_\xi(y)$ は $y\ge 0$ の領域で y についての単調増加関数である．

$\xi>3$ のとき，$y>0$ の領域で $F_\xi(y)$ は極小値を１つ持ち，それ以外に極値はない．

(7) $\beta\equiv mc_0L/\hbar^2$ とおく．磁束 Φ および β の値がある範囲にあるとき，$E<0$ の解が存在しなくなる．このような Φ と β の範囲を求めよ．ただし，Φ の範囲は β を用いて表せ．

III-3 (統計力学：おもりと理想気体) (100 点)

図１のような，ピストンを備えた底面積 A の容器に N 個の単原子分子からなる理想気体が封入されている．ピストンは鉛直方向にのみ，摩擦なく移動することができ，その上にはおもりが乗せられている．底面からのピストン下部の高さを X とすると，系の全エネルギー E は,

$$E = E_{\mathrm{K}} + MgX, \qquad E_{\mathrm{K}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m} \tag{A}$$

と与えられる．ここで，E_{K} は気体分子の運動エネルギーである．また，$\boldsymbol{p}_i$ は i 番めの分子の運動量，m は単原子分子の質量，$M(\gg m)$ はおもりとピストンを合わせた質量，g は重力加速度の大きさを表す．分子が重力から受ける位置エネルギー，ピストンの運動エネルギー，外気の圧力の寄与は無視し，また，ピストン位置の各点で容器の中の気体は平衡に達していると仮定する．以下では，N は極めて大きいと仮定し，1 に対して，$1/N$ のオーダーの寄与は無視してよい．

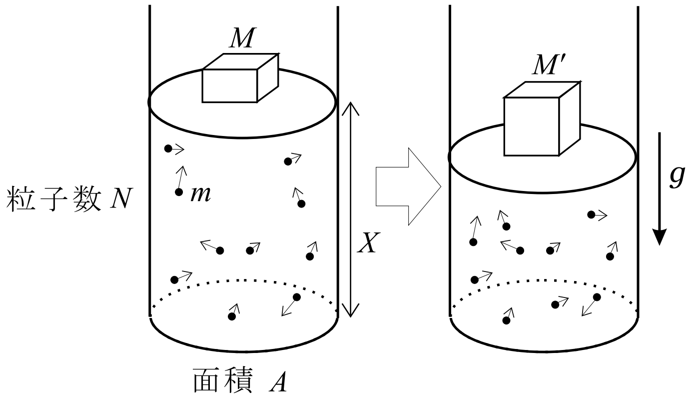

図1

まず，容器は熱を通さないものとし，おもりを含めた全体を一つの孤立系と考える．

(1) ピストンの下部が高さ X の位置に静止しているとする．気体分子の運動エネルギーが，E_{K} から $E_{\mathrm{K}}+\Delta$ の範囲にある状態の数 $\Omega(E_{\mathrm{K}})\Delta$ を求めよ．ただし，Δ は E_{K} と独立で，$E_{\mathrm{K}} \gg \Delta$ としてよい．プランク定数は h とせよ．また，n 次元空間において半径 r の球の体積 V_n，表面積 A_n は，それぞれ,

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} r^n, \qquad A_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} r^{n-1} \tag{B}$$

で与えられる．ここで，$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$ はガンマ関数であり，実数 z に対し，$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ を満たす.

(2) ミクロカノニカル集団の考え方では，理想気体の運動エネルギーが E_{K} から $E_{\mathrm{K}}+\Delta$ の範囲にあるときのエントロピー S は，問 (1) で求めた状態の数 $\Omega(E_{\mathrm{K}})\Delta$ を用いて，$S=k_{\mathrm{B}}\ln(\Omega(E_{\mathrm{K}})\Delta)$ と与えられる．ここで，k_{B} はボルツマン定数である．平衡状態では，ピストン下部の高さ X の最も確からしい値 X^* は，S を最大化するように決まる．すなわち，

$$\left.\frac{\partial S}{\partial X}\right|_{X=X^*}=0 \tag{C}$$

が成り立つ．このことから，E, M, m, g, N, A, h のうち必要なものを用いて，X^* を表せ．

以下では，気体分子は容器の壁を通じて外部の熱浴と熱のやりとりをし，系は温度 T の熱平衡状態にあるものとする．

(3) ピストン下部の高さが X にあるときの，容器内の気体分子の分配関数 $Z(X)$ を求めよ．ただし，必要ならば，公式 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/a}dx=\sqrt{\pi a}$（$a$ は正の実数）を用いてよい．

(4) ピストン位置に関する自由度を考える．問 (3) で求めた分配関数を用いて，

$$Y=\lambda^{-1}\int_0^{\infty}e^{-MgX/(k_{\mathrm{B}}T)}Z(X)dX \tag{D}$$

という状態和を定義する．λ は長さの次元を持つ物理量で，ここでは定数とみなしてよい．式 (D) の積分を実行し，状態和 Y を求めよ．

(5) 問 (4) で求めた状態和 Y を用いると，X の関数である任意の物理量 $f(X)$ の期待値は，

$$\langle f\rangle=\frac{\int_0^{\infty}f(X)e^{-MgX/(k_{\mathrm{B}}T)}Z(X)dX}{Y\lambda} \tag{E}$$

と計算することができる．ピストン下部の高さ X の期待値 $\langle X\rangle$ を求めよ．

(6) 熱力学ポテンシャル G を次のように定義する．

$$G=-k_{\mathrm{B}}T\ln Y \tag{F}$$

ピストンの上に十分にゆっくりとおもりを増やしていき，全てのおもりとピストンとを合わせた質量が M' $(>M)$ となった．おもりを増加する前後の G の値を，それぞれ $G_M, G_{M'}$ とし，その差 $\Delta G=G_{M'}-G_M$ を求めよ．

(7) 問 (6) のおもりを増加する過程において，ピストン内の理想気体がした仕事 W と，理想気体と外部の熱浴との熱の出入り Q を求めよ．ただし，仕事は気体が外部になす向きを正，熱は外部の熱浴から理想気体への流れを正とする．

III-4 (実験：相対論的粒子の測定) (100 点)

高エネルギーまで加速した電子と陽電子を衝突させ，中性の B^0 粒子とその反粒子 $\bar{B}^0$ を同時生成した後，それぞれが荷電粒子（π 粒子と K 粒子）に崩壊する過程について考察する ($B^0 \to K^+\pi^-$，$\bar{B}^0 \to K^-\pi^+$)．以下，粒子の運動は相対論的に取り扱うことにする．相対論的粒子のエネルギー E，運動量 P，静止質量 m の間には以下の関係がある．

$$E = \gamma mc^2\,,\ P = \gamma mv = \gamma\beta mc\,,\ E^2 - P^2c^2 = m^2c^4 \qquad \text{(A)}$$

ここで，$\beta \equiv v/c$，$\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$，$c = 3.0 \times 10^8$ m/s は光速，v は粒子の速度である．

まず，生成された荷電粒子の磁場中の軌跡を測定して粒子の運動量を求め，速度の差から，粒子の種類を識別する方法について考えよう．なお，以下では，荷電粒子の生成時刻は，電子と陽電子の衝突と同時であるとする．また，荷電粒子からの電磁波放射は無視できる．

(1) 電気素量 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C をもつ相対論的粒子は，一様な磁場（磁束密度 B）に対して，それに垂直な平面内で曲率半径 R の円軌道上を，角速度

$$\omega_{\mathrm{B}} = \frac{eB}{\gamma m}$$

で運動することが知られている．R，e，B を使って，粒子の運動量 P を表せ．

(2) $B=$ 0.50 T の一様な磁場に垂直な面内を，$+e$ の電荷を持つ粒子（π^+ または K^+）と，$-e$ の電荷を持つ粒子（π^- または K^-）が走り，それぞれの軌道の曲率半径が，10 m，14 m と測定された（図 1 ）．このとき，各粒子の運動量を求めよ．なお結果は，単位 GeV/c（1 GeV = 10^9 電子ボルト）を使い，有効数字 2 桁で表せ．

(3) これらの荷電粒子の軌道上に粒子通過時刻測定器を設置し（図 1 ），数多くの電子・陽電子衝突を起こして，粒子が生成されてから測定器を通過するまでの飛行時間を測定する．ある運動量 P を持ち，その飛行距離が L である粒子は，その質量に固有の飛行時間をもつ．そのため，飛行時間の分布には，π 粒子と K 粒子，各々に対応する二つのピークが生じる（図 2 ）．このピークの時間差 Δt を，飛行距離 L，運動量 P，二粒子の質量 m_1，m_2 を用いて表せ．ここで，$P \gg m_1 c\,, P \gg m_2 c$ の近似がなりたつものとする．

(4) 図 1 の正電荷の粒子について考える．この粒子の飛行距離 L は 3.0 m，円軌道の曲率半径 R は 10 m と測定された．これが π^+ 粒子である場合の飛行時間と，K^+ 粒子である場合の飛行時間の差 Δt を，問 (3) の答えを用いて計算し，ナノ秒 (1 ns = 10^{-9} s) 単位で求めよ．有効数字は 1 桁とする．なお，K^+ 粒子の質量は 0.50 GeV/c^2，π^+ 粒子の質量は 0.14 GeV/c^2 とする．

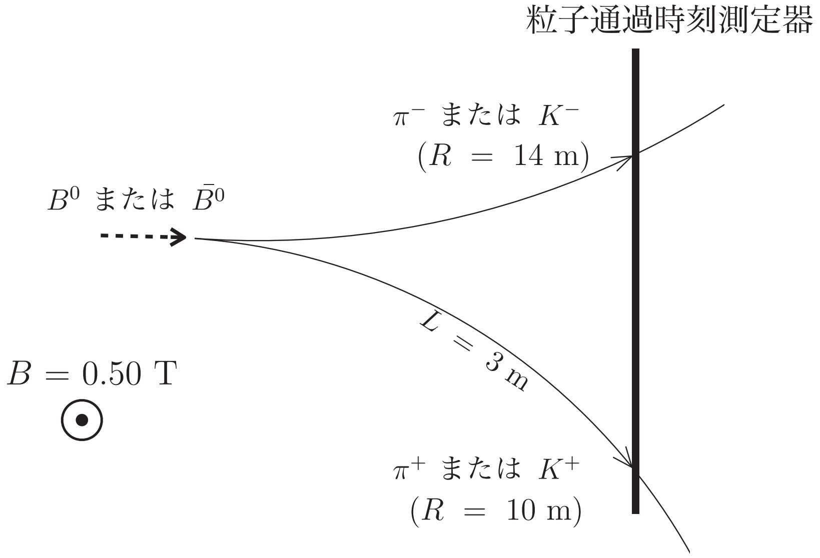

図 1

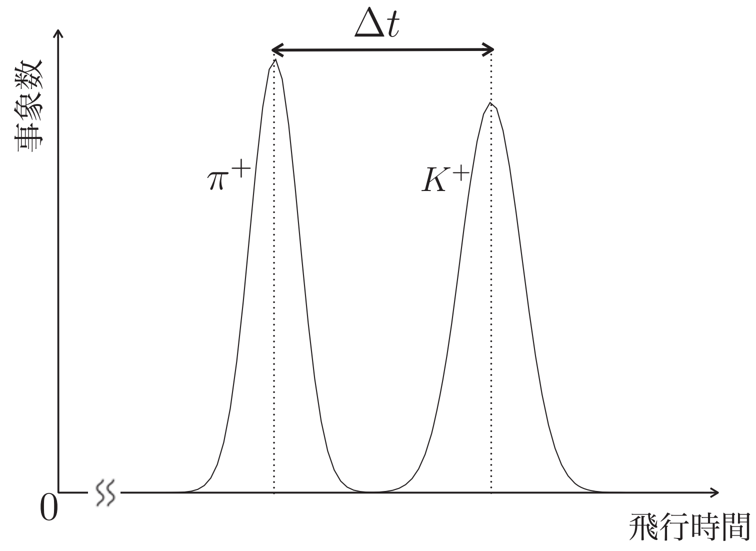

図 2

（次ページに続く）

粒子の運動量 P，飛行時間 t，飛行距離 L が測定できれば，その質量は一意に求められる．しかし，測定には必ず誤差が伴うため，求まる質量は本来の値のまわりに分布する．この分布の広がりについて考える．

(5) 式 (A) を用いて，粒子質量の二乗 (m^2) を，P，t，L で表せ．

(6) 誤差の伝播を考慮して，質量の二乗の誤差 $\delta(m^2)$ を，E，m，各測定値の相対誤差 $\delta P/P$, $\delta t/t$, $\delta L/L$ を使って表せ．なお，δP, δt, δL の間に相関はないとする．

(7) K^+ 粒子の運動量，飛行距離，飛行時間がそれぞれ $P = 1.0$ GeV/c，$L = 3.0$ m，$t = 10$ ns であり，測定誤差が $\delta P = 10$ MeV/c，$\delta L = 100$ μm，$\delta t = 0.1$ ns とする．質量の決定に最も大きな誤差を与える測定値は何か，理由とともに答えよ．

次に，B^0 粒子の寿命を実験から測定する方法について考えよう．しかし，B^0 粒子の寿命は，時間測定精度の 0.1 ns よりはるかに短いため，直接，寿命を測定することは難しい．それでも，以下に示すように，極めて精度の高い距離の測定から寿命を測定することができる．
図３に示すように，エネルギーの異なる電子と陽電子を衝突させると，生成された粒子の重心は，高速で移動する．たとえば，エネルギー 8.0 GeV の電子と，エネルギー 3.5 GeV の陽電子を正面衝突させると，質量 10.6 GeV/c^2 の共鳴状態が生成され，直後に，B^0 粒子とその反粒子 $\bar{B}^0$ へ二体崩壊する．なお，B^0 粒子と $\bar{B}^0$ 粒子の質量は等しく，また，B^0 粒子と $\bar{B}^0$ 粒子の質量の和と，生成された共鳴状態の質量の差は極めて小さく，無視できるとする．

(8) 生成された共鳴状態がもつ運動量の大きさを求めよ．なお結果は，単位 GeV/c を使い，有効数字 2 桁で求めよ．

(9) B^0 粒子が，生成されてから崩壊するまでに走る平均距離を測定すると 190 μm であった．B^0 粒子の崩壊寿命は何 ns か，有効数字 2 桁で求めよ．

図３

（このページは白紙である）

III-5 (天文学) (100 点)

地球と太陽の平均的な距離（1 天文単位）は約 1.5×10^8 km である．地球の公転軌道を円とする．

(1) 金星の太陽面通過を地上の離れた 2 点 (A 地点と B 地点) で同時に観測することにより，太陽までの距離を求める方法を考える．図 1 は金星の太陽面通過時の配置を，太陽や地球の大きさを誇張して描いたものである．これを参考にして，地球と太陽の中心間距離 d を $\alpha, \beta, \theta_{\max}, h$ で表せ．ただし，α と β はそれぞれ，A 地点および B 地点からみた太陽中心と金星中心の方向がなす角度，$\theta_{\max}$ は地球からみて太陽と金星が最も離れたときのなす角度，h は地球の中心と太陽の中心を結ぶ線に垂直な平面に投影した A 地点と B 地点の距離である．金星の公転軌道は円（半径 D）とし，太陽と地球の半径は天体間の距離よりも十分小さいとしてよい．なお，太陽中心および金星中心からみた A 地点と B 地点の方向がなす角度をそれぞれ γ と δ とする（図 1 下の模式図参照）

訂正 3

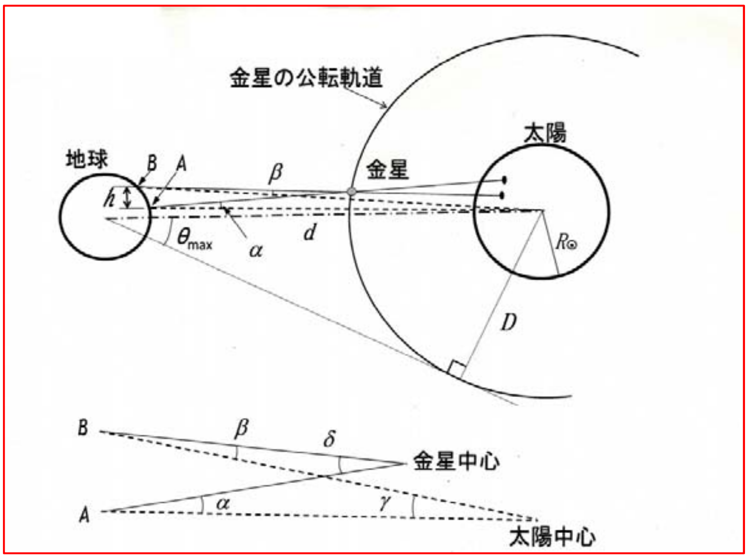

図 1

(2) 太陽半径を $R_\odot$, 地球の公転角速度を ω [rad s^{-1}] として，太陽の質量 $M_\odot$ と表面の重力加速度 a を求める式を示せ．またそれらの値を有効数字 1 桁で計算せよ．万有引力定数は $G = 6.7 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}，太陽は視直径 9.0×10^{-3} rad で，密度分布は球対称とし，1 年 $\simeq 3.2 \times 10^7$ s とする．

以下の問いについては，計算結果の値はファクター 2 の精度（真値の 1/2 から 2 倍の範囲）で求めればよい．

(3) 太陽は 1 秒間に総量約 10^9 kg の質量を太陽風として放出している．太陽風を駆動するために必要な仕事率を式で表し，その値を計算せよ．ただし太陽風は無限遠で速度が 0 になるとする．

(3) 太陽は 1 秒間に総量約 10^9 kg の質量を太陽風として放出している．太陽風を駆動するために必要な仕事率を式で表し，その値を計算せよ．ただし太陽風は無限遠で速度が 0 になるとする．

(4) 単位波長幅における太陽放射のエネルギーフラックスは，波長 400 nm と 600 nm でほぼ同じである．図 2 は単位面積から放射される黒体放射のエネルギースペクトルであり，各曲線の上の数字は温度 [K] を示す．太陽からの放射は黒体放射とし，図 2 から太陽のエネルギースペクトルに最も近い曲線の温度を読みとることにより，太陽全体が 1 秒間に放射するエネルギーを求めよ．ステファン・ボルツマン定数を $\sigma = 5.7 \times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4} とする．

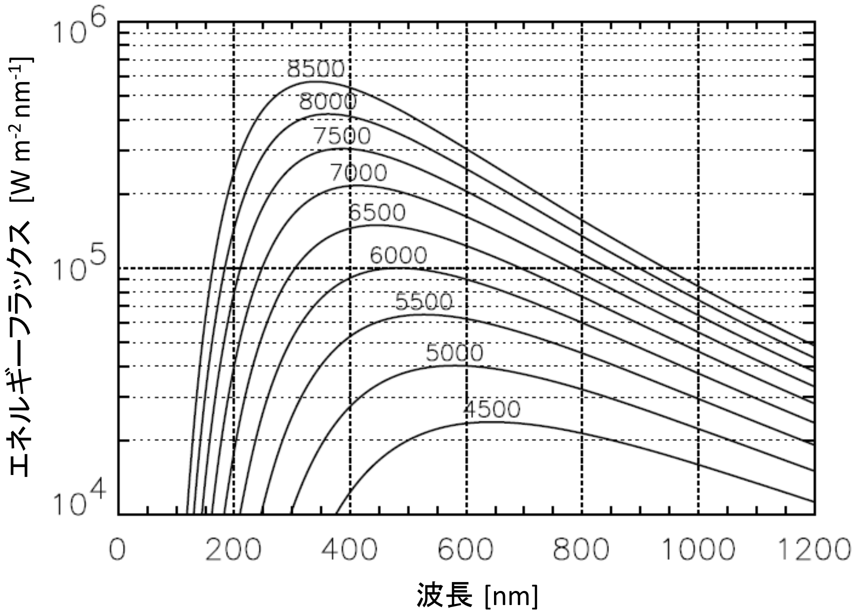

図 2

(5) 問 (4) で求めた，太陽全体が 1 秒間に放射するエネルギーを質量に換算し，太陽風による質量放出率の何倍であるか答えよ．

(6) 地球の公転運動により，星 X は周囲にみえる多数の星々に対してみかけの位置が 1 年を通じて楕円の軌跡を描いて変化し，その長半径（年周視差）は 0.1 秒角（$\simeq 5 \times 10^{-7}$ rad）である．また，この星の波長 400 nm と 600 nm のエネルギーフラックスは，それぞれ太陽の 4×10^{-12} 倍と 6×10^{-12} 倍であった．図 2 の曲線の中から星 X のエネルギースペクトルに最も近い曲線を選び，それを用いて星 X の半径が太陽のおよそ何倍であるかを求めよ．ただし，星 X は一様な表面から黒体放射をする球と考え，星 X と地球の間に光の吸収はないものとする．

平成26年度大学院入学試験問題　IV（1時間）

英語　（100点）

注意

(1) 問題IV–1，IV–2の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ．裏面を用いてもよい．

(2) 各解答用紙は横長に使用して，解答用紙表側の左上部（線より上）に問題番号，受験番号，氏名を記入せよ．解答用紙の他の部分に受験番号，氏名を書いてはいけない．この線より上の欄には表，裏とも解答を書いてはいけない．

(3) 解答用紙は2問すべて提出すること．なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない．

(4) 問題冊子は表紙を含めて4ページまである．

IV-1

以下の英文は Austin Chambers 著 “Modern Vacuum Physics” からの抜粋である（一部略）．読んで以下の問いに答えよ．

[redacted] (a)[redacted] (b)[redacted] (c)[redacted]

（註）

rarefied : 希薄な（形容詞）, Aristotle : アリストテレス, medieval times : 中世
horror vacui : ラテン語で「何もない空間（真空）に対する恐怖」
Torricelli : トリチェリ, barometer : 気圧計
Puy-de-Dome volcano : ピュイドドーム火山, Auvergne : オーベルニュ地方

(1) 下線部（a）を和訳せよ.

(2) 下線部（b）に関連して，ガリレオの時代に自然科学の探求の方法が大きく変わった．どのように変わったのかを日本語で述べよ.

(3) 下線部（c）に関連して，“a critical experiment” とは何を指すのか，また critical である理由を，本文に即して日本語で述べよ.

IV-2

以下は朝永振一郎著「量子力学」の冒頭の段落である（一部略）．以下の問いに答えよ．

[redacted] (a) [redacted] (b) [redacted]

(1) 下線部（a）を英訳せよ．

(2) 下線部（b）を英訳せよ．

（このページは白紙である）