

京都大学大学院理学研究科物理学・宇宙物理学専攻

平成25 年度大学院入学試験問題

入試問題は以下の通りです。ただし、英語だけは原典の著作権保護のために、文章を点線にしてあります。文章については原典を参照してください。

また、当日、試験時間内に以下の修正・加筆を行いました。

・I-1 2ページ 問題文(3)

(誤)「どうなるか答えよ」

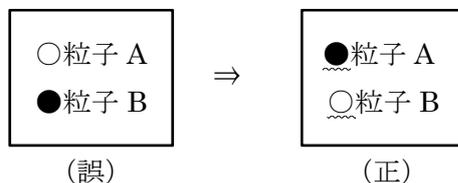
(正)「どうなるか答えよ。理由も述べよ。」

・III-2 4 ページ

(誤) 電気素量を e 、

(正) 電子の電荷を e 、

・III-4 14 ページ 図 3 の中



平成25年度大学院入学試験問題 I (3時間)

注意

- (1) 問題I-1,I-2,I-3の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いても良い。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、解答用紙表側の左上部(線より上)に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号、氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表、裏とも解答を書いてはいけない。
- (3) 解答用紙は3問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて7ページまでである。

I-1 (力学) (100点)

質量 M 、半径 a の一様な球の運動について考えよう。以下の問いに答えよ。ただし、重力加速度を g とする。

- (1) この球の中心を通る軸のまわりの慣性モーメント I を求めよ。
- (2) この球を図1のように水平に対して角度 α を持つ真っ直ぐな固定された斜面の下に置き、球がすべらないように回転させながら、斜面に沿って紙面に平行に初速 v_0 を与える。球が斜面をすべらずに上っていくときに、止まるまでにかかる時間 t と重心が上る高さ H を求めよ。

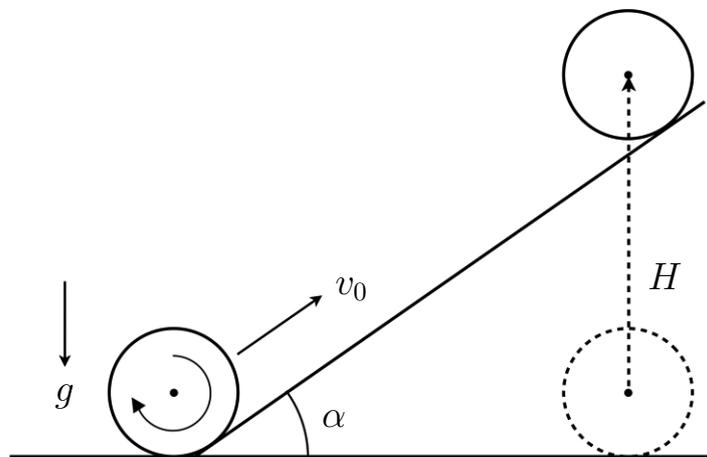


図1

- (3) 問(2)と同じ初期条件のもとで、斜面に摩擦がないとすると、球が上る高さはすべらない場合と比べてどうなるか答えよ。

(次ページに続く)

この球を半径 R の円筒状のパイプの中に置く。図2はパイプの断面で、パイプの軸は紙面に垂直である。球はすべることなく回転し、紙面に垂直な方向には運動しないものとする。ここで、パイプの中心と球の中心を結ぶ直線と鉛直下向き方向のなす角度を θ とする。

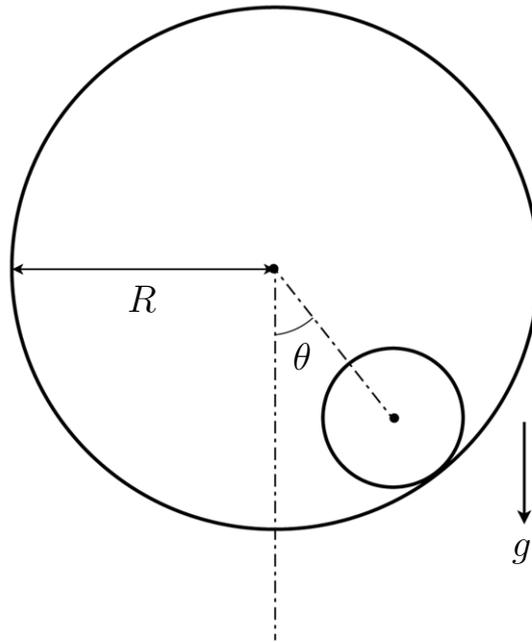


図2

- (4) 球をパイプの底に置き ($\theta=0$)、パイプの接線に沿って水平方向に初速 v_0 を与える。球がパイプの頂上まで上るのに必要な v_0 を求めよ。
- (5) 球をパイプの底からわずかにパイプに沿って移動させ、離れた後の運動についてラグランジアンを示し、運動方程式を解いて、球の行う運動について説明せよ。

I-2 (物理数学) (100点)

以下の各問いに答えよ。

- (1) 微分方程式

$$\frac{df}{dt} + f = e^t$$

の一般解 $f(t)$ を求めよ。

- (2) 偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

の一般解 $f(x, y)$ を求めよ。

- (3) $-\pi \leq x < \pi$ で定義された関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開は、

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) e^{-inx}$$

で与えられる。 $f(x) = \cosh(\alpha x)$ ($-\pi \leq x < \pi$, α は定数) のフーリエ級数展開を考えることにより、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2} = -\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\pi}{2\alpha \sinh(\pi\alpha)}$$

を示せ。ただし、関数の滑らかな点において、関数の値が、そのフーリエ級数の収束値に一致することは仮定してよい。

- (4) $m > 0$ のとき、3次元フーリエ変換

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy dz \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} e^{-m\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 2\pi i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

を求めよ。

(次ページに続く)

(5) 積分

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x}$$

を求めよ．例えば，以下の図 1 のような複素平面上の閉曲線 C での複素積分

$$\int_C dz \frac{e^{iz}}{z}$$

を考え，適当な極限をとることにより答えを得ることもできる．

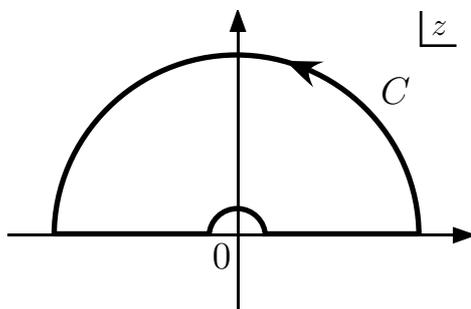


図 1

(6) $\alpha > \beta > 0$ の場合に，

$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{(\alpha + \beta \cos \theta)^2}$$

を求めよ．

(7) 次のような行列 A を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

N を自然数とするととき，行列 A の N 乗 A^N を求めよ．

I-3 (量子力学) (100点)

次のハミルトニアンで記述される質量 m_A および m_B の2粒子からなる量子系を考える。

$$H = \frac{\mathbf{p}_A^2}{2m_A} + \frac{\mathbf{p}_B^2}{2m_B} + V(|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|) \quad (\text{A})$$

ただし, \mathbf{p}_A および \mathbf{p}_B は各粒子の運動量演算子である。また, 2粒子の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ と書き, ポテンシャル V は2粒子の相対距離 $r = |\mathbf{r}|$ ($\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$) のみに依存している。以下では, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ と座標をとる。また, $i = 1, 2, 3$ を x, y, z の代わりの添え字として使う場合もある。すなわち, $r_1 = x, r_2 = y, r_3 = z$ 。同様に, 相対の運動量演算子 \mathbf{p} を $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = (p_1, p_2, p_3)$ と書く。以下, 角運動量など他のベクトル量も同様の記法をとる。

ハミルトニアン H は次のように, 重心と相対部分に分けることができる。

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} + H_{\text{rel}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (\text{B})$$

ここに, $M = m_A + m_B$ は全質量, \mathbf{R} は重心の座標である。換算質量を μ で表す。

- (1) 換算質量 μ を m_A および m_B で表すとともに, 相対部分のハミルトニアン $H_{\text{rel}}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ を μ を用いて書き下せ。定常状態の全系の波動関数は $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{R})\varphi(\mathbf{r})$ と変数分離型に表すことができる。重心の静止系を取り, 全系のエネルギーが E であるときの波動関数 $\varphi(\mathbf{r})$ が従うシュレーディンガー方程式を書け。ただし, いずれの場合も途中経過は書かなくてもよい。

以下の問いはすべて相対運動についてのものである。相対の軌道角運動量演算子を $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (L_x, L_y, L_z)$ と表す。その i -成分は, $L_i = \epsilon_{ijk} r_j p_k$ と書ける。ここに, ϵ_{ijk} はレビ・チビタの3階完全反対称テンソルである。すなわち, i, j, k が $\{1, 2, 3\}$ の偶置換の場合 $\epsilon_{ijk} = 1$, 奇置換の場合 $\epsilon_{ijk} = -1$, それ以外の場合 $\epsilon_{ijk} = 0$ である。また, アインシュタインの規約に従い同じ添え字については和をとる。今の場合, 以下のように j, k について1から3まで和をとっている。

$$\epsilon_{ijk} r_j p_k \equiv \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} r_j p_k$$

- (2) 以下の交換関係を計算せよ。ただし, $i, j = 1, 2, 3$ とし, (a), (b) の解は ϵ_{ijk} を用いて表せ。

$$(a) [L_i, r_j] \quad (b) [L_i, p_j] \quad (c) [L_z, L_x + iL_y]$$

- (3) 次の等式が成り立つことを示すとともに, その物理的意味を述べよ。

$$[L_i, H_{\text{rel}}] = 0$$

(次ページに続く)

- (4) 波動関数が $\varphi(\mathbf{r}) = R(r) \cdot (x + iy)/r$ と書けているとする。この状態は L_z および L^2 の固有状態である。 $L_z \varphi(\mathbf{r})$ および $(L_x + iL_y) \varphi(\mathbf{r})$ を計算せよ。また、これらの結果をもとにして、 L_z および L^2 の固有値をそれぞれ $m\hbar$, $l(l+1)\hbar^2$ と表すとき、 m , l の値を求めよ。なお、このとき、 $l\hbar$ を角運動量の大きさと呼ぶ。

$V(r)$ が次のクーロンポテンシャルの場合を考えよう。

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r}, \quad (\kappa = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}) \quad (C)$$

ここに、 Z は自然数、 e は素電荷 ($e > 0$)、 ϵ_0 は真空の誘電率である。

- (5) ポテンシャルが式 (C) で与えられるとき、定常状態の動径波動関数を $R(r) = u(r)/r$ と表す。ここで、長さの次元を持つ量 a を

$$a = \frac{\hbar^2}{\kappa\mu}$$

と定義する。角運動量の大きさが $l\hbar$ の場合に、 u が従う方程式を新しい変数 $\xi = r/a$ を用いて表せ。またこのとき、エネルギー固有値 E と κ/a の比は l に依存するが、系によらない無次元量となることを示せ。ただし、相対運動量 p の 2 乗は角運動量 L を用いて、以下のように表すことができる。

$$p^2 = -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{L^2}{r^2}$$

- (6) 水素原子の場合 a はボーア半径 ($\approx 0.53 \times 10^{-10}$ m) である。そこで一般に、任意の μ , κ に対して a を系の半径と呼ぶことにする。次の a), b), c) の 2 粒子系がクーロン力のみで結合しているとみなせる場合、その基底状態の半径が最も小さい系はどの系か、理由とともに答えよ。また、その大きさを有効数字 1 桁で求めよ。ただし、ここでのミュオン粒子、ケイ中間子は電荷 $-e$ を持つとする。また、陽電子は電子と質量が同じで、正電荷 e を持つ粒子である。

a) 陽子 - ミュオン粒子 b) 陽子 - ケイ中間子 c) 電子 - 陽電子

ただし、電子、陽子、ミュオン粒子およびケイ中間子の質量の比は以下の通りであるとする。 $m_e : m_p : m_\mu : m_K = 1 : 2000 : 200 : 1000$.

平成25年度大学院入学試験問題 II (3時間)

注意

- (1) 問題 II-1,II-2,II-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いても良い。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、解答用紙表側の左上部(線より上)に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号、氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表、裏とも解答を書いてはいけない。
- (3) 解答用紙は3問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて8ページまでである。

II-1 (電磁気) (100 点)

電気双極子と磁気双極子について考えよう.

- (1) $(x, y, z) = (0, 0, d/2)$ に正の電荷 $q (> 0)$, $(x, y, z) = (0, 0, -d/2)$ に負の電荷 $-q$ が置かれているとき, 任意の点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ における静電ポテンシャル ϕ を求めよ. ただし, 真空の誘電率を ϵ_0 とする.
- (2) 問(1)において $qd = p$ を一定に保ちつつ $d \rightarrow 0$ とすると電気双極子となる. このとき双極子モーメント $\mathbf{p} = (0, 0, p)$ を用いて, 任意の点 \mathbf{r} における静電ポテンシャル ϕ を表せ. また, 電気双極子によってできる電場は

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^5} \right)$$

となることを示せ.

- (3) 一様な静電場 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) = (0, 0, E_0)$ の中に置かれた導体球の表面に誘起される電荷が作る電場は, 導体球の外では電気双極子が作る電場と等価になることを示せ. ただし, 導体球の全電荷は0である. なお, このとき静電ポテンシャル ϕ はラプラス方程式の解として得られ, 軸対称のとき, $z = r \cos \theta$ とする球座標 (r, θ, φ) を用いると一般解は,

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

と与えられる. ここで $P_l(\cos \theta)$ はルジャンドルの多項式であり,

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

となる. また, 導体球面上ではポテンシャル=一定 (=0 とおいてよい), 遠方では一様な静電場という境界条件が成り立つことに注意せよ.

(次ページに続く)

- (4) 閉電流が作る磁場は遠方では磁気双極子が作る磁場と等価になる．この証明を考えよう．ただし，ここでは簡単のために閉電流の流れる閉回路 C は平面上にあるとし，座標の原点 O は閉回路と同一平面内の閉回路の近傍にあるとする (図 1 参照)．閉回路 C を一定の電流 I が流れているときに，点 \mathbf{r} に作られるベクトルポテンシャルは

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}$$

で与えられる．ここで μ_0 は真空の透磁率， \mathbf{s} は閉回路 C 上の点を表す位置ベクトルである．

まず，遠方では $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{s}|$ となることを用いて，被積分関数を $\frac{|\mathbf{s}|}{|\mathbf{r}|}$ の一次まで展開したときのベクトルポテンシャルを書き下せ．

次に，公式

$$\int_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) d\mathbf{s} = \frac{1}{2} \int_C (\mathbf{s} \times d\mathbf{s}) \times \mathbf{r}$$

および

$$\int_C (\mathbf{s} \times d\mathbf{s}) = 2\mathbf{n}S$$

を用いて，遠方でのベクトルポテンシャルを求めよ．ここで， S は平面内に閉回路が囲む面積， \mathbf{n} は平面に垂直な単位ベクトルである (図 1 参照)．

さらに，遠方での磁場 \mathbf{B} を求め， $\mathbf{m} = \mu_0 S I \mathbf{n}$ を用いて表せ．これは，問 (2) の電場と定数倍を除き同じ関数形になっており，磁気双極子の作る磁場と等価である．

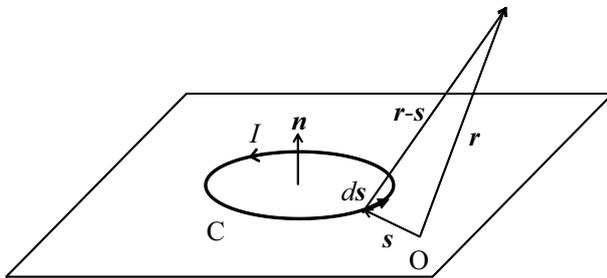


図 1

- (5) 原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ に正の電荷 $2q (> 0)$ ， $(x, y, z) = (0, 0, d)$ に負の電荷 $-q$ ， $(x, y, z) = (0, 0, -d)$ に負の電荷 $-q$ が置かれているとき，遠方では四重極子電場となる．遠方でこれと定数倍を除き同じ関数形をもつ四重極子磁場を作る電流分布の一例を図に描いて示せ．

II-2 (統計力学) (100点)

荷電粒子系は常磁性・強磁性・反磁性など、磁場に対して様々な応答を示す．ここでは体積 V の箱の中で、 z 軸の正方向を向いた一様な磁束密度 $B = (0, 0, B)$ ($B > 0$) の静磁場中を運動する質量 m 、電荷 q ($q > 0$)、スピン $1/2$ 、粒子数 N の粒子系の統計力学を考えよう．以下、ボルツマン定数は $k_B = 1$ とおき、温度 T はエネルギー単位で与える．粒子数 N 、および箱の体積 V は十分大きく、表面効果は無視できるものとする．またこの問題では簡単のため、粒子はボルツマン統計に従うものとし、粒子間の相互作用は無視する．必要があれば次の関係式を用いてよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2a} dx = \sqrt{2\pi a} \quad (\text{ガウス積分})$$

$$\log N! \simeq N \log N - N \quad (\text{スターリングの公式, } N \gg 1)$$

$$|x| \ll 1 \text{ において } \log(1+x) \simeq x, \quad \cosh x \simeq 1 + \frac{x^2}{2}, \quad \sinh x \simeq x + \frac{x^3}{6}$$

まず磁場と粒子のスピンによる相互作用を考える．このとき、粒子のエネルギーは

$$\varepsilon(\mathbf{p}, s) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu s B \quad (\text{A})$$

と表せる．ここで μ は定数であり、 s は粒子のスピンが磁場と平行、反平行の場合に $s = \pm 1$ の値をとる．このとき分配関数は

$$Z = \frac{1}{N!} \left[V \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{s=\pm 1} \exp(-\varepsilon(\mathbf{p}, s)/T) \right]^N \quad (\text{B})$$

と与えられる．

- (1) 式 (B) の積分・和を実行し、ヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ．スターリングの公式を用いること．
- (2) 内部エネルギー U を求めよ．
- (3) 磁場が弱い場合、自由エネルギーは次式のように B で展開できる．

$$F(B) = F_0 - \frac{1}{2} \chi B^2 + \mathcal{O}(B^4) \quad (\text{C})$$

ここで F_0 は磁場がないときの自由エネルギーである．係数 χ を求めよ．

(次ページに続く)

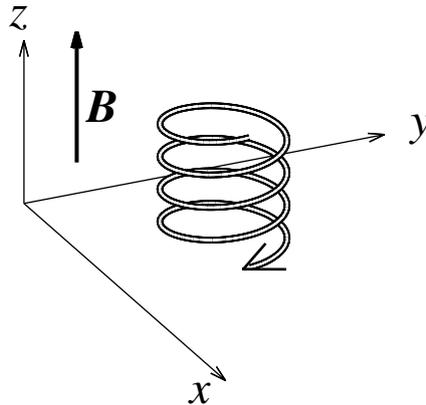


図 1

次に、磁場が軌道運動に与える影響を考えよう。このとき粒子は古典的には図 1 に示すように xy 方向には円運動を行い、 z 方向には自由運動を行う。量子力学的に考えると、この粒子のエネルギーは

$$\varepsilon(n, p_z) = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_z^2}{2m} \quad (D)$$

と表せる。ここで $n = 0, 1, \dots$ と $\omega = qB/m$ は、それぞれ xy 方向の量子化された円運動の量子数と角振動数である。粒子のスピンと磁場の相互作用はここでは無視する。振動子の単位面積あたりの縮退度を σ とすると、分配関数は

$$Z = \frac{1}{N!} \left[2\sigma V \int \frac{dp_z}{2\pi\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\varepsilon(n, p_z)/T) \right]^N \quad (E)$$

と与えられる。

- (4) ヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。
- (5) 磁場に比べて温度が十分に低い場合 ($\xi \equiv \hbar\omega/2T \gg 1$) と十分に高い場合 ($\xi \ll 1$) における内部エネルギー U を求めよ。またなぜその形となるか、その物理的意味を 50 ~ 150 文字程度で簡潔に述べよ。
- (6) 詳しい計算により、振動子の縮退度は $\sigma = m\omega/2\pi\hbar = qB/2\pi\hbar$ となることが知られている。(磁場が弱い極限において自由粒子系と自由エネルギーが一致することからも同じ結果が得られる。) 問 (3) と同様に磁場が弱い場合に自由エネルギーを B で展開し、式 (C) における係数 χ を求めよ。ここで χ は負となるが、このような荷電粒子系の磁性を何と呼ぶか答えよ。

II-3 (量子力学) (100点)

古典力学では、粒子のダイナミクスは系の局所的な性質で決まるが、量子力学のダイナミクスは干渉効果などに見られるように非局所的な側面を持つため、古典的には見られなかったさまざまな現象が起こる。その一例として以下のような2次元の問題を考えよう。

まず、角振動数 ω で特徴づけられる2次元の調和振動子ポテンシャル

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) \quad (\text{A})$$

の中に置かれた1個の質量 m の量子力学的粒子を考える。この系のハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + V(x, y) \\ [x, p_x] &= [y, p_y] = i\hbar \quad (\text{それ以外の交換子はゼロ}) \end{aligned} \quad (\text{B})$$

で与えられる。

- (1) 2次元の極座標 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$) を用いると、波動関数 $\psi(r, \theta)$ に対するシュレーディンガー方程式は、 E をエネルギー固有値として、

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \psi(r, \theta) + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \psi(r, \theta) = E\psi(r, \theta) \quad (\text{C})$$

で与えられる。また、この系は xy -面内の回転対称性を持つので対応する角運動量 $L = xp_y - yp_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta}$ が保存しており、 L の固有状態波動関数 $e^{il\theta}$ を用いて $\psi(r, \theta) = \varphi(r)e^{il\theta}$ と変数分離できる。(ただし、波動関数の一価性から l は整数である。) このとき動径波動関数 $\varphi(r)$ の従う方程式を書け。

- (2) このハミルトニアン \mathcal{H}_1 は変数 (x, p_x) に依存する部分と (y, p_y) に依存する部分とが分離しているので、上の微分方程式を用いなくても容易に解くことができる。生成消滅演算子を、 $q_x \equiv x$, $q_y \equiv y$ および対応する運動量を用いて、

$$a_j = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(q_j + \frac{ip_j}{m\omega} \right), \quad a_j^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(q_j - \frac{ip_j}{m\omega} \right) \quad (j = x, y) \quad (\text{D})$$

と定義することで \mathcal{H}_1 を a_j, a_j^\dagger を用いて表せ。また、上式を q_j, p_j について解くことにより、角運動量 $L = xp_y - yp_x$ を上の a_j, a_j^\dagger で表せ。(以下、必要な変数があれば適宜定義して使用してよい。また、生成消滅演算子の従う交換関係は $[a_j, a_k^\dagger] = \delta_{jk}$, $[a_j, a_k] = 0$, $[a_j^\dagger, a_k^\dagger] = 0$ である。)

(次ページに続く)

- (3) 一般に、生成消滅演算子 a_j^\dagger, a_j ($j = x, y$) から作られる個数演算子 $a_j^\dagger a_j$ の固有値はゼロ以上の整数 $0, 1, 2, \dots$ であるので、その固有状態は自動的にエネルギーの固有状態になっているが、角運動量 L の固有状態にはなっていない。 L も同時に固有状態になっているような表示をもとめるために、以下の変数変換

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (\text{E})$$

を行うと、 b_j, b_j^\dagger ($j = 1, 2$) も正しい生成消滅演算子の交換関係を満たすことがわかる。新しい生成消滅演算子から作られた個数演算子 $b_j^\dagger b_j$ ($j = 1, 2$) の固有値 n_1, n_2 を用いて \mathcal{H}_1, L の固有値を表す式を導け。また、その結果を用いてハミルトニアン \mathcal{H}_1 の固有値のうち低い方から4つについて、その値と取り得る L の値を求めよ。

次に、同種の2個の量子力学的粒子 A, B が、式 (A) の調和振動子ポテンシャル中で運動する状況を考えよう。2個の粒子の座標を $\mathbf{r}_A = (x_A, y_A), \mathbf{r}_B = (x_B, y_B)$ とした時、標準的な手順に従って重心座標 $\mathbf{R} = (X, Y) = (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B)/2$, 相対座標 $\mathbf{r} = (x, y) = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ を導入すると、2粒子のハミルトニアン \mathcal{H}_2 は、各々が2次元調和振動子中の1粒子の問題と等価な重心運動部分 \mathcal{H}_{com} と相対運動部分 \mathcal{H}_{rel} との和 $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_{\text{com}} + \mathcal{H}_{\text{rel}}$ に分離する。ただし、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{com}} &= \frac{1}{4m} (P_X^2 + P_Y^2) + m\omega^2(X^2 + Y^2) \\ \mathcal{H}_{\text{rel}} &= \frac{1}{2\mu} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}\mu\omega^2(x^2 + y^2) \quad (\mu \equiv \frac{m}{2}) \end{aligned} \quad (\text{F})$$

- (4) 粒子の統計性は2粒子を交換 ($\mathbf{r}_A \leftrightarrow \mathbf{r}_B$) した時の位相で決まるが、粒子の交換は相対座標で表現すると $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$ であるので、この時に波動関数につく位相によってボゾンに許される波動関数か、フェルミオンに許される波動関数かがわかる。一方、重心部分は粒子の交換で不変なので、統計性の効果を考える際には忘れてしまって良い。相対運動部分 \mathcal{H}_{rel} に上の問 (1)–(3) の結果を用いることにより、ボゾン2個の系に許されるエネルギー準位、フェルミオン2個の系に許されるエネルギー準位について、それぞれ下から2個のエネルギーの値と縮退度を求めよ。ただし、それぞれ \mathcal{H}_{rel} に対応するエネルギーについてのみ求めればよい。 ($\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$ は極座標では $\theta \mapsto \theta + \pi$ となることに注意せよ。)

(次ページに続く)

最後に、この2粒子A,Bそれぞれが、仮想的に無限に細い磁束(大きさ $\frac{\Theta}{\pi}\Phi_0$, $\Phi_0 = 2\pi\hbar/e$ は電荷 e の粒子に対する磁束量子)を伴って運動しているような状況を考えよう。再び相対運動に移って考えると、この状況は、式(F)の \mathcal{H}_{rel} に以下のベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A}(x, y) = (A_x, A_y) = \left(\frac{\Theta}{\pi}\right) \frac{\Phi_0}{2\pi} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right) \quad (\text{G})$$

で与えられるソレノイド磁場を加えることで実現できる。この \mathbf{A} の作る磁場は $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ ではゼロなので、ローレンツ力は働かず、古典的に考える限り粒子の運動に何の影響ももたらさないはずである。

(5) 式(G)のベクトルポテンシャルに対し、相対運動のハミルトニアン \mathcal{H}_{rel} の運動エネルギー部分

$$\frac{1}{2\mu} \{(p_x - eA_x)^2 + (p_y - eA_y)^2\} \quad (\text{H})$$

の極座標表示($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$)を求め、

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - i \frac{\Theta}{\pi} \right)^2 \right\} \quad (\text{I})$$

となることを示せ(任意の関数 $f(\mathbf{r})$ に対し、 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{p} f(\mathbf{r}))$ となることに注意せよ)。これと問(1), (4)の結果を用いて、ボゾン2粒子の系に許されるエネルギー準位が(i) $\Theta = 0$ の時と、(ii) $\Theta = \pi$ の時とでどう変わるか、問(4)で求めた磁束のない時のフェルミオンのエネルギー準位との関係に注意しながら論ぜよ。ただし、問(4)同様、相対運動のエネルギーについてのみ考察すれば良い。また必要ならば、問(1)–(3)の \mathcal{H}_1 の固有値は一般に、角運動量 L の量子数 l と適当に定義された整数 n ($n \geq 0$)を用いて、

$$E = (2n + |l| + 1)\hbar\omega \quad (\text{J})$$

と書けることや極座標について式(C)が成り立つことを用いてもよい。

(このページは白紙である)

平成 25 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題は III-1 から III-6 まで 6 問ある。この中から 3 問選択せよ。4 問以上選択した場合は全ての解答が無効になることがある。
- (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いても良い。
- (3) 各解答用紙は横長に使用して、解答用紙表側の左上部(線より上)に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号、氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表、裏とも解答を書いてはいけない。
- (4) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (5) 問題冊子は表紙を含めて 19 ページまでである。

III-1 力学(潮汐力による振動)

III-2 電磁気学(光の散乱)

III-3 統計力学(変分法による平均場近似)

III-4 実験(中性子散乱)

III-5 実験(電子回路)

III-6 天文学

III-1 (力学：潮汐力による振動) (100点)

2つの質量 m の質点 1, 2 が, 重さのない長さ $2l$ の棒で連結され, 図のように平面内を運動している. 原点には質量 M の地球があって静止し, その重力 (重力定数を G とする) がこの質点系にはたらいている.

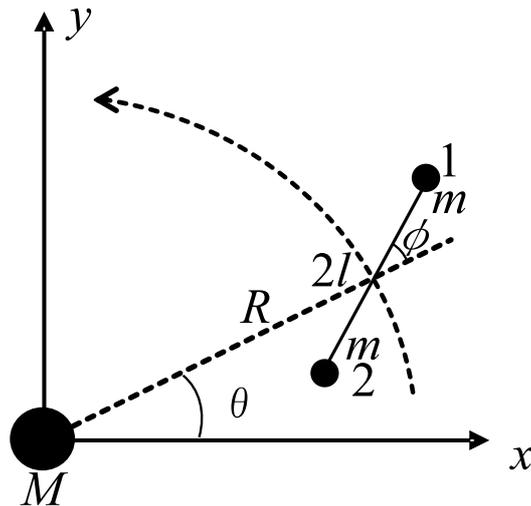


図 1

- (1) 図のように座標をとると, 棒の中心の xy 座標は $(R \cos \theta, R \sin \theta)$ で, 質点 1 は棒の中心から $(l \cos(\theta + \phi), l \sin(\theta + \phi))$, 質点 2 は棒の中心から $(-l \cos(\theta + \phi), -l \sin(\theta + \phi))$ の位置にある. この質点系の運動エネルギーを座標 (R, θ, ϕ) とその時間微分で表せ.
- (2) 質点 1 と質点 2 の原点からの距離 r_1, r_2 を R, l, ϕ で表せ. 次いで, (1) の結果も用いて, 質点系のラグランジアンを求めよ.
- (3) まず, $l = 0$ の極限を考える. R に関するオイラー・ラグランジュ方程式を作れ. この質点系が地球を中心に一定の半径 $R = R_0$ の円軌道を描いている場合, その角速度 $\dot{\theta}$ は一定値 ω_0 となる. ω_0 を求めよ.
- (4) 次に, $l \ll R$ として, $R = R_0$ (一定), $\dot{\theta} = \omega_0$ (一定) と近似できる場合を考える. 角度 ϕ に関するオイラー・ラグランジュ方程式を作れ. そして, これを $l \ll R_0$ の条件のもとで $|x| \ll 1$ に対する $(1+x)^{-\alpha} \simeq 1 - \alpha x$ の近似式を使って展開せよ. この時, ϕ が小さいならば $\phi = 0$ のまわりで単振動することを示し, その角振動数を求めよ. これは, 人工衛星の姿勢の潮汐力安定化とよばれる方法につながるものである.

(このページは白紙である)

III-2 (電磁気学：光の散乱) (100点)

- (1) 角振動数 ω の電磁波（光）が，バネ定数 $m\omega_0^2$ (ω_0 は角振動数， m は電子の質量である) の弾性力で原子に束縛されている電子により散乱される場合を考える．電磁波は直線偏光しているものとし，その偏光方向を \mathbf{E}_0 として，電場ベクトルは，

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \omega t \quad (\text{A})$$

で表されたとする．ここで，電気素量を e ，放射により失うエネルギーと関係する減衰力の係数を $m\rho (> 0)$ とする．古典的な電子の運動方程式，

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + m\rho \frac{d\mathbf{x}}{dt} + m\omega_0^2 \mathbf{x} = e\mathbf{E}_0 \sin \omega t \quad (\text{B})$$

を考え，時刻 $t = 0$ で電磁波が入射してから，十分時間が経った定常状態における，振動双極子のモーメント $\mathbf{p}(t)$ を求めよ．(電子の振動を $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \sin(\omega t + \delta)$ とした時，その振幅 \mathbf{x}_0 は，電磁波の波長 $\lambda = 2\pi c/\omega$ (c は光速) より十分小さいとする.)

- (2) モーメント $\mathbf{p}(t)$ の振動双極子からの放射を考える．散乱電磁波の進行方向の単位ベクトルを \mathbf{n} として，モーメント \mathbf{p} から位置 \mathbf{r} における，散乱電磁波のポインティングベクトル \mathbf{S} は，真空の誘電率を ϵ_0 として，

$$\mathbf{S} = \frac{\omega^4}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3 r^2} |\mathbf{p} \times \mathbf{n}|^2 \mathbf{n} \quad \left(\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (\text{C})$$

と表せる．問(1)と同様に，直線偏光している角振動数 ω の電磁波（光）が，バネ定数 $m\omega_0^2$ の弾性力で原子に束縛されている電子により散乱される場合，位置 \mathbf{r} における微分散乱断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\bar{S}}{\bar{S}_i} \quad (\text{D})$$

を図1にもとづいて，入射電磁波の電場ベクトル $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \omega t$ と，散乱電磁波の進行方向 \mathbf{n} のなす角 θ の関数として表せ．ただしここで， \bar{S} と \bar{S}_i はそれぞれ散乱電磁波，入射電磁波のポインティングベクトルの大きさの時間平均を表し，

$$\bar{S}_i = \frac{c\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}_0|^2 \quad (\text{E})$$

である．

(次ページに続く)

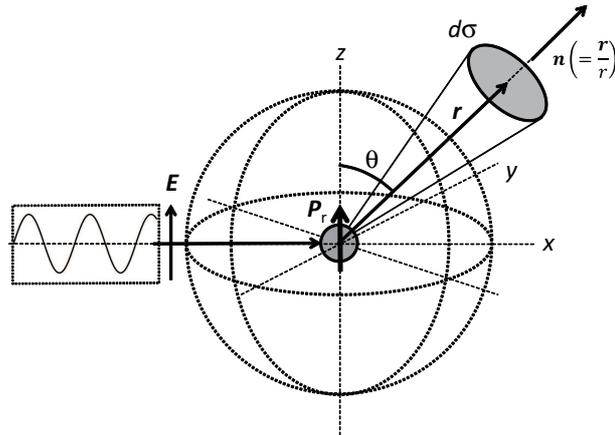


図 1

- (3) $\rho \ll \omega_0, \omega$ の場合に、横軸に入射電磁波の角振動数 ω 、縦軸に問 (2) で得られた微分散乱断面積 $d\sigma/d\Omega$ を取って、 $\omega \sim \omega_0$ を中心とする領域でグラフを描け。また、微分散乱断面積 $d\sigma/d\Omega$ の入射電磁波の角振動数 ω 依存性について、 $\omega \ll \omega_0$ の領域と、 $\omega \gg \omega_0$ の領域に分けて説明し、それぞれの領域で起こる実際の電磁波散乱の具体的な名称を記せ（例：コンプトン散乱）。さらにいずれか一方の領域で、上に述べた散乱現象を原因として観測される自然現象の例を挙げ、その現象を物理的に概説せよ。
- (4) ここで太陽光線が大気中を通過する時、大気中の分子1つ1つにより散乱されて透過光が弱められるものとし、気体分子はそれぞれ1個の電子を角振動数 ω_0 で弾性的に束縛しているとする。この時、1個の分子により角振動数 ω の光が、散乱される全断面積は次式で与えられるとする。

$$\sigma(\omega) = \frac{8\pi}{3} a_0^2 \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^2 \quad (\text{F})$$

ただし、

$$a_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$$

とする。一方、地上から高さ h の所では、単位体積当たり $N(h)$ 個の気体分子が存在し、次式を満たすように、地上から上昇するにつれて分子数が減少するものとする。

$$N(h) = N(0) \exp(-h/\mu) \quad (\text{G})$$

ただし、 μ は長さの次元を持つ定数である。このとき、地上から高さ h の場所で角振動数 ω 、強さ I の光は、 dh だけ降下した時の強度が dI だけ減少するとして、 dh と dI が満たす微分方程式を記せ。

(次ページに続く)

- (5) 地表での光の強度 $I(0)$ を，太陽からの入射光強度 $I(\infty)$ と μ , $N(0)$, $\sigma(\omega)$ の関数として求めよ.
- (6) 大気中の気体分子は，バネ定数 $m\omega_0^2$ の弾性力で電子を束縛しているものとする．また，この角振動数 ω_0 が波長 $\lambda_0 = 100 \text{ nm}$ の紫外線の角振動数に等しい ($\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$) とする．このとき，波長 $\lambda_B = 400 \text{ nm}$ (青) と， $\lambda_R = 700 \text{ nm}$ (赤) の光が地表に到達する割合， $I_B(0)/I_B(\infty)$ と $I_R(0)/I_R(\infty)$ を図2から読み取って，それぞれ2桁程度の値で答えよ．ただし， $8\pi a_0^2/3 = 6.6 \times 10^{-29} \text{ m}^2$, $N(0) = 2.7 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$, $\mu = 1.4 \times 10^4 \text{ m}$ とする.

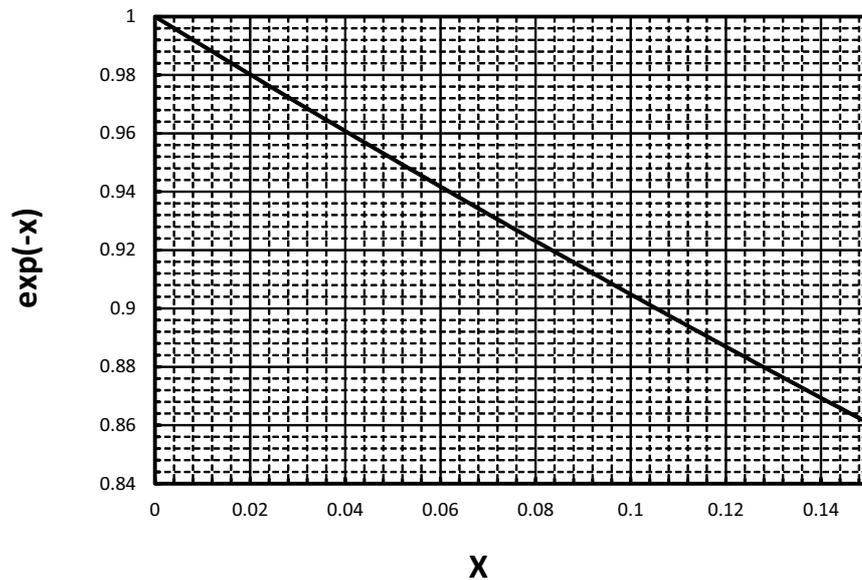


図2

(注) 現実の自然に起こる電磁波の散乱現象は，多数の原子・分子の集団としての様々な揺らぎを起源として起こっていることが，これまでアインシュタインやスモルコフスキーらによって議論されている。

(このページは白紙である)

III-3 (統計力学：変分法による平均場近似) (100点)

古典統計力学においては，系のハミルトニアン \mathcal{H} が与えられると，ボルツマン重率 $\exp(-\beta\mathcal{H})$ ($\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$, k_B はボルツマン定数) を用いて全ての可能な状態に関する和を取ることで原理的には物理量の期待値の計算ができるが，興味ある多自由度系の場合，この計算を厳密に実行できる場合は非常に限られている．このため，何らかの近似を行うことが多い．その一例として以下のようなハミルトニアンで記述される磁性体の問題を考えよう．

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}' (\mathbf{r} \neq \mathbf{r}')} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}') - \sum_{\mathbf{r}} \mathbf{H}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}) \quad (\text{A})$$

ここで，スピン $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ は長さ1の古典的なベクトルとして扱い， \mathbf{r}, \mathbf{r}' はスピンの存在する格子点を表す． $J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$ はスピンの間の交換相互作用の強さを表す正の結合定数で， $J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = J_{\mathbf{r}', \mathbf{r}}$ を満たし， $\mathbf{H}_{\mathbf{r}}$ は外部磁場である．また，因子1/2は，全格子点 \mathbf{r}, \mathbf{r}' についての和を取ると同じスピン対を二次数えてしまうことを補正するためについている．

- (1) まず，この問題で用いられる便利な不等式を証明しよう．実変数 y に対して成り立つ初等的な不等式 $e^{-y} \geq 1 - y$ を用いて，確率変数 X に対する任意の確率分布 $\rho(X)$ を用いた期待値 $\langle e^{-f(X)} \rangle_{\rho}$ について

$$\langle e^{-f(X)} \rangle_{\rho} \geq e^{-\langle f(X) \rangle_{\rho}} \quad (f \text{ は } X \text{ の実関数}) \quad (\text{B})$$

が成り立つことを示せ．ただし，確率分布 $\rho(X)$ は $\rho(X) \geq 0$ をみたし，これを用いた物理量 \mathcal{O} の期待値は

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\rho} \equiv \int dX \rho(X) \mathcal{O}(X), \quad \int dX \rho(X) = 1 \quad (\text{C})$$

と定義される．また必要であれば，式(B)を計算する際，左辺を

$$e^{-\langle f(X) \rangle_{\rho}} \langle e^{-\{f(X) - \langle f(X) \rangle_{\rho}\}} \rangle_{\rho} \quad (\text{D})$$

と書き換え，期待値の評価に $e^{-F} \geq 1 - F$ を用いよ．

(次ページに続く)

系が温度 T で熱平衡にあるとき、その分配関数 $Z(T)$ はボルツマン重率 $\exp(-\beta\mathcal{H})$ を可能な微視的状态全てにわたって加算することで求められる。

$$Z(T) = \int dX \exp(-\beta\mathcal{H}(X)) \quad (\text{E})$$

今の場合、微視的状态は各格子点でスピンの向きを指定すれば決まるので、微視的状态和を計算するには、全格子点 \mathbf{r} についてスピンの向きに関する以下の積分を実行すれば良い。

$$\int dX \equiv \int \prod_{\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{S}(\mathbf{r})}{4\pi} \equiv \prod_{\mathbf{r}} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_{\mathbf{r}} \int_0^{\pi} d\theta_{\mathbf{r}} \sin \theta_{\mathbf{r}} \quad (\text{F})$$

- (2) ボルツマン重率 $\exp(-\beta\mathcal{H})$ を $\rho e^{-\beta\mathcal{H} - \ln \rho}$ と書き換えたうえで問(1)の不等式(B)を用いることにより、任意の確率密度関数 ρ に対して不等式

$$Z(T) \geq \exp\left(-\beta \langle \mathcal{H} \rangle_{\rho} - \langle \ln \rho \rangle_{\rho}\right) \quad (\text{G})$$

が成り立つこと、またそこから自由エネルギー F に対する不等式

$$F \leq F_{\rho} \equiv \langle \mathcal{H} \rangle_{\rho} + k_{\text{B}}T \langle \ln \rho \rangle_{\rho} \quad (\text{H})$$

が導かれることを示せ。ただし、 $\langle \mathcal{O} \rangle_{\rho}$ は式(C)で定義されるものとする。

ここで得られた自由エネルギーに対する不等式(H)は、真の自由エネルギー F が F_{ρ} の下限として与えられることを示しているので、これを統計力学における変分計算に用いることができる。試みに、試行確率分布 ρ として最も簡単な、全系の確率分布が各格子点 \mathbf{r} での確率分布 $\rho_{\mathbf{r}}$ の積の形で与えられるものを考えよう。

$$\rho = \prod_{\mathbf{r}} \rho_{\mathbf{r}} \quad (\text{I})$$

ただし、各点での確率分布 $\rho_{\mathbf{r}}$ はその点にあるスピン $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ の関数であり、各格子点 \mathbf{r} 上で以下の規格化条件を満たす。

$$\frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \rho_{\mathbf{r}}(\mathbf{S}(\mathbf{r})) = 1 \quad (\text{J})$$

- (3) この確率分布(I)に対し、各点での分布を $\rho_{\mathbf{r}} \mapsto \rho_{\mathbf{r}} + \delta\rho_{\mathbf{r}}$ のように微小変化させると、式(C)で定義される、 $\mathbf{S}(\mathbf{r})$, $\ln \rho = \sum_{\mathbf{r}} \ln \rho_{\mathbf{r}}$ の期待値 $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle_{\rho}$, $\langle \ln \rho \rangle_{\rho}$ も変化する。その変分

$$\delta \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle_{\rho}, \quad \delta \langle \ln \rho \rangle_{\rho} \quad (\text{K})$$

を式(F)の積分 $\int d\mathbf{S}(\mathbf{r})/(4\pi)$ と $\mathbf{S}(\mathbf{r})$, $\rho_{\mathbf{r}}$, $\delta\rho_{\mathbf{r}}$ などを用いて表せ。ただし、 $\delta\rho_{\mathbf{r}}$ は点 \mathbf{r} ごとに異なっていてよく、式(J)の規格化条件は後で未定乗数法を使って取り入れるので、ここでは考慮しなくてよい。

(次ページに続く)

上で得られた結果を用いて、式 (H) の右辺で与えられる F_ρ の変分を計算しよう。 ρ が各点の ρ_r の積の形をしているので、 $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}') \rangle_\rho = \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle_{\rho_r} \cdot \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}') \rangle_{\rho_{r'}}$ となり、問 (3) の結果を用いることができる。また、規格化条件の式 (J) は未定乗数法を用いて考慮することにする。

- (4) 式 (I) の形をした分布の中で F_ρ を最小にする、変分法的に最適な解は ρ_r が各点 \mathbf{r} で、

$$-\mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}) + k_B T (1 + \ln \rho_r) = \alpha_r \quad (\text{L})$$

$$\text{ただし、} \mathbf{h}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{H}_r + \sum_{r'(\neq r)} J_{r,r'} \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}') \rangle_{\rho_{r'}} \quad (\text{M})$$

をみたま時に得られることを示せ。ここに α_r は式 (J) の規格化条件に対応する未定乗数である。また、式 (L) を解くことにより、規格化された最適な ρ_r を $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ や $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ などを用いて表し、 $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ がどのような役割を果たしているかに注意しながら、得られた ρ_r の物理的意味を議論せよ。

以上の結果を具体例に応用してみよう。簡単のため、以下の問題では格子として 3次元の単純立方格子を考え、外部磁場がなく ($\mathbf{H}_r = \mathbf{0}$)、 $J_{r,r'}$ は隣接する格子点の間でのみ $J(> 0)$ 、他はゼロとしよう。この時、十分低温では \mathbf{r} によらない様な自発磁化 $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle_\rho$ が発生する強磁性状態になると期待される。

- (5) 式 (M) から、強磁性状態では $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ は場所 \mathbf{r} によらない値 \mathbf{h} を取ると考えられる。以下、簡単のため \mathbf{h} は z 軸の方向を向いており、 $\mathbf{h} = (0, 0, h)$ であるとしよう。問 (4) で得られた確率分布に対し、式 (F) の角度積分を実行することによりスピンの期待値

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle_\rho = \int \prod_{r'} \frac{d\mathbf{S}(\mathbf{r}')}{4\pi} \rho \mathbf{S}(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{S}(\mathbf{r})}{4\pi} \rho_r(\mathbf{S}(\mathbf{r})) \mathbf{S}(\mathbf{r}) \quad (\text{N})$$

を $\xi = h/(k_B T)$ を用いて表せ。

- (6) 式 (M) と問 (5) で得られた $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle_\rho$ を連立して ξ について解くことにより h が求まり、そこから磁化 $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle_\rho$ が決まる。式 (M) を満たすゼロでない h 、すなわち自発磁化が存在する温度の上限 T_c を求めよ。(式 (M) を ξ の方程式としてみたときに、その解が温度 T とともにどのように変化するかを考察してみよ。)

(このページは白紙である)

III-4 (実験：中性子散乱) (100点)

図1に示すような z 軸方向に進む波数ベクトル k_1 質量 m の平面波で表される中性子線をナノサイズの粒子(質量 M , ポテンシャル $V(r)$)に照射し, その散乱波から粒子のサイズを探る実験を考える.

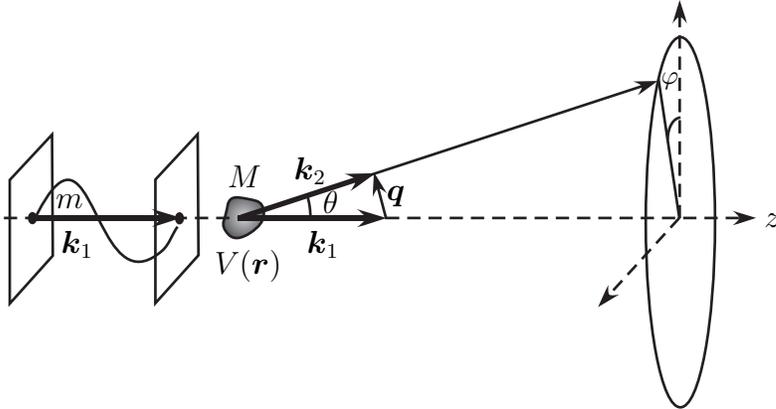


図1

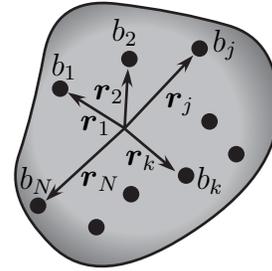


図2

散乱波の波数ベクトルを図1に示す k_2 とし, 弾性散乱のみを考慮する($|k_1| = |k_2|$)とき, 粒子のポテンシャルの有効範囲から十分離れた観測地点での散乱振幅は

$$f(\mathbf{q}) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(\mathbf{r}') \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{A})$$

と与えられるとする. ここで, $\mathbf{q} = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ である.

- (1) 中性子は原子核によって散乱されるが, 原子核の大きさは散乱実験に用いる中性子の波長に比べて著しく小さい. したがって, 原子核の散乱能と位置ベクトルをそれぞれ b_j と \mathbf{r}_j とすると, この原子核の中性子線に対するポテンシャル $V_j(\mathbf{r})$ は

$$V_j(\mathbf{r}) = b_j \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad (\text{B})$$

と書ける. ここで, $\delta^3(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ であり, $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である. 粒子は原子核の集合体であることを考慮して, 図2で示す N 個の原子核からなる粒子の散乱振幅 $f_m(\mathbf{q})$ は

$$f_m(\mathbf{q}) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \sum_{j=1}^N b_j \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j) \quad (\text{C})$$

と表わされる事を示せ. ただし, 原子核間の相互作用は考慮しなくてよい.

(次ページに続く)

実験で測定される散乱強度 $I(\mathbf{q})$ は、散乱振幅の 2 乗に比例するので

$$\begin{aligned} I(\mathbf{q}) &= c \left| \frac{2\pi\hbar^2}{m} f_m(\mathbf{q}) \right|^2 = c \left| \sum_{j=1}^N b_j \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j) \right|^2 \\ &= c \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N b_j b_k \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_{jk}) \quad (\text{ただし } \mathbf{r}_{jk} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \end{aligned} \quad (\text{D})$$

と表せる (c は実験条件に応じた比例定数)。

- (2) 測定する粒子が溶液中に存在するなどして空間に固定されていない場合、散乱は様々な方向を向いた多数の粒子からの重ね合わせとなり、このときの散乱強度は、図 1 における φ に対して等方的となる。つまり、それぞれの粒子において式 (D) における \mathbf{r}_{jk} は大きさを変えずに様々な方向を向いており、1 粒子あたりの平均散乱強度 $\bar{I}(q)$ (ただし $q = |\mathbf{q}|$) は $I(\mathbf{q})$ を q と \mathbf{r}_{jk} のなす極角 χ 、方位角 ω に対して以下の平均をとることで求めることができる。

$$\bar{I}(q) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^\pi d\chi \sin \chi \left\{ c \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N b_j b_k \exp(iqr_{jk} \cos \chi) \right\}$$

ここで、 $r_{jk} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|$ である。上式を計算し

$$\bar{I}(q) = c \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N b_j b_k \frac{\sin qr_{jk}}{qr_{jk}} \quad (\text{E})$$

と表されることを示せ。ただし、溶液中の粒子濃度は十分薄いとして粒子間干渉効果は無視できるとする。

次に、散乱強度 $\bar{I}(q)$ から粒子のサイズを見積もることを考える。

- (3) q が十分に小さい領域 ($qr_{jk} \ll 1$) の散乱強度 $\bar{I}(q)$ は、粒子のサイズを見積もる指標である慣性半径 R_g (式 (G) 参照) を用いて

$$\bar{I}(q) \simeq cb_t^2 \exp\left(-\frac{R_g^2}{3} q^2\right) \quad (\text{F})$$

と表せることを示せ。ここで、 b_t は全原子核の散乱能の和で $b_t = \sum_{j=1}^N b_j$ である。粒子サイズの指標となる慣性半径 R_g は粒子中の散乱能分布の 2 次モーメントであり、以下の式で与えられる。

$$R_g = \sqrt{\frac{1}{b_t} \left(\sum_{j=1}^N b_j r_j^2 \right)} \quad (\text{G})$$

(次ページに続く)

ここで位置ベクトルの原点は，原子核散乱能分布の重心とし

$$\sum_{j=1}^N b_j \mathbf{r}_j = 0$$

が成立するとしてよい．また， $|x| \ll 1$ の時の以下の近似式を用いてよい．

$$\sin x \simeq x - x^3/3!, \quad 1 + x \simeq \exp x$$

- (4) 図3は，粒子Aと粒子Bからの散乱を横軸を q^2 ，縦軸を規格化散乱強度 $\bar{I}_N(q)$ ($\bar{I}_N(q) = \bar{I}(q)/\bar{I}(0)$) の自然対数 ($\log \bar{I}_N(q)$) をとって表示している．この図より式 (F) を利用して，それぞれの粒子の慣性半径をナノメートルを単位として2桁で求めよ．

- (5) 測定条件 (中性子ビーム強度，測定時間，試料中の粒子の数密度) が等しい場合，粒子Aと粒子Bの原点散乱強度 $\bar{I}_A(0)$ と $\bar{I}_B(0)$ の比は

$$\bar{I}_A(0) : \bar{I}_B(0) = 4.0 : 25$$

であった．粒子の全散乱能 b_t と質量 M および粒子の体積 V と慣性半径 R_g の間には，それぞれ近似的に以下の関係式

$$b_t \propto M, \quad V \propto R_g^3$$

が成立する．このとき，粒子Aと粒子Bの密度比を答えよ．

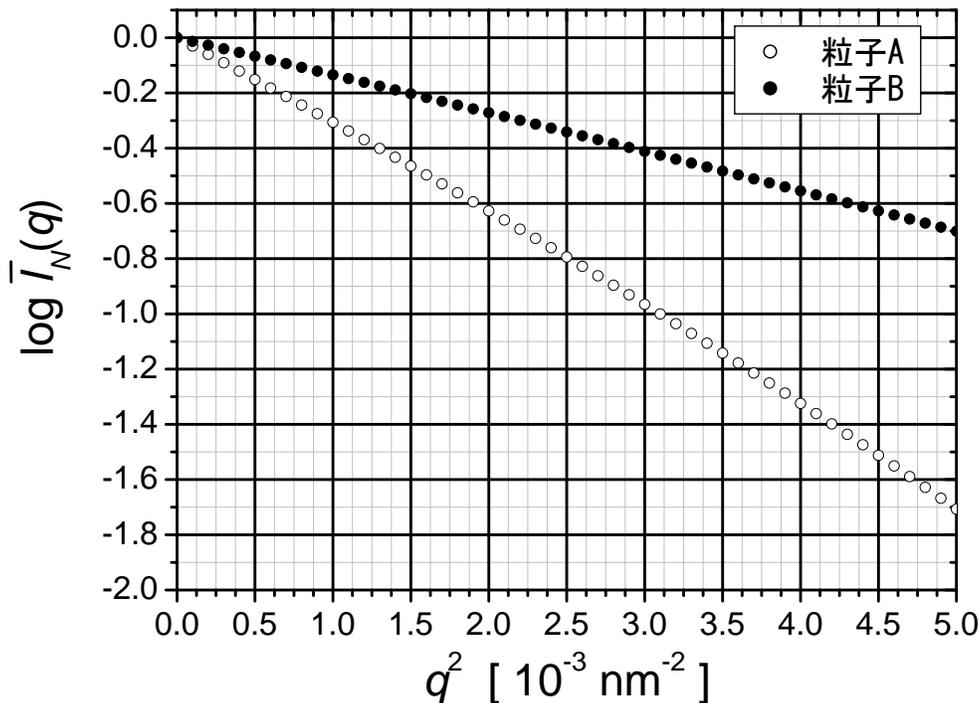


図3

(このページは白紙である)

III-5 (実験：電子回路) (100 点)

物理実験や観測実験には様々な電子機器が用いられている。その中には定電圧回路、電流-電圧変換回路、周波数-電圧変換回路、周波数フィルタ、センサー回路など様々な回路が組み込まれている。このような回路を構成する重要な素子がオペアンプ（演算増幅器）である。オペアンプは図1のような回路記号で表記される。端子は入力が2個（「+側」を非反転入力端子、「-側」を反転入力端子と呼ぶ）と出力が1個ある。ここでは電源端子は省略されている。オペアンプの特徴とそれを用いた回路に関する下記の問いに答えよ。

- (1) 図2のような回路（反転増幅回路）によりオペアンプの特徴を考える。オペアンプの入出力間の電圧には差動利得を A とすると次のような関係がある。

$$V_{OPout} = A(V_+ - V_-)$$

ここで、 V_{OPout} はオペアンプの出力電圧であり、 V_+ 、 V_- はそれぞれ、非反転入力端子と反転入力端子の電圧である。オペアンプを理想オペアンプとし、入力インピーダンスは十分に大きく入力電流は無視でき、出力インピーダンスは十分小さいとする。抵抗 R_1 の左から右へ流れる電流を I_1 とし、 R_2 の右から左へ流れる電流を I_2 とする。反転増幅回路の出力 V_{out} と入力 V_{in} の関係を A 、 R_1 、 R_2 のみを用いて表せ。

- (2) 問(1)の回路では常に出力を安定に保つような動作をしている。出力電圧が僅かに上がると、オペアンプの反転入力端子の電圧が上がるため、オペアンプの出力は下がり、打ち消される。逆に、僅かに下がると、上げる方向に動作する。これは出力が反転入力端子に抵抗を介して接続されていることによる動作で「負帰還（ネガティブフィードバック）」と呼ばれている。オペアンプで負帰還がかかって正常動作をしている場合は、常に反転入力端子が非反転入力端子に一致するように出力電圧が決まる。この状態は反転入力端子と非反転入力端子が電流が流れないものあたかもつながっているようであるので、これを「仮想短絡（バーチャルショート）」と呼ぶ。オペアンプの差動利得 A が大きい場合の反転増幅回路の利得 V_{out}/V_{in} は A に関係なく抵抗の比で決まること、またオペアンプの二つの入力電圧差は 0 となることを示せ。

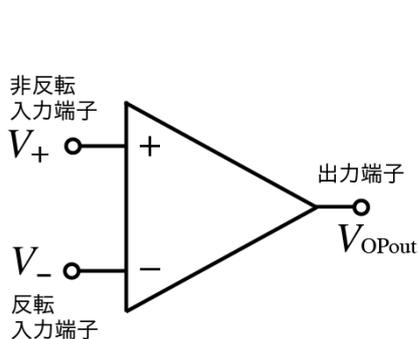


図1

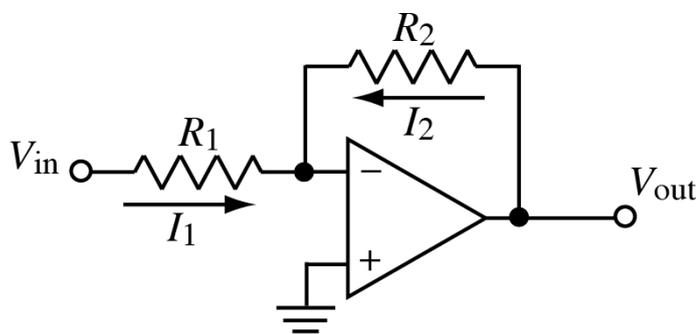


図2

(次ページに続く)

- (3) 2個の抵抗 R_1, R_2 を用いて、非反転増幅回路を示し、その出力 V_{out} と入力 V_{in} の関係性を求めよ。また、反転増幅回路と同様に、差動利得 A が大きい場合の回路利得 V_{out}/V_{in} は A に関係ないことを示せ。
- (4) 次に微分回路を考える。まず、オペアンプ素子を用いないで、抵抗 R とコンデンサー C だけを用いた微分回路を示すとともに、入力電圧 V_{in} と出力電圧 V_{out} の関係式を示せ。
- (5) オペアンプ素子を用いた場合の微分回路を組む。回路図をオペアンプ素子と抵抗 R とコンデンサー C を用いて示すとともに、入力電圧 V_{in} と出力電圧 V_{out} の関係式を示せ。
- (6) 問(4), (5)の回路の時定数を求めよ。ただし、 $R = 2k\Omega, C = 500pF$ とする。これらの回路に図3のような鋸波形の電圧が入力した場合、それぞれの出力電圧波形の概形を示せ。電圧値と時間の数値も示すこと。

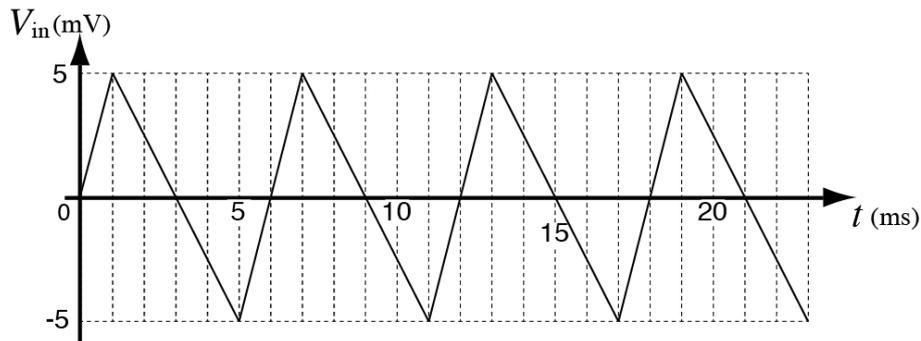


図3

- (7) 回路製作の準備にあたって、次の問いに答えよ。
- (a) 抵抗は一般にカラーコードによりその性能を表している。図4の抵抗はどのような仕様か答えよ。ただし、色と数字の組み合わせは、黒=0, 茶=1, 赤=2, 橙=3, 黄=4, 緑=5, 青=6, 紫=7, 灰=8, 白=9である。
- (b) オペアンプ素子と抵抗等などを用いて基板上に上述の回路を製作・試験する場合に必要な工具や機器を5つあげよ。

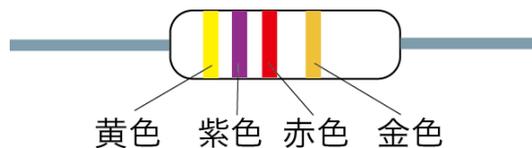


図4

III-6 (天文学) (100点)

大質量の星が形成されると、その大質量星は紫外線を放射し、周囲のガスを光電離する。電離水素領域 (HII 領域) の誕生である。電離水素領域は、X 線から電波まで、さまざまな波長で観測されている。

まず、水素ガスだけで満たされた星間空間を考えよう。

- (1) ある O 型星が単位周波数あたり光度 L_ν [W Hz⁻¹] を放射しているものとする。この放射のうち電離光子の数は $S_* = \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{L_\nu}{h\nu} d\nu$ となる。この積分の端の周波数 ν_0 を有効数字 3 桁で答えよ。必要ならば、以下の数字を使って良い。光速 $c = 3.00 \times 10^8$ m s⁻¹ , プランク定数 $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s , 素電荷 $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C .

- (2) この O 型星が 1 秒間に $S_* = 1 \times 10^{49}$ 個の電離光子を放射している場合を考える。水素の電離断面積は電離光子の周波数によらず一定で $\sigma = 6 \times 10^{-22}$ m² とする。星から距離 $r = 1 \times 10^{18}$ m ($\simeq 30$ pc) の場所で、水素の電離はどの程度のタイムスケールで起こるか、有効数字 1 桁で答えよ。なお、半径 r より内側で光子が電離に使われて減少することは無視して良いものとする。

- (3) 単位時間あたり S_* [s⁻¹] の電離光子を放射している星から距離 r [m] の場所で、中性水素原子、陽子、電子の数密度をそれぞれ、 n_{H^0} [m⁻³] , n_{p} [m⁻³] , n_{e} [m⁻³] とし、電離断面積を σ [m²] , 単位体積・単位時間あたりの再結合係数を C [m³ s⁻¹] としたときに、電離平衡の式を書け。

星からの距離 $r = 1 \times 10^{18}$ m の場所の水素の密度 $n_{\text{H}} (= n_{\text{H}^0} + n_{\text{p}} = n_{\text{H}^0} + n_{\text{e}})$ が $n_{\text{H}} = 1 \times 10^7$ m⁻³ で、星からの光子による電離と再結合の間で平衡が成り立っているとする。再結合係数を $C = 3 \times 10^{-19}$ m³ s⁻¹ として、中性水素の割合 $x \equiv n_{\text{H}^0}/n_{\text{H}}$ がどれほどになるか、有効数字 1 桁で答えよ。

- (4) 水素原子の状態間のアインシュタイン A 係数 $A_{nn'}$ (自発放射での、状態 n から n' への遷移率) は、ほとんどが 10^8 から 10^4 s⁻¹ 程度であり、状態 n から n' への輝線が放射される。これは再結合線と呼ばれ、例えば $n = 3$ から 2 へのバルマー線が、美しい天体写真に見られる電離水素領域の赤い輝きの原因となっている。問 (2), (3) の結果も使って、水素原子は 1 個あたりの平均として、時間的にどのようなサイクルをたどるか記述せよ。

(次ページに続く)

次に、水素に加えて C, N, O などの重元素もわずかに存在する星間空間を考えよう。

- (5) 電離水素領域では、例えば 2 階に電離した酸素イオン O^{++} (または $OIII$ と表す) からの輝線が強く観測される。 O^{++} の基底状態は 3P であり、波長 500nm の放射エネルギーに相当する 1D の励起状態がある。ところが、これらの間の輝線は、アインシュタイン A 係数が $10^{-2}s^{-1}$ 程度と非常に小さい (禁制線とよばれる)。この理由を簡潔に述べよ。

- (6) 星間空間で禁制線が放射されるメカニズムを考えるのに、このイオンの基底状態 1 とその上の状態 2 だけに注目して良いものとする。すなわち、他の励起状態や、低階や高階のイオンを考慮しない。衝突による突き上げの遷移と、衝突による突き下げおよび自発放射の遷移とがつり合っているとしよう。すなわち、

$$n_e n_1 q_{12} = n_e n_2 q_{21} + n_2 A_{21}$$

ここで、 $n_e [m^{-3}]$ は電子の数密度、 $n_1 [m^{-3}]$ 、 $n_2 [m^{-3}]$ はそれぞれ状態 1 と 2 にあるイオンの数密度である。また、 $q_{12} [m^3 s^{-1}]$ 、 $q_{21} [m^3 s^{-1}]$ は衝突の係数で $10^{-14} m^3 s^{-1}$ 程度の値を持ち、 $A_{21} [s^{-1}]$ はアインシュタイン A 係数である。

水素がほとんど完全に電離した領域において、上記の式で、 n_e がきわめて小さい希薄な極限から、きわめて大きい極限までを考える。単位体積・単位時間あたりの放射光子数の、希薄な極限での値を、 n_e を使って表せ。

また、臨界密度 $n_{ec} \equiv \frac{A_{21}}{q_{21}}$ のときの値も同様に表せ。

さらに、このイオンの基底状態 1 にあるものの水素原子に対する個数比を $k \equiv n_1/n_H$ とし、問 (3) のような電離水素領域でのこれらの値を k, n_e で表せ。なお、 $k \ll 1$ である。

- (7) アインシュタイン係数 $A_{21} \simeq 10^{-2}s^{-1}$ 、衝突の係数 $q_{12} \simeq q_{21} \simeq 10^{-14} m^3 s^{-1}$ の場合に、臨界密度 n_{ec} のオーダーを求めよ。
- (8) 以上をふまえ、水素の状態間遷移と比べて、アインシュタイン A 係数がきわめて小さいにもかかわらず、また $k = 10^{-4}$ 程度しかないにもかかわらず、電離水素領域で重元素からの禁制線が強く観測される理由を述べよ。単位体積・単位時間あたりに放射される光子数のオーダーを、水素の再結合線と禁制線でごく簡単に見積もって比べてみよ。

平成25年度大学院入学試験問題 IV (1時間30分)

英語 (100点)

注意

- (1) 問題IV-1,IV-2の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いても良い。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、解答用紙表側の左上部(線より上)に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号、氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表、裏とも解答を書いてはいけない。
- (3) 解答用紙は2問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて4ページまでである。

IV-1

以下の英文は、Philip W. Anderson 著 “More and Different” からの抜粋である。読んで以下の問いに答えよ。

(a) “promising” young scientist’s publication rate grew

(b) By the last decade of the century far too many, especially of the young people,

Observation of the actual working of modern science



(註)

reams of : 大量の

tactical : 戦術の

jockey : 巧みに操縦する

prestige : 高い評判の

dubious : 怪しい

absorption : 夢中, 没頭

grant : 研究助成金

PRL : アメリカ物理学会が発行する論文誌「Physical Review Letters」の略記

fragmentation : 分裂

deterioration : 劣化

proliferate : 急速に増加させる

deconstructionist : 脱構築主義の

aberrant : 常軌を逸した

vision : 幻想

poltergeist : ポルターガイスト, 家の中で音を立てる幽霊

- (1) 下線部 (a) において, promising が二重引用符で囲まれている. その理由を述べよ.
- (2) 下線部 (b) を和訳せよ. ただし, この下線部は 1 文の英文であるが, 適切に 2 文に分けて和訳せよ.
- (3) 一部の社会学者たちは, 科学の真理は純粹に社会学的なものであり, 自然によってではなく力関係により決まると主張している. この見方に対する著者の考えを, 100 字程度の日本語で述べよ.

IV-2

以下の文章は、南部陽一郎氏のノーベル賞受賞記念講演（Nobel Lecture）をもとに作成されたものである。全文章を英訳せよ。

自発的対称性の破れ (SSB) は、物理の基本法則における対称性が破れているように見える現象である。実のところ、我々の日常生活において SSB はたいへんありふれた現象である。例として、垂直に立っているまっすぐな弾性体の棒を考えよう。この棒はどの水平方向から見ても同じであり、回転対称性を持っている。しかし、この棒を押しつぶそうとして徐々に圧力をかけていくと、ある方向に曲がり対称性は失われる。全ての方向は同等なので、この曲がり原理的にはどの方向にも起こり得る。

(ヒント)

自発的対称性の破れ：spontaneous symmetry breaking

弾性体の：elastic

棒：rod

～に圧力をかける：apply pressure to ～

押しつぶす：squeeze

曲がる：bend

(このページは白紙である)