

京都大学大学院理学研究科 物理学・宇宙物理学専攻

平成 24 年度大学院入学試験問題

入試問題は以下の通りです。ただし、英語だけは原典の著作権保護のために、文章を点線にしてあります。文章については原典を参照してください。

また、当日、試験時間内に以下の修正・加筆を行いました。

I-1 問題文 (7) 「そのときの」 → 「そのとき ($h = h_0$ のとき) の」

I-2 2 行目 「印可」 → 「印加」

III-1 問題文 (4) 5 行目 「 $x_a x_a = \sum_a x_a x_a$ 」 → 「 $x_a x_a$ を $\sum_{a=1}^3 x_a x_a$ 」

III-2 問題文 (3) 3 行目 「導線の向き」 → 「導線中での」

III-5 4 行目に追加 「なお、ここでは光の吸収の効果は考えないものとする。」

平成 23 年度専攻教育委員会

平成24年度大学院入学試験問題 I (3時間)

注意

- (1) 問題I-1, I-2, I-3の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、解答用紙表側の左上部（線より上）に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号、氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表、裏とも解答を書いてはいけない。
- (3) 解答用紙は3問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて7ページまでである。

I-1 (力学) (100 点)

原点に向かう中心力 $F(r)$ (r は原点からの距離) による, 質量 m をもつ質点の平面上の運動を考えよう.

- (1) $U = -\int F(r)dr$ で定義されるポテンシャルエネルギーを導入する. 平面極座標 (r, θ) を用いて系のラグランジアンを書き下し, 動径 (r) 方向の運動方程式を導け.
- (2) 角運動量 $h \equiv mr^2\dot{\theta}$ が保存することを示せ.
- (3) 質点の軌道を表す方程式が, $u \equiv 1/r$ を用いて

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{h^2} F(1/u) \quad (\text{A})$$

と書けることを示せ.

まず, 中心力が

$$F(r) = -\frac{km}{r^2} \quad (k \text{ は正の定数}) \quad (\text{B})$$

で与えられる場合を考える.

- (4) 軌道を表す式 $r = r(\theta)$ を求め, $u = 1/r \propto (1 + e \cos \theta)$ (e は 0 または正の実数) の形に書けることを示せ.
- (5) 軌道が楕円となるとき, e は楕円軌道の離心率を表す. 質点の全エネルギー E を, 角運動量 h , 定数 k , m および e を用いて表し, 軌道が楕円となるための E に対する条件を求めよ. また, 角運動量を与えたとき, 全エネルギーが最小となるのは円軌道のときであることを示せ.
- (6) 軌道が円軌道となるとき, その半径は, 有効ポテンシャル (重力ポテンシャルと遠心力によるポテンシャルの和) が極小となる半径であることを示し, その半径を h を用いて表せ.

次に, 中心力が

$$F(r) = -\frac{km}{r^2} - \frac{\epsilon m}{r^4} \quad (k \text{ および } \epsilon \text{ は正の定数}) \quad (\text{C})$$

で与えられる場合を考える.

- (7) 安定な円軌道が存在する (有効ポテンシャルが極小となる点が存在する) ためには, 角運動量は $h > h_0$ (h_0 はある定数) でなければならないことを示し, h_0 を求めよ. またそのとき ($h = h_0$ のとき) の円軌道半径を求めよ.

(次ページに続く)

- (8) 軌道が (7) で求めた半径よりずっと大きな長半径をもち、かつ ϵ が小さな正の値 ($0 < \epsilon \ll kr^2$) のときを考える. このとき, 軌道は楕円軌道からわずかにずれる (図 1 参照). 軌道半径が最大となる角度は, 1 周期ごとにずれることを示し, そのずれの角度 ($\Delta\theta$) を求めよ. なお, 単位はラジアンとする. また, 軌道を楕円で近似したときの離心率は 1 より十分小さいとする.

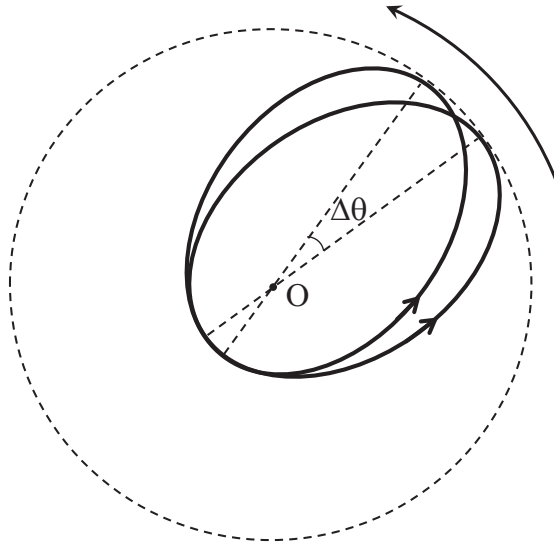


図 1

I-2 (電磁気学) (100 点)

図1のように真空中に置かれた円盤状の平板コンデンサーに電源を接続し、交流電圧 $|\vec{E}_0|h \cos(\omega t)$ を印加する．コンデンサーの極板間の間隔を h ，半径を a とし，極板の厚みは無視できる．コンデンサー内部には真空に対して十分に高い誘電率 ε と，真空と同じ透磁率 μ_0 を持つ誘電体が挿入されている． $a \gg h$ であり，極板端の電場の不均一は無視できるとする．

角振動数 ω が低い場合，極板間の電場は近似的に $\vec{E}_1(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$ と書ける． $t = 0$ の電場の向きは図1のコンデンサー極板間の下から上の向きとする．

- (1) コンデンサー内部の半径 $r(\leq a)$ において，電場 $\vec{E}_1(t)$ によって極板間に誘起される磁束密度 $\vec{B}_1(r, t)$ の大きさを求めよ．また，解答用紙に図1のコンデンサーの部分を書して， $\omega t = \pi/4$ のときの磁束密度の向きを図示せよ．
- (2) コンデンサー内部の半径 $r(\leq a)$ において， $\vec{E}_1(t)$ と $\vec{B}_1(r, t)$ によって極板間に生ずるポインティング・ベクトル $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_1 \times \vec{B}_1$ の大きさを計算せよ．また，解答用紙に図1のコンデンサーの部分を書して， $\omega t = \pi/4$ のときのポインティング・ベクトルの向きを図示せよ．
- (3) コンデンサー内部と外部を出入りする単位時間あたりの電磁場のエネルギーを求めよ．ただし，動径方向に外部からコンデンサー内部に入る向きをプラスとする．
- (4) 電源が供給する電力を計算し，(3)の解答と比較せよ．
- (5) コンデンサー全体の電場の時間平均エネルギーと磁場の時間平均エネルギーをそれぞれ求め，両者の比を計算せよ．

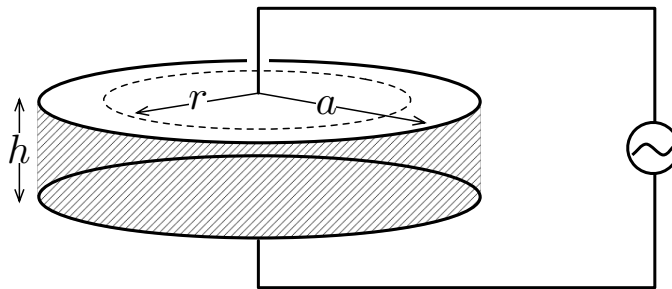


図1

角振動数 ω が高い場合は，磁束密度 $\vec{B}_1(r, t)$ が新たに電場 $\vec{E}_2(r, t)$ を誘起し，電場にも r 依存性が生ずる．

- (6) 図2はコンデンサーの断面図である．破線内部の磁束の変化に着目して $\vec{E}_2(r, t)$ の大きさを求めよ．ただし $\vec{E}_2(0, t) = \vec{0}$ とする．

(次ページに続く)

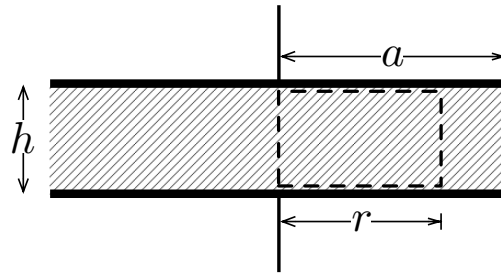


図 2

電場 $\vec{E}_2(r, t)$ はさらに新たな磁束密度 $\vec{B}_2(r, t)$ を誘起し，磁束密度 $\vec{B}_2(r, t)$ はさらに電場 $\vec{E}_3(r, t)$ を誘起する．これがくり返し起こり，その合計が観測される．その結果，コンデンサー内部 ($r \leq a$) で観測される電場および磁束密度は，それぞれベッセル関数 $J_0(kr)$ と $J_1(kr)$ に比例する．ここで $k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon}$ である．それらのベッセル関数を図 3 で示す．

ここで $ka = 3.832$ を満たす角振動数 $\omega = \omega_0$ を選び，コンデンサーの端 ($r = a$) での磁束密度が常に 0 になるようにした．その結果，回路を流れる電流は 0 になった．

(7) $\omega = \omega_0$ での誘電体中の電磁波の波長 λ と a の関係を示せ．

(8) コンデンサーの極板上の電荷分布とその時間変化について記述せよ．必要なら図を使ってもよい．

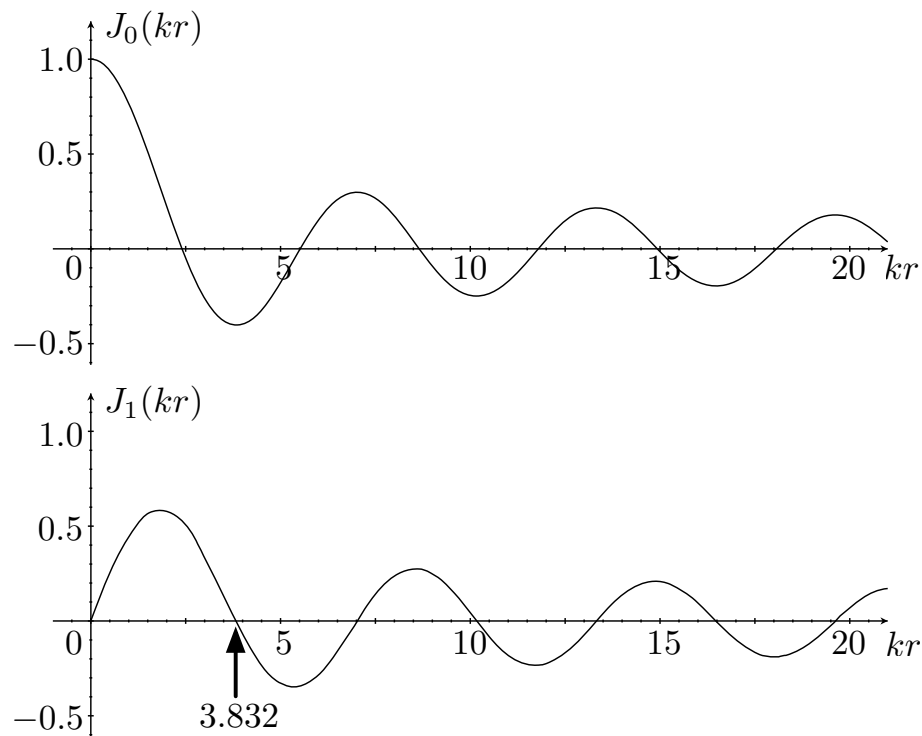


図 3

I-3 (物理数学) (100 点)

フーリエ像およびたたみ込み積分を、それぞれ次のように定義する：

$$\tilde{f}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{i\omega x}, \quad (\text{A})$$

$$f * g(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x-y) g(y). \quad (\text{B})$$

(1) たたみ込み積分のフーリエ像 $\widetilde{f * g}(\omega)$ を、合成される関数のフーリエ像 $\tilde{f}(\omega)$ および $\tilde{g}(\omega)$ を用いて表せ.

(2) 分散 σ^2 (σ は正の実数) をもつガウス分布関数

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{C})$$

のフーリエ像 $\tilde{G}(\omega)$ を求めよ. ここでは、以下の関係式を用いてよい.

$$\int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a \text{ は正の実数, } c \text{ は任意の実数}) \quad (\text{D})$$

1次元空間をブラウン運動で拡散する粒子 (ブラウン粒子) について考える. 時刻 t で位置 x にいた粒子が時刻 t' で位置 x' にいる確率を $p(x'|t'; x, t)$ で表すと, $t_2 > t_1 > t_0$ として

$$p(x_2|t_2; x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 p(x_2|t_2; x_1, t_1) p(x_1|t_1; x_0, t_0) \quad (\text{E})$$

が成り立つ. 式 (C) のガウス分布に従って 1 単位時間につき分散 σ^2 で拡散するブラウン粒子を考えると, $p(x_1|1; x_0, 0) = G(x_1 - x_0)$ を満たす.

(3) 時刻 $t = 2$ でのブラウン粒子の位置の分布は

$$p(x_2|2; x_0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 G(x_2 - x_1) G(x_1 - x_0) \quad (\text{F})$$

で与えられる. $x_0 = 0$ としてこの分布 $p_2(x_2) \equiv p(x_2|2; 0, 0)$ を計算せよ.

(4) (3) で求めた関数 $p_2(x) = p(x|2; 0, 0)$ のフーリエ像 $\tilde{p}_2(\omega)$ を計算し, (2) で求めたフーリエ像 $\tilde{G}(\omega)$ との関係を簡潔に述べよ.

(5) 時刻を, $t = 0, 1, 2, \dots, n$ と離散化して考え, $t = n$ でのブラウン粒子の位置分布 $p_n(x) \equiv p(x|n; 0, 0)$ のフーリエ像 $\tilde{p}_n(\omega)$ を求めよ.

(6) $\tilde{p}_n(\omega)$ を逆フーリエ変換し, $p_n(x)$ を求めよ. また, この場合, 位置 x の平均と分散は時刻 t とともにどう変わるか, それぞれ述べよ. なお, 逆フーリエ変換は次のように表される：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega x}. \quad (\text{G})$$

(次ページに続く)

初期に位置 $x_0 = 0$ にあったブラウン粒子が拡散し、位置 x にある確率 $p(x)$ が

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta} \exp\left(-\frac{x^2}{2\Delta^2}\right) \quad (\text{H})$$

になった場合を考える。この状況において、その粒子を観測したところ、 y の位置にあるという観測結果を得たとしよう。ここで、この観測には ϵ の測定誤差があり、粒子の真の位置が x の場合に y の位置に観測値を得る確率は

$$p(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\epsilon^2}\right) \quad (\text{I})$$

で与えられるものとする。

この状況においては、粒子の位置が x 、観測値が y となる結合確率は

$$p(y, x) = p(y|x)p(x) \quad (\text{J})$$

で与えられ、観測値 y が得られた条件下での粒子の位置 x の分布 $q(x|y)$ は

$$q(x|y) = \frac{p(y, x)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx' p(y, x')} = \frac{p(y|x)p(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx' p(y|x')p(x')} \quad (\text{K})$$

によって与えられる。ここで、式 (K) の分母に現れる

$$r(y) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx' p(y, x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx' p(y|x')p(x') \quad (\text{L})$$

は、この場合に予想される観測値 y の分布関数である。

(7) 分布関数 $r(y)$ を計算し、観測値 y に関する平均と分散をそれぞれ求めよ。

(8) 観測後の $q(x|y)$ における x の期待値と分散をそれぞれ求めよ (x 依存性のみに注目すれば計算は簡単になる)。また、観測誤差がない場合 ($\epsilon = 0$) と観測しない場合 ($\epsilon = \infty$) の両極限について、平均と分散をそれぞれ求めよ。

平成24年度大学院入学試験問題 II (3時間)

注意

- (1) 問題II-1, II-2, II-3の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、解答用紙表側の左上部(線より上)に問題番号, 受験番号, 氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない。
- (3) 解答用紙は3問すべて提出すること。なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて7ページまでである。

II-1 (解析力学) (100 点)

図1のように，地面に固定された物体 A の上部に，水平方向を軸に持つ半径 R の円筒面の下半分の形状を持つ溝が掘られている．その溝の中に半径 a ，長さ b の中空のパイプ B が1本置かれているときの，このパイプ B の運動について考察してみよう．このパイプ B の壁の厚さは無視できるものとし，質量分布はパイプ B の壁面全面にわたって均等で，パイプ B 全体の質量が m であるものとする．また重力加速度は図1の下向き ($-z$ 方向) に g で与えられるものとする．

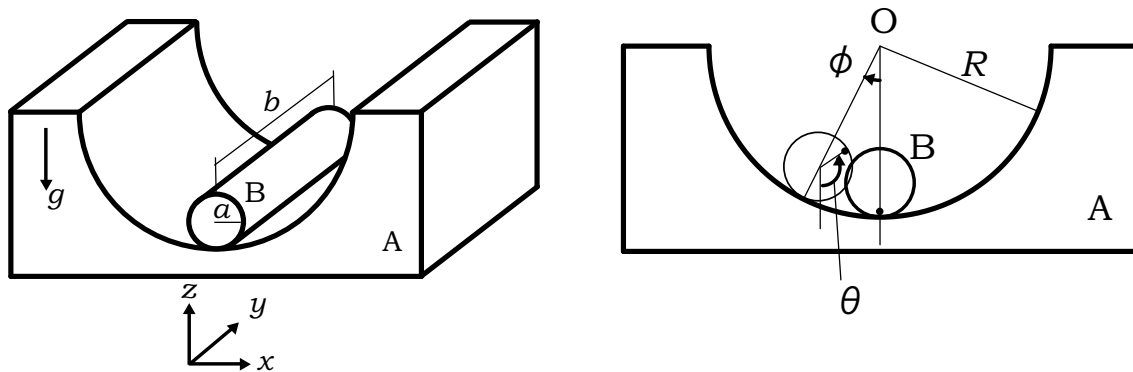


図1

- (1) 図1に示した，溝の中心軸 O 周りのパイプ B の振れ角度 ϕ ，ならびにパイプ B の中心軸周りの回転角 θ を一般化座標としてとり，パイプ B の運動エネルギーと重力ポテンシャルからなるラグランジアンを導出せよ．ただし各角度はパイプ B の平衡位置を基準として定義するものとする．

ここで，パイプ B が物体 A の溝の中で滑ることなく回転して運動する場合を考える．(1) のラグランジアンを元にしてパイプ B の運動を解析したいのだが，パイプ B には重力以外の力が溝表面との間に働くため，その解法には注意しなければならない．溝表面からパイプ B に働く力は「パイプ B は物体 A の溝の中で滑ること無く回転して運動する」との拘束条件を満たすように働く拘束力であることに留意し，以下の解説を参考にして，この問題を解いてみよう．

通常ラグランジュ方程式は，ハミルトンの原理に基づき作用 I が極小値を取る条件より導出することができ，ラグランジアン $L(q_i, \dot{q}_i)$ と一般化座標 q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ならびにその時間微分 $\dot{q}_i$ を用いて，

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right\} \delta q_i dt \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A}$$

とすることにより n 個の方程式が与えられる.

一般化座標 q_i の間の拘束条件 ℓ 個がその時間微分 $\dot{q}_i$ を用いて,

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} \dot{q}_i = 0$$

の形 ($k = 1, 2, \dots, \ell$) で与えられるとする. このとき, 各係数 a_{ki} にラグランジュの未定乗数 λ_k を乗じたものの和

$$\sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k a_{ki}$$

を式 (A) の $\{ \}$ 内に加算した n 個の $\{ \}$ のうち, ℓ 個については $\{ \}$ 内を 0 とするように λ_k を決定できる. さらに, 残りの $n - \ell$ 個の $\{ \}$ に対応する δq_i は独立であると見なすことができるので, あわせて n 個の $\{ \} = 0$ という形の拡張されたラグランジュ方程式を得ることができる. この方程式 n 個と拘束条件 ℓ 個を合わせて解くことにより, 解を得ることができる.

- (2) 一般化座標の時間微分 $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ を用いて, パイプ B の運動を拘束する拘束条件を表せ.
- (3) 拘束条件ならびに未定乗数 λ を利用して, パイプ B の運動を記述する θ と ϕ の運動方程式を導出せよ.

以下の設問では, 振れ角度 ϕ が十分小さいとして近似するものとする.

- (4) パイプ B が周期運動をすることを示し, その角振動数 ω_0 を求めよ.
- (5) 溝表面からパイプ B に働く力のうち円周方向に働く拘束力 F の大きさを求めよ. また, F , ϕ ならびに θ の時間変化をグラフで示せ.
- (6) パイプ B が平衡位置で静止している状態から, 物体 A を **図 1** の x 軸方向に角振動数 ω で微小振動させたとき, パイプ B の運動状態はどうなるか, ϕ の時間変化をグラフにすることで示せ.
- (7) 半径 a , 長さ b , 質量 m だが中心軸上にすべての質量が均等に集中していると近似できる仮想的な円柱 C を考える. 円柱 C をパイプ B の代わりにおいたときの角振動数と比較して, パイプ B の ω_0 はどう違うのか, その違いの生じた理由をエネルギーの観点から簡潔に説明せよ.

II-2 (量子力学) (100 点)

水素原子における 2 次のシュタルク効果と分極率を, 変分法を用いて評価しよう. 水素原子の原子核は電子に比べて十分重いため, ここでは, 原子核の中心を原点とした電子の位置座標に関する波動関数を用いて考察する. 以下では, $\int_0^\infty r^n e^{-\gamma r} dr = n!/\gamma^{n+1}$ ($\gamma > 0$, n は正の整数) を用いてよい.

- (1) 水素原子の基底状態のエネルギーを変分法により求めよ. すなわち, 試行関数を $\phi_0(r) = A \exp(-\lambda r/a)$ とおき, エネルギー

$$W = \frac{\langle \phi_0 | \mathcal{H}_0 | \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle} \quad (\text{A})$$

を最小化する λ を求め, そのときの W を計算せよ. ここで, $a = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2)$ は水素原子のボーア半径, ϵ_0 は真空の誘電率, m は電子の質量である. 電子の電荷は $-e$ ($e > 0$) とする. $\mathcal{H}_0$ は系のハミルトニアンであり, 軌道角運動量演算子を $\vec{L}$ とすると,

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (\text{B})$$

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2 r^2} \right) \quad (\text{C})$$

で与えられる.

以下では, W を最小化する λ を λ_0 , このときの W を W_0 とし, 波動関数として

$$\phi_0(r) = A \exp(-\lambda_0 r/a) \quad (\text{D})$$

を用いる. この $\phi_0(r)$ に対し, 最小エネルギー W_0 はハミルトニアン $\mathcal{H}_0$ の固有値になる. なお, 設問 (3) から (5) までの解答には, λ_0 および W_0 を用いてよい.

- (2) 時間的に一定で空間的に一様な z 方向の弱い電場 $\vec{E} = (0, 0, E)$ (ただし $E > 0$) のもとに水素原子があるときの, 摂動ハミルトニアン $\mathcal{H}'$ を書け. ここで, 電場が水素の原子核に与える影響は無視できるものとする.
- (3) 弱い電場のもとでの基底状態のエネルギーを変分法により求めたい. そこで, 試行関数を

$$\phi = (1 + \rho z)\phi_0(r) \quad (\text{E})$$

とおき, $\langle \phi | \phi \rangle$ と $\langle \phi | \mathcal{H}' | \phi \rangle$ を計算せよ. ここで, ρ は実数の変分パラメータである. また, 波動関数 $\phi_0(r)$ とハミルトニアンの対称性により,

$$\langle \phi_0 | \mathcal{H}' | \phi_0 \rangle = \langle \phi_0 | z \mathcal{H}' z | \phi_0 \rangle = 0 \quad (\text{F})$$

となることに注意せよ.

(次ページに続く)

(4) 交換関係

$$[\mathcal{H}_0, z] = -\frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{G})$$

を導け。これと, $\mathcal{H}_0|\phi_0\rangle = W_0|\phi_0\rangle$ を利用して,

$$\langle\phi|\mathcal{H}_0|\phi\rangle = W_0\langle\phi_0|\phi_0\rangle \quad (\text{H})$$

となることを示せ。

(5) (a) (3) と (4) の結果を用い,

$$W' = \frac{\langle\phi|(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}')|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle} \quad (\text{I})$$

に対して $\frac{\partial W'}{\partial \rho} = 0$ となる ρ を求めよ。ただし, 電場は弱く
 $|2eEa/(\lambda_0 W_0)| \ll 1$ が成り立つとしてよい。

(b) このようにして得られる ρ のうち, $\rho < 0$ の解が W' の最小値, すなわち電場のもとでの基底状態のエネルギー W'_0 を与える。 W'_0 を計算せよ。

(6) 電場による基底状態のエネルギーの変化 ($W'_0 - W_0$) には E の 1 次の項はなく, E の 2 次の項が最低次となることが分かる。分極率 α が

$$W'_0 - W_0 = -\frac{\alpha}{2} E^2 \quad (\text{J})$$

で定義されることを用いて, 水素原子の分極率をボーア半径 a を用いた式で表せ。

II-3 (統計力学) (100 点)

角振動数 ω を持つ調和振動子のエネルギー固有値は、 $n = 0, 1, 2, \dots$ として

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A})$$

で与えられる。以下、いろいろな角振動数を持ち、互いにほとんど独立な N 個の調和振動子からなる系を考える。 $\beta = 1/(k_B T)$ (T は温度, k_B はボルツマン定数) として以下の問いに答えよ。

- (1) j 番目の調和振動子が角振動数 ω_j をもつとき、その調和振動子に対する分配関数 Z_j は

$$Z_j = \frac{e^{-\beta\hbar\omega_j/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_j}} \quad (\text{B})$$

となることを示せ。

- (2) 系全体の分配関数は $Z = \prod_{j=1}^N Z_j$ で与えられる。

(a) ヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ。

(b) 微小角振動数変化を $d\omega$ としたとき、 ω と $\omega + d\omega$ の間にある調和振動子の数は $\rho(\omega)d\omega$ で与えられるとする。このとき、体積一定の熱容量 (定積熱容量) は

$$C_V = k_B \int_0^\infty d\omega \rho(\omega) \frac{(\beta\hbar\omega)^2 e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} \quad (\text{C})$$

となることを示せ。

- (3) N 個の調和振動子がすべて同一の角振動数 ω_E をもつ場合を考える。 ω_E に対応する温度を $\Theta_E = \hbar\omega_E/k_B$ とする。

(a) 低温 ($T \ll \Theta_E$) における定積熱容量の温度依存性を求めよ。

(b) 高温 ($T \gg \Theta_E$) の極限では定積熱容量は定数となる。この極限から温度を減少させていくときの定積熱容量の温度依存性を求めよ。

- (4) すべての調和振動子はある角振動数 ω_D より低い角振動数をもち

$$\int_0^{\omega_D} d\omega \rho(\omega) = N \quad (\text{D})$$

を満たすとともに、 $\rho(\omega)$ は ω^α (α は 0 以上の実数) に比例するとする。

(a) $\rho(\omega) = A\omega^\alpha$ として係数 A を求めよ。

(次ページに続く)

- (b) ω_D に対応する温度を $\Theta_D = \hbar\omega_D/k_B$ とおく．このとき，低温 ($T \ll \Theta_D$) における定積熱容量の温度依存性を T/Θ_D の関数として求めよ．温度依存性の表式には，次の公式を利用して，ガンマ関数 $\Gamma(s)$ とゼータ関数 $\zeta(s)$ を用いてよい．

$$\int_0^\infty dx \frac{x^s e^x}{(e^x - 1)^2} = \Gamma(s+1)\zeta(s) \quad (\text{E})$$

ただし， $\text{Re } s > 1$ である．

- (5) 周期的境界条件を持つ一辺の長さ L の立方体の中に，角振動数 ω が波数ベクトル $\vec{k}$ に依存する調和振動子が N 個存在する場合を考える．ここで， L は十分大きく $\vec{k}$ は連続変数とみなせるとする．また，すべての調和振動子で角振動数と波数ベクトルの関係（分散関係）は同じであり，かつ，(4) と同様にすべての調和振動子はある角振動数以下に分布している． a と b を正の定数として，次の2種類の分散関係を考える．1つは

$$\omega = a |\vec{k}| \quad (\text{F})$$

で，量子化された弾性波や反強磁性体のスピン波の長波長領域で見られる分散関係である．もう1つは

$$\omega = b |\vec{k}|^2 \quad (\text{G})$$

で，強磁性体のスピン波の長波長領域で見られる分散関係である．両者を比較して， $\rho(\omega)$ の ω 依存性の違い，および定積熱容量 C_V の低温での温度依存性の違いについてそれぞれ述べよ．ただし，関数形だけを計算すればよく，それらに付随する係数を求める必要はない．

平成24年度大学院入学試験問題 III (3時間)

注意

- (1) 問題はIII-1 から III-7 まで7問ある。この中から3問選択せよ。4問以上選択した場合はすべての解答が無効になることがある。
 - (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
 - (3) 各解答用紙は横長に使用して、解答用紙表側の左上部（線より上）に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号、氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表、裏とも解答を書いてはいけない。
 - (4) 解答用紙は3問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
 - (5) 問題冊子は表紙を含めて17ページまでである。
-

III-1 物理数学

III-2 電磁気学（荷電粒子の運動）

III-3 量子力学（一次元調和振動子）

III-4 統計力学（イジング・スピン）

III-5 光学

III-6 天文学

III-7 実験（中性子集束）

III-1 (物理数学) (100 点)

以下の問題に答えよ．なお，解答の順番は変えてもよい．

- (1) m を正の実数， $\vec{r}$ を大きさが $r(\neq 0)$ の 3 次元の実ベクトルとして，

$$V(\vec{r}) \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\vec{p}^2 + m^2} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} \quad (\text{A})$$

という 3 次元積分を実行し， $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r} e^{-mr}$ となることを示せ．

- (2) ガンマ関数 $\Gamma(\nu)$ は $\text{Re } \nu > 0$ の領域では，

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{\nu-1} \quad (\text{B})$$

という積分で定義され， $\text{Re } \nu \leq 0$ の領域については，

$$\Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu) \quad (\text{C})$$

という関係式を用いて その定義域を拡張（解析接続）できる．

- (a) $\text{Re } \nu > 0$ のとき $\Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu)$ を示し，正整数 n に対して $\Gamma(n)$ を計算せよ．
 (b) $\Gamma(\varepsilon)$ ， $\Gamma(-1 + \varepsilon)$ は， $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき， ε のどのような関数で近似的に表されるか，それぞれ示せ．

- (3) リーマンのゼータ関数 $\zeta(\nu)$ は $\text{Re } \nu > 1$ のとき $\zeta(\nu) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\nu}$ で定義され，

$$\zeta(\nu) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt \frac{t^{\nu-1}}{e^t - 1} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt e^{-t} t^{\nu-1} \frac{1}{1 - e^{-t}} \quad (\text{D})$$

という積分で表される．ここで，ガンマ関数 $\Gamma(\nu)$ の定義と性質については，(2) の問題文を参照し，解答の際には式 (B) および式 (C) を用いてもよい．

- (a) $\text{Re } \nu > 1$ のとき，式 (D) の右辺が $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\nu}$ に一致することを示せ．

- (b) $\frac{1}{1 - e^{-z}}$ を，原点 $z = 0$ のまわりでローラン展開すると

$$\frac{1}{1 - e^{-z}} = \sum_{n=-1}^\infty A_n z^n \quad (\text{E})$$

と表せる． A_{-1} ， A_0 ， A_1 を求めよ．

- (c) $\zeta(\nu)$ は， $\text{Re } \nu > 1$ の領域で，以下のように表されることを示せ．

$$\zeta(\nu) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt e^{-t} t^{\nu-1} \left\{ \frac{1}{1 - e^{-t}} - \sum_{n=-1}^1 A_n t^n \right\} + \left(\frac{A_{-1}}{\nu - 1} + A_0 + A_1 \nu \right) \quad (\text{F})$$

(次ページに続く)

(d) 式 (F) は、解析接続を用いた $\Gamma(\nu)$ および $\zeta(\nu)$ の定義域の拡張により、 $\text{Re } \nu > -2$ の領域でも成り立つ関係式である。 $\nu = -1$ のとき、式 (F) の右辺の第 1 項の (ガンマ関数の因子を除く) 積分全体が有限になることを示し、 $\zeta(-1)$ を計算せよ。

(4) パウリ行列 $\sigma_a (a = 1, 2, 3)$ は、標準形では

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{G})$$

と表され、 $\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} I + i \varepsilon_{abc} \sigma_c$ を満たす。ここで、 I は 2 行 2 列の単位行列であり、解答の際には $\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} + i \varepsilon_{abc} \sigma_c$ のように I を省略してもよい。

なお、くり返しの添字は $x_a x_a$ を $\sum_{a=1}^3 x_a x_a$ のように和をとるものとする。

(a) $\theta_a (a = 1, 2, 3)$ を実数パラメータとして、 $(\theta_a \sigma_a)^2$ を計算せよ。

(b) $\text{SU}(2)$ の行列 U は、3 つの実数パラメータ $\theta_a (a = 1, 2, 3)$ を用いて

$$U = e^{i \theta_a \sigma_a} \quad (\text{H})$$

と表せる。 $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ を用いて、 $e^{i \theta_a \sigma_a}$ を計算し、

$$U = w_4 + i \sigma_a w_a \quad (\text{I})$$

という形で表せ。導出過程も書くこと。ここで $w_k (k = 1, 2, 3, 4)$ は実数である。

なお、計算の過程で $\theta \equiv (\theta_a \theta_a)^{1/2}$ や $\hat{\theta}_a \equiv \frac{\theta_a}{\theta}$ を用いてもよい。

(c) $\text{SU}(2)$ の行列 U の場合、式 (I) の $w_k (k = 1, 2, 3, 4)$ は独立なパラメータではない。これらが満たす条件を求めよ。

III-2 (電磁気学；荷電粒子の運動) (100 点)

断面積 S の無限に長い円柱の形をした導線中の電子の運動を考えよう．導線中には導線に平行な方向に一様な電場 E がかかっており，そのために，単位体積当たり n 個の電子 (電荷 $-e$) が平均速度 v で運動している．ただし，導線中には電子の電荷密度 ($-ne$) と同じ大きさで，プラスの電荷密度 (ne) をもつ金属イオンが存在し，全体として平均的な電荷密度は 0 に保たれているとする．また，以下では，単純化された古典的モデルを考える．このとき，以下の問いに答えよ．

- (1) 電場 E によってもたらされている電子の運動を，以下のような単純化した過程として考察しよう．電子が電場 E によって加速され，一定時間 τ で金属イオンの熱運動などによって散乱されて速度が 0 になり，再び加速されてまた散乱されて速度 0 になる，ということが繰り返し起こる．その結果，得られる電子の平均速度 v を，電場 E ，一定時間 τ (衝突時間ともいう)，電子質量 m ，電気素量 e を用いて表せ．この簡単なモデルはオームの法則を表現できている．このモデルでの電気伝導度 σ を， n ， e ， τ ， m を用いて表せ．なお，個々の電子間の相互作用は無視してよい．
- (2) 導線の内外には磁場が発生する．導線の中心からの距離 r の場所における磁束密度を求めよ．ただし，導線中は電流密度は一様とし，透磁率を μ とする．また，導線の外の透磁率は真空中の透磁率 μ_0 とする．
- (3) 一般に多数の電子の一方向の運動は，発生した磁場によるローレンツ力のため，直線運動からずれる．この直線運動からのずれは，どのような運動となるか，定性的に述べよ．さらに，導線中での，電子の運動の向き，発生した磁場の向き，ローレンツ力の向きを，それぞれの関係がわかるように図示せよ．
- (4) (3) において，発生した磁場のローレンツ力によって生じる速度を求め，直線運動からのずれは十分小さいことを定量的に確かめよ．ただし，導線の太さは半径 $0.1[\text{mm}]$ ，電流は $1[\text{A}]$ ，電気伝導度 $\sigma = 10^7 [\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}]$ ，導線中の電子数密度は $10^{29} [\text{m}^{-3}]$ とし，電気素量 $e = 1.6 \times 10^{-19} [\text{C}]$ ，電子質量 $m = 9.1 \times 10^{-31} [\text{kg}]$ ，真空中の透磁率 $\mu_0 = 1.3 \times 10^{-6} [\text{H} \cdot \text{m}^{-1}]$ である．また，簡単のため，発生した磁場のローレンツ力を求める際には導線表面における磁束密度を用いよ．なお，電子の直線運動の平均速度は電流密度から求めることに注意せよ．

(次ページに続く)

- (5) 1 個の電荷 $q(> 0)$ の粒子 A が、導線の外で導線に平行に導線中の電子と同じ速度 v で運動しているとする。そのとき粒子 A はローレンツ力を受ける。次に、粒子 A と同じ速度で同じ方向に等速運動する座標系 K を考える。この座標系 K では、プラスの電荷をもつ金属イオンは電子と逆向きに運動しているので、元の電流と同じ向きに電流が流れ、磁場もできるが、粒子 A は静止しているので、ローレンツ力は発生しない。しかしながら、粒子 A の受ける力は、等速運動する座標系 K に移っても消えることはないはずである。この矛盾はどう説明すればよいか？ 数式を用いて説明せよ。ただし、電子の速度 v は光速に比べて十分小さいと仮定する。(ヒント：ローレンツ収縮によって電荷密度が変わることに注意せよ。)

III-3 (量子力学；1次元調和振動子) (100点)

質量 m の 1 粒子が，調和振動子ポテンシャル $m\omega^2 x^2/2$ (ω は正の実数) 中で， x 軸上を 1 次元運動する系を量子力学的に考察する．相対論的效果は無視できるものとする．

(1) 座標変換

$$\eta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \quad (\text{A})$$

により無次元量 η および昇降演算子

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\eta + \frac{d}{d\eta}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\eta - \frac{d}{d\eta}\right) \quad (\text{B})$$

を導入して，ハミルトニアンを書き換えよ．また， $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ の交換関係を示せ．

(2) 位置座標演算子 x および運動量演算子 p を昇降演算子を用いて表せ．

(3) 規格化された調和振動子の基底状態を $|0\rangle$ とするとき，主量子数 ($\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ の固有値) が n の固有状態 $|n\rangle$ は $c_n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$ の形に書けることを示し，規格化定数 c_n を求めよ．

(4) $|n\rangle$ を用いて， x と p に対するそれぞれの分散 (演算子の 2 乗の期待値から演算子の期待値の 2 乗を引いたもの) を計算し，不確定性関係を導け．

(5) 次に，昇降演算子 $\hat{a}$ の固有値方程式

$$\hat{a}|\Phi\rangle = R|\Phi\rangle \quad (\text{C})$$

を考える．ここで固有値 R は簡単のため実数とする．状態 $|\Phi\rangle$ に対して x と p の分散を計算し，(4) の結果との関係を示せ．ここで $\langle\Phi|\hat{a}^\dagger = \langle\Phi|R$ を用いてもよい．

(6) 式 (C) の固有値方程式に $\hat{a}$ の具体的表記を代入し，微分方程式を解くことによって $|\Phi\rangle$ の具体的な波動関数 $\langle x|\Phi\rangle$ の形を求めよ．

(7) 次にハイゼンベルク表示を用い， $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ の時間依存性を考察する．ハイゼンベルクの運動方程式からこれらの演算子の時間依存性を求めよ．

(8) 上で得られた $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ の時間依存性，および (2) で得られた位置座標演算子 x の $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ による表記を用い，ハイゼンベルク表示の位置座標演算子 $x(t)$ の $|\Phi\rangle$ による期待値 $\langle\Phi|x(t)|\Phi\rangle$ を計算し，さらに $x(t)$ の $|\Phi\rangle$ による分散の時間依存性を議論せよ．

(このページは白紙である)

III-4 (統計力学；イジング・スピン) (100 点)

上下 2 方向しか向くことができないイジング・スピンを考えよう．簡単のためスピン磁気モーメントを 1 として扱う．

スピンが外部磁場 H 中に置かれている．スピンは状態 $s = \pm 1$ に応じて，エネルギー $-sH$ をとるとする．

- (1) 温度 T のもとでのスピンの磁化 M およびエントロピー S を求めよ．
- (2) 外部磁場の絶対値 $|H|$ が小さい極限で， M および S の H 依存性を，各々 H に関する 3 次項および 2 次項まで求めよ．
- (3) 有限温度において， M および S が H に依存する様子を図示せよ．

次に，相互作用している 2 個のイジング・スピン $\{s_1, s_2\}$ が外部磁場 H 中に置かれた状況を考える．この場合のエネルギーは

$$E = -Js_1s_2 - (s_1 + s_2)H$$

と表されとすると．相互作用パラメータ J が $J = 0$, $J = J_0$, $J = -J_0$ (J_0 は正の定数) をもつ 3 つの系を考えよう．

- (4) これら 3 つの系について，外部磁場がない場合 ($H = 0$) のエントロピーの値を示し，それらの大小関係を論じよ．
- (5) これら 3 つの系について，同じ温度，同じ磁場 $H(> 0)$ のもとで生じる磁化 M の大小関係を，物理的考察により推定せよ．

次に， $N(\gg 1)$ 個のスピンが互いに同じ強さ $J/N (> 0)$ で相互作用している平均場結合系を考えよう．各スピンが受けている平均場 H_{eff} は，系の全スピンの平均値を $m = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N s_j$ とおくと，

$$H_{\text{eff}} \approx Jm$$

と表すことができる．

- (6) 温度 T で，平均場 Jm の中での各スピンの磁化が，全スピンの平均値 m に等しいとおいたセルフ・コンシステント（自己無撞着）方程式を書き下せ．
- (7) 系を高温から冷やしていくときに，自発磁化 ($m \neq 0$) が生じ始める臨界温度 T_c を求めよ．

(次ページに続く)

- (8) 臨界温度 T_c より高い温度での系全体の自発磁化 M およびエントロピー S の値を求めよ.
- (9) ϵ を正の微小量として, $T = T_c \times (1 - \epsilon)$ のように温度を T_c からわずかに減少させたとき, M および S が, それぞれ臨界温度からのずれ ϵ に応じてどのように変化するかについて, (2) の結果を用いて ϵ に関する最低次の項を示せ.

III-5 (光学) (100 点)

図 1 のように、屈折率 n_1 の気体中から屈折率 n_3 の半無限の誘電体平面基板に光が垂直入射したときの、界面での光の反射を考える．この場合、光の電場は角振動数 ω 、時刻 t 、位相 δ を用いて $E_0 \exp(i\omega t + i\delta)$ のように表すことができ、時間依存性 $\exp(i\omega t)$ を除いた部分を複素振幅という．以下では、入射光、反射光、透過光の電場の複素振幅をそれぞれ、 E_I , E_R , E_T と表す．なお、ここでは光の吸収の効果は考えないものとする．

- (1) 電場と磁場の接続条件から、エネルギー反射率は

$$R = \left| \frac{E_R}{E_I} \right|^2 = \left| \frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3} \right|^2 \quad (\text{A})$$

となることを示せ．

- (2) 気体の屈折率は真空のそれと同じであるとみなすことができ、基板は石英であるときに、入射光の何パーセントが反射されるかを計算せよ．石英の屈折率は $n_3 = 1.5$ とすること．

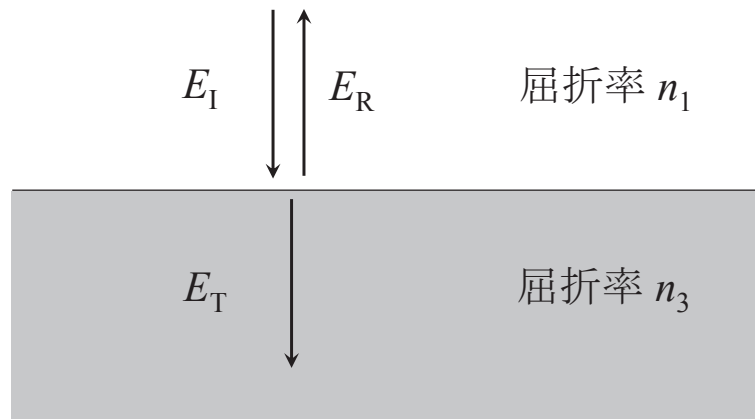


図 1

この石英基板の表面に屈折率 n_2 の誘電体薄膜を厚さ d だけ蒸着し、反射光の強度をできるだけ小さくしたい (このような膜を反射防止膜という)．その設計の指針を以下の手順により考察せよ．以下では、波長 λ_0 の単色光を垂直入射した場合、すなわち、**図 2** に示す入射角 θ が $\theta = 0$ の場合を扱う．

- (3) 光が薄膜中を距離 d だけ進むときの位相差 β と λ_0 の関係を示せ．

(次ページに続く)

- (4) 図2に示すように、気体と誘電体薄膜、誘電体薄膜と石英基板との界面では光の反射が起きる。屈折率 n_i から屈折率 n_j の物質に光が垂直入射するときの反射係数 r_{ij} 、透過係数 t_{ij} を用いて、誘電体薄膜の表面で反射する光の電場の複素振幅は $r_{12}E_I$ と書ける。誘電体薄膜内を1往復して戻ってくる光の電場の複素振幅は $t_{12}r_{23}t_{21}e^{2i\beta}E_I$ となることに注意し、誘電体薄膜内を2往復して戻ってくる光の電場の複素振幅を表す式を求めよ。
- (5) 反射の回数が無限大までの反射光を考慮に入れて、エネルギー反射率 R を求めよ。ただし、 $r_{21} = -r_{12}$ と $r_{ij}^2 + t_{ij}t_{ji} = 1$ の関係を用いて、 r_{21} と t_{ij} を消去した式で表せ。
- (6) 誘電体薄膜の膜厚 d を適当な厚さに設定し、 R が最小となるようにしたい。そのような条件を満たす最小の厚さ d_0 を求めよ。物理的考察を用いて答えてもよい。
- (7) 誘電体薄膜の膜厚が d_0 の2倍であるときの R の値を求めよ。ここで、反射係数と透過係数を屈折率を用いて表すと、それぞれ、 $r_{ij} = (n_i - n_j)/(n_i + n_j)$ 、 $t_{ij} = 2n_i/(n_i + n_j)$ となることに注意せよ。
- (8) (6) の条件のもとで、 $R = 0$ となるような n_2 の値を求めよ。
- (9) 誘電体薄膜の膜厚と屈折率を、それぞれ、(6) と (8) で求めた値にし、波長 λ_0 の単色光の代わりに白色光を垂直入射させる場合を考える。 λ_0 を中心として、反射率が誘電体薄膜のない場合の半分以下となるような波長範囲を概算せよ。

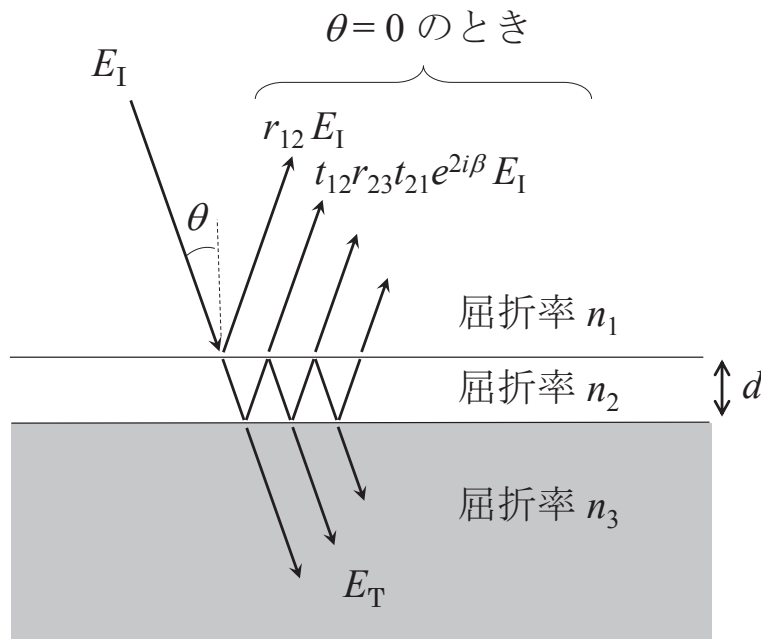


図2

III-6 (天文学) (100 点)

星の線スペクトルについて考察してみよう.

振動数 ν [Hz] の電磁波の放射強度 (放射エネルギー流量) を I_ν [$\text{J}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Hz}^{-1}$] とおくと, 放射の減少分と増加分を考慮して, 1 次元の放射輸送の式は

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu \rho I_\nu + j_\nu \quad (\text{A})$$

と書ける. ここで s [m] は光の経路の長さ, κ_ν [$\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-1}$] は吸収係数, ρ [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$] はガス密度, j_ν [$\text{J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Hz}^{-1}$] は放射エネルギー生成量である. 添字の ν は振動数依存性を示す.

- (1) 無次元量の「光学的厚み」 $\tau_\nu (= \int \kappa_\nu \rho ds)$ を導入し, $I_\nu(\tau_\nu)$ を考察する. 図1のように一様温度 T [K] で光学的厚み τ_ν のガス塊 (大気の一部) に $I_\nu(0)$ の光が入射する状況を考える. 式 (A) で $j_\nu = 0$ として, この方程式を解け. この解をもとに, 光学的厚み τ_ν の物質を通過すると, 入射した光の強度はどう変化するか答えよ.

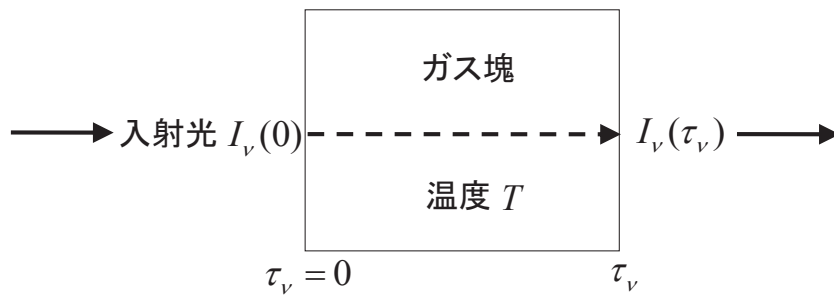


図1

- (2) 局所熱力学的平衡が成り立っているとする, $j_\nu = \kappa_\nu \rho B_\nu(T)$ と表される. ここで $B_\nu(T)$ は黒体放射の強度分布を表すプランクの放射関数 ($\propto \nu^3 / (\exp(h\nu/k_B T) - 1)$, h はプランク定数, k_B はボルツマン定数) である. 図1のガス (大気) で, 至る所で局所熱力学的平衡が成り立っているとして式 (A) を解け. またこの解で, $\tau_\nu \ll 1$ のとき, $I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)(1 - \tau_\nu) + \tau_\nu B_\nu(T)$, $\tau_\nu \rightarrow \infty$ のとき, $I_\nu(\tau_\nu) = B_\nu(T)$ となることを示せ.
- (3) 次に, 表面温度 T_c の球 (光球) が, 一様温度 T_s の大気で覆われている状況を考える. 図2で, a と b の2つの光線のそれぞれにつき, (2) の結果を用いて, 放射エネルギー強度 $I_\nu(\tau_\nu)$ を求めよ. ここで, 光球表面で $I_\nu = B_\nu(T_c)$ としてよい.

(次ページに続く)

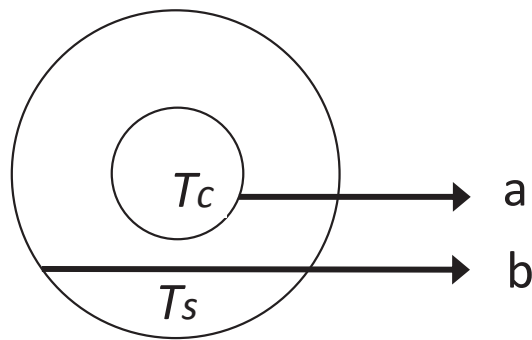


図 2

- (4) κ_ν は $\nu = \nu_0$ のみである値を持ち、それ以外では κ_ν は十分に小さいとする．このとき、図 2 の a と b のそれぞれの場合で、輝線を生じるための T_c と T_s に関する条件を記せ．なお、輝線とは、ある振動数での放射強度がその前後の振動数での放射強度よりも大きいことをいう． $B_\nu(T)$ は $\nu = \nu_0$ 付近で振動数に対してゆっくりとしか変化しないとしてよい．

ある星のスペクトル中の水素のバルマー線 (実験室波長 656.3 [nm] で、水素原子のエネルギー準位 $n = 2$ と $n = 3$ との間の遷移に対応する) が、図 3 で示されている．このスペクトルは、輝線成分と吸収線成分の 2 成分から構成されていると考えられる．以下の問いに答えよ．

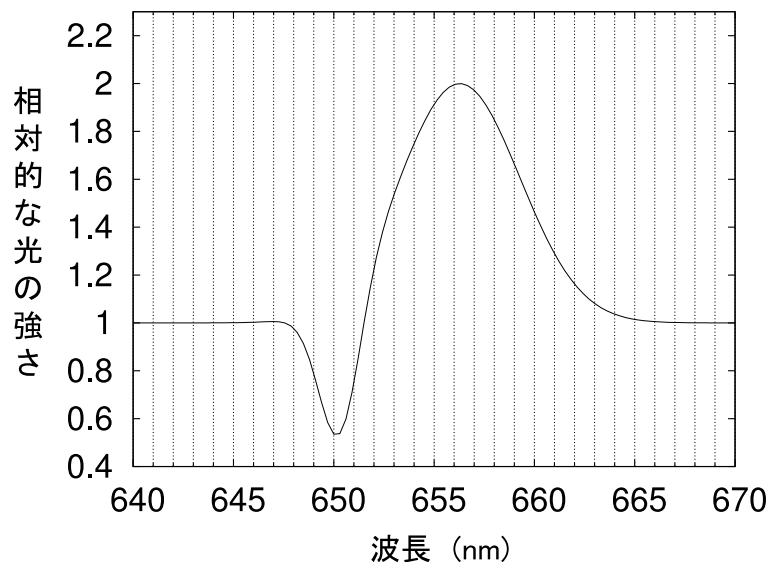


図 3

- (5) この天体で、図 4 のように光球の周りに厚い大気が存在しているとする． $T_c < T_s$ のとき、図 3 のスペクトルは説明できない．その理由を述べよ．また $T_c > T_s$ であるとするとき、輝線成分はどこからきているか、図 4 を写して該当する領域を図示せよ．

(次ページに続く)

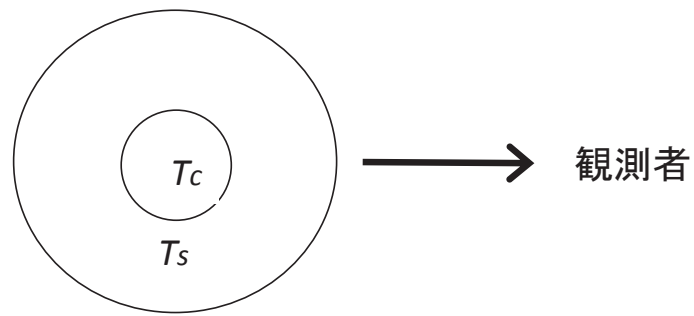


図 4

- (6) 図 3 において，吸収線成分の中心波長は輝線成分の中心波長より短い．この大気は一樣に膨張しているか，収縮しているか，どちらであるか理由とともに述べよ．また，膨張あるいは収縮速度を，有効数字 1 桁で求めよ．

(このページは白紙である)

III-7 (実験；中性子集束) (100 点)

中性子は電荷を持たないが、磁気双極子能率を持っているため磁場と相互作用する．磁気双極子能率を生み出す中性子のスピンの向きは、磁場中では磁場に平行な成分と反平行な成分に量子化される．運動エネルギーの十分低い中性子では、磁場の向きの変化が急激でなければスピンの向きは磁場の向きに常に追従し、平行性 (平行, 反平行) は維持される．磁場と平行な向きのスピンを持つ中性子は、磁場の磁束密度の大きさ B だけに比例したポテンシャル W を感じる．例えば、 $B = 1$ [T] の磁束密度の中で感じるポテンシャル W はスピンと磁場が平行と反平行の場合で符号が逆になるが、その絶対値は 60 [neV] (6.0×10^{-8} [eV]) である．

図1の長さ L の磁場領域には Z 軸からの距離 r のみに依存する大きさ $B(r)$ の磁束密度が存在するとする．中性子が幅のある平行ビームとなって Z 軸方向に運動しているとき、適当な $B(r)$ のもとで磁場に平行なスピンを持つ中性子を Z 軸上のある一点に集束させることができる．ここで、それぞれの中性子は運動エネルギー $K=25$ [meV] (2.5×10^{-2} [eV]) を持つとする．中性子平行ビーム全体は Z 軸を中心として半径 a の円となる断面を持つ． L および a は焦点距離 f に比べて十分短いとする ($a \ll f, L \ll f$)．なお、以下の基礎物理定数は自由に使ってよい．

真空中の光速	3.0×10^8	[m·s ⁻¹]
電気素量	1.6×10^{-19}	[C]
中性子の質量	1.7×10^{-27}	[kg]

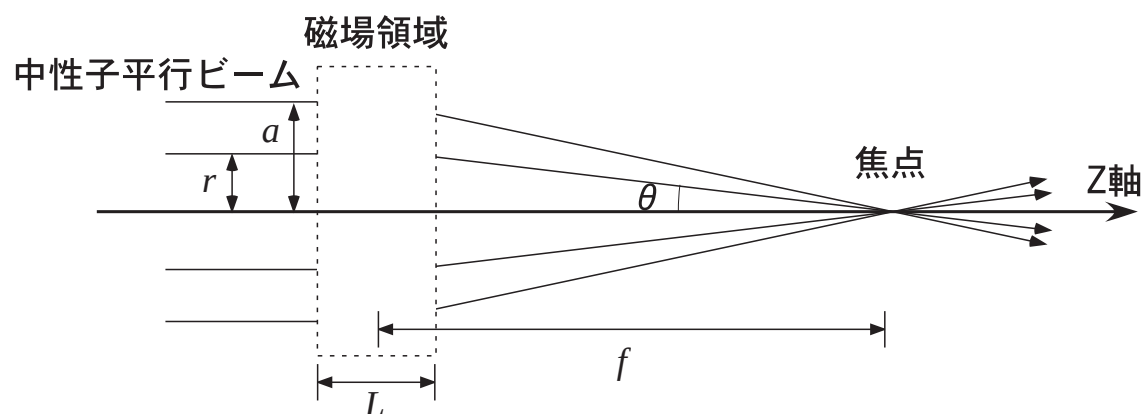


図1

(次ページに続く)

- (1) 中性子の質量 M をエネルギー換算して運動エネルギー K との比を概算せよ.
- (2) 非相対論的運動学による取り扱いのもとで, 中性子の運動量の大きさ p を M と K を用いて表せ.
- (3) 大きさ $B(r)$ の磁束密度により, 中性子は磁場領域で r に依存したポテンシャル $W(r)$ を感じる. ここで α を定数として $W(r) = \alpha B(r)$ の関係がある. このポテンシャルのために生じる運動量変化は Z 軸に対して垂直方向である. 中性子が磁場領域内で受ける力の大きさ F を $M, K, L, \alpha, B(r)$ およびその微分量 $dB(r)/dr$ 等を用いて表し, さらに磁場による運動量変化の大きさ Δp を求めよ.
- (4) Z 軸から r だけ離れた位置を走る中性子が角度 θ だけ偏向して焦点に到達するとする. Z 軸に垂直な方向の運動量変化の大きさ Δp を M, K, r, f 等で表せ. ただし, Z 軸方向の運動量変化はないものとする.
- (5) (3) および (4) の結果を比較して, 磁束密度 $B(r)$ を K, L, f, r, α 等を用いて表せ.
- (6) $r = 5.0$ [mm] での磁束密度の大きさが $B(r) = 1.0$ [T] で与えられ, かつ $L = 1.0$ [m] のとき, 焦点距離 f を求めよ.

IV-1

以下の英文は, Steven Weinberg 著 “The First Three Minutes” の一節である. これを読んで以下の問いに答えよ.

By 1931 the evidence had greatly improved, and

----- Thus, (a) -----

[illegible]

IV-2

以下は、湯川秀樹のノーベル賞の受賞理由に関する文章である。以下の (a) から (e) の日本語を英訳しなさい。

- (a) 長年にわたり、科学の重要な目的の1つは、観測される現象を基本的な粒子の性質によって説明することであった。
- (b) メソンは、湯川の核力に対する理論的な研究によって1934年にその存在が予言されるまで、全く知られていなかった。
- (c) ハイゼンベルクらの先行研究によって、原子核は陽子と、陽子と同じ質量で電荷を持たない別の粒子から構成されているということが知られていた。
- (d) 湯川は、力の到達距離とその力に対応した粒子の間に簡単な関係があることを発見した。
- (e) 湯川はまた、メソンが原子核の外側に現れるのかどうかという重要な問いについても研究を行った。

(ヒント)

メソン: meson, 核力: nuclear force, 原子核: nucleus, 陽子: proton

ハイゼンベルク: Heisenberg, 到達距離: range

(このページは白紙である)