

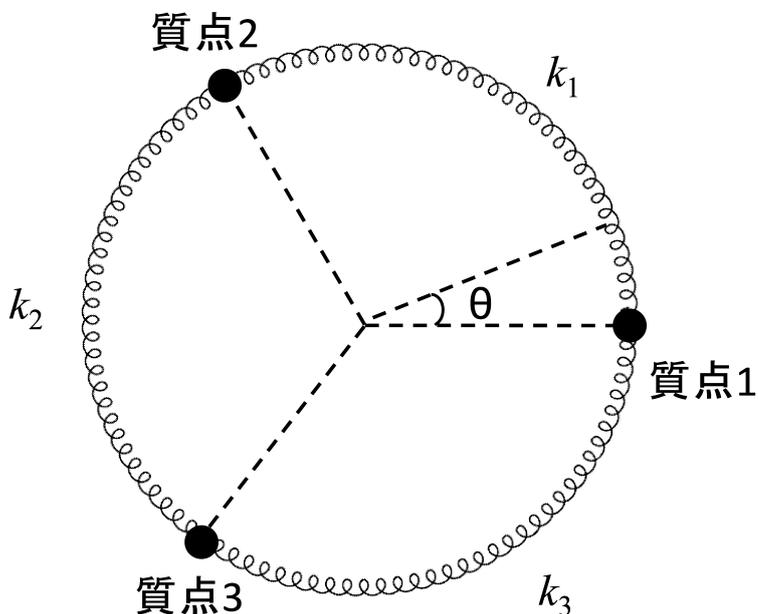
平成23年度大学院入学試験問題 I (3時間)

注意

- (1) 問題I-1, I-2, I-3の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、解答用紙表側の左上部(線より上)に問題番号, 受験番号, 氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない。
- (3) 解答用紙は3問すべて提出すること。なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて7ページまでである。

I-1 (力学) (100点)

- (1) 質量 m の質点が3つ直線状に配置しており，1番目と2番目，2番目と3番目の質点は等しいバネ定数 k のバネで結ばれている．この系の1次元的な運動を考察する．重力の効果は無視できるとする．初期状態ではバネは自然長である．
- (a) 3つの質点の初期位置からの変位を x_1, x_2, x_3 とする．この時の系のラグランジアンを求めよ．
- (b) 基準振動を考察する．ラグランジュ方程式を解くことによって振動数 Ω を求め，求まったモードの対称性について図を使って説明せよ．
- (c) さらに，真中の質点が原点を中心とするバネ定数 k_A の調和振動ポテンシャルのもとにあるとする．この場合の基準振動の振動数を考察せよ．また基準振動の個数について (b) との相違とその理由について述べよ．
- (2) 次に，図のように質量 m の質点が円状に配置しており，これらはバネ定数 k_1, k_2, k_3 の3つのバネで結ばれている．3つの質点は常に円上にあるものとし，復元力も円に沿って作用する．重力の効果は無視できるとする．円の半径を a とし，3つの質点は初期状態では等しい間隔（円の中心から $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$ 方向）におかれており，バネは自然長であるとする．



(次ページに続く)

- (a) まず $k_1 = k_2 = k_3 = k$ の場合を考える. 3つの質点に角度の変位 (質点 1, 2, 3 それぞれに $\theta_1, \theta_2, \theta_3$) を与えた場合のラグランジアンを求めよ. ただし変位角度は微小であるとする.
- (b) この場合の基準振動の振動数 Ω と 3つの質点の振動の振幅に課せられる条件を求めよ. さらに, (1) の (b) で求めた「直線状の場合の基準振動の振動数とモードの対称性の関係」が, 今の円状の場合にはどう変化するかについて簡単に述べよ.
- (c) バネ定数 k_3 が k_A に変化した場合 (残りは k) の基準振動の振動数を求めよ.

I-2 (電磁気学) (100点)

電気抵抗が0である超伝導体では、散乱されない電子が電気伝導を担っていると考えることができる。超伝導体の外部に磁場があるとき、超伝導体内部への磁場侵入を考察する。設問に出てくる定数 $n, -e, m$ は電子の数密度、電荷および質量である。超伝導体内部も誘電率、透磁率は真空中と同じで、それぞれ ϵ_0, μ_0 とする。すなわち超伝導体の反磁性効果は、超伝導体の電流によって生じる磁場への寄与として扱う。

- (1) 電子が全く散乱を受けないとすると電流密度 \mathbf{J} は、電場 \mathbf{E} に対して次式が成り立つことを示せ、

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \mathbf{E}. \quad (\text{A})$$

また常伝導状態の電流密度 \mathbf{J}_N と電場との関係式は、この式と大きく異なる。異なる理由を簡潔に述べよ。

- (2) 前問の (A) 式とマックスウェル方程式から、 \mathbf{J} と磁束密度 \mathbf{B} に関する次の式が導かれることを示せ、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\text{rot} \mathbf{J} + \frac{ne^2}{m} \mathbf{B} \right) = \mathbf{0}. \quad (\text{B})$$

- (3) 前問の (B) 式を積分し、マックスウェル方程式を使い、定常状態になるとして次の式を導き、 λ^2 の表式を求めよ、

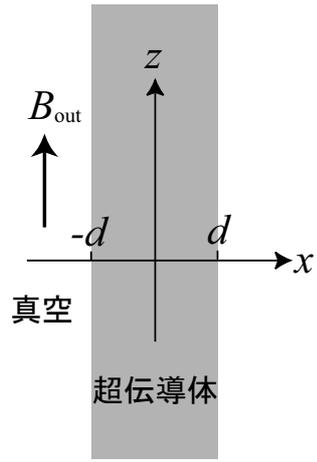
$$\lambda^2 \nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{B}_0. \quad (\text{C})$$

ただし、 \mathbf{B}_0 は時間に依存しないベクトルである。

- (4) 超伝導体の表面から深く入った内部では、磁場も磁束密度も0である。これがマイスナー効果である。超伝導体のあらゆるところで $\mathbf{B}_0 = \mathbf{0}$ とすることにより、(C) 式でマイスナー効果を説明できる。図のように、 $-d \leq x \leq d$ に板状の超伝導体があり、 y, z 方向に十分遠方まで広がっている。 y, z に依存しない z 方向の外部の磁束密度 B_{out} が超伝導体表面にあるとき、(C) 式を解き、超伝導体内部の磁束密度分布を求めよ。また $d \gg \lambda$ であるとき、磁束密度は超伝導体表面から λ 程度しか侵入できないことを示せ。

- (5) 前問で得られた磁束密度を用いて、超伝導体内部を流れる電流密度を $d \gg \lambda$ の場合について計算せよ。結果を電流の方向や x 依存性が分かるように図示せよ。

(次ページに続く)



I-3 (量子力学) (100点)

一次元線分上で運動する2粒子の問題を量子力学的に考える．2粒子は δ 関数型の相互作用を持つと仮定しよう．2粒子の質量はともに $1/2$ であり，それらの座標を x_1, x_2 とするとき，ハミルトニアンは無次元化した表示($\hbar = 1$)で，

$$H = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + 2c\delta(x_1 - x_2) \quad (\text{A})$$

で与えられる．ただし， c は実定数である．

- (1) まず，波動関数の微係数に関する条件を導く．相互作用がデルタ関数型なので，微係数は $x_1 = x_2$ で不連続になる．その結果，波動関数の微係数に関する不連続性を表す式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \psi \Big|_{x_1=x_2+0} - \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \psi \Big|_{x_1=x_2-0} = 2c\psi \Big|_{x_1=x_2} \quad (\text{B})$$

となる．

- (a) 上式を求めるため，まず定常状態 $\psi(x_1, x_2)$ に関するシュレディンガー方程式を，新しい基準座標 $s = x_1 + x_2$ と $r = x_1 - x_2$ で書き直せ．
- (b) 相対座標 r に関して $r = 0$ の近傍で積分することで，微係数に関する条件式を求めよ．座標 (s, r) を元の座標 (x_1, x_2) に戻すことで，(B)式を導出せよ．
- (2) 計算の準備が整ったので，2粒子の固有関数を求めよう．互いに粒子が離れている場合には相互作用が働かないので，波動関数は平面波で与えられる．相互作用による散乱の効果を取り入れるため，2粒子の座標を領域I ($x_1 < x_2$)と領域II ($x_1 > x_2$)に分けて波動関数 $\psi(x_1, x_2)$ を次のように定義する．

$$\text{領域 I } (x_1 < x_2) : \quad \psi(x_1, x_2) = A_1 e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} + A_2 e^{i(k_2 x_1 + k_1 x_2)},$$

$$\text{領域 II } (x_1 > x_2) : \quad \psi(x_1, x_2) = B_1 e^{i(k_2 x_1 + k_1 x_2)} + B_2 e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}.$$

ここで，4つの係数 A_1, A_2, B_1, B_2 と，2つの独立な運動量 $k_1 \neq k_2$ を導入した．

- (a) まず，2粒子がボソンである場合を考えよう．波動関数の対称性，(B)式などを用いて係数 A_1, A_2, B_1, B_2 の間の関係式を求めよ．ただし，波動関数を規格化する必要はない．

(次ページに続く)

- (b) さて，エネルギー固有値を求めるために周期境界条件を課す．長さ L での周期境界条件は， $\psi(x_i, x_j) = \psi(x_i + L, x_j)$ で与えられる．実際に x_1 あるいは x_2 を L だけ移動させると，粒子が交換するときに散乱の影響がでる．この散乱の影響は，係数間の関係に自動的に繰りこまれている．ボソンの場合，周期境界条件の式として次式が得られることを示せ．

$$\exp(ik_2L) = \frac{k_2 - k_1 + ic}{k_2 - k_1 - ic}, \quad \exp(ik_1L) = \frac{k_1 - k_2 + ic}{k_1 - k_2 - ic}. \quad (\text{C})$$

- (c) 2 粒子がフェルミオンである場合はどのようになるか．係数の間の関係式と，周期境界条件の式を求めよ．
- (3) 上記の (C) 式を強い斥力の極限 ($c \rightarrow \infty$) で解いて，フェルミオンの場合と比較してみよう．
- (a) この極限では，ボソンは同じ位置に来ることができなくなる．これはハードコアの極限と呼ばれる．この場合の解 (k_1, k_2) を求めよ．また， (k_1, k_2) のセットの中で最低エネルギーを与えるものを求めよ．以上の結果を用いて，2 ボソン系の最低エネルギー（基底エネルギー） $E_B = k_1^2 + k_2^2$ を求めよ．
- (b) フェルミオンの場合の解 (k_1, k_2) を求めよ．また，この中で最低エネルギーを与えるものを求めよ．基底エネルギー E_F を計算し，これを上記のボソンの結果と比較することで， $E_B < E_F$ となることを示せ．
- (4) 次に，引力相互作用 ($c < 0$) を持つ 2 ボソンを考える．十分大きな系 $L \rightarrow \infty$ に対して，運動量 k_1, k_2 に対する複素解（束縛解）を求めよ．この結果を利用し，束縛状態に対するエネルギーと波動関数を求めよ．ただし，波動関数を規格化する必要はない（ヒント： k が複素数の場合， $\exp(ikL)$ は $L \rightarrow \infty$ で発散するか，あるいはゼロに収束することを用いよ）．

平成23年度大学院入学試験問題 II (3時間)

注意

- (1) 問題II-1, II-2, II-3の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、解答用紙表側の左上部(線より上)に問題番号, 受験番号, 氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない。
- (3) 解答用紙は3問すべて提出すること。なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて7ページまでである。

II-1 (電磁気学) (100点)

一様な磁場分布を得るために、図のようなコイルを考える。半径 a 、巻き数 N_1 のコイルと、半径 $2a$ 、巻き数 N_2 のコイルとが、同一平面上で中心を一致させて巻かれている。コイルの厚みは無視できるものとして、以下の設問に答えよ。ただし真空の透磁率は $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}$ である。また、コイルの中心に円筒座標 $r = (r, \varphi, z)$ の原点 O をとり、コイル面に対して垂直方向に z 軸をとる。

- (1) 内側のコイルだけに図の向きに電流 I を流したときの、軸上の位置 $r = (0, 0, z)$ での磁束密度 $B(0, 0, z)$ を、ビオ・サバールの法則 (A) を用いて求めよ。ここで R は電流素片 $I dr'$ から観測点 r までの距離、 \hat{e}_R はその方向への単位ベクトルである。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 N_1}{4\pi} \oint (I d\mathbf{r}') \times \frac{\hat{e}_R}{R^2}. \quad (\text{A})$$

以下の設問 (2) - (7) では、図にあるように二つのコイルに互いに逆向きに電流 I を流した場合について答えよ。

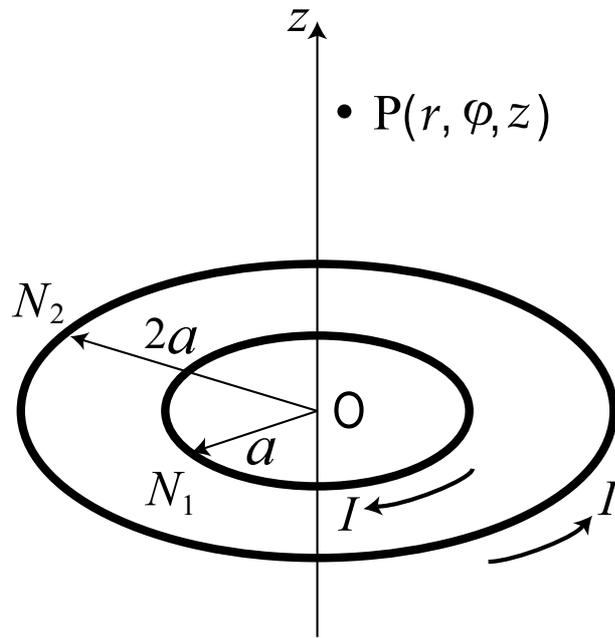
- (2) 軸上での磁束密度 $B(0, 0, z)$ を求めよ。
- (3) 軸上でのコイル中心付近 ($|z/a| \ll 1$) の磁束密度をなるべく一様にするためには、 $N_2 = 8N_1$ にすればよいことを導け。

次に設問 (4) - (7) では、(3) の巻き数比のコイルについて答えよ。

- (4) 軸上での正確な磁束密度 $B(0, 0, z)$ を、 N_2 を使わずに表せ。
- (5) 軸上かつ中心付近 ($|z/a| \ll 1$) での磁束密度 $B(0, 0, z)$ を、 z/a の 4 次の項までの展開式で表せ。
- (6) $a = 1.0 \text{ cm}$ 、 $N_1 = 10$ のとき、コイルの中心に $1.0 \text{ ガウス} = 1.0 \times 10^{-4} \text{ T}$ を発生させるための電流 I を求めよ。またコイル中心の軸上に置いた、全長 $l = 2.0 \text{ mm}$ の細い棒状試料にかかる磁場の強さは、中心と両端で何%異なるか求めよ。
- (7) 任意の z について、軸からわずかに離れた位置 $P(r/a \ll 1)$ での軸に垂直方向の磁束密度 $B_r(r, \varphi, z)$ を求めよ。ただし $B_z(r, 0, z) \cong B_z(0, 0, z)$ と近似できるものとし、また r/a の 2 次以上の項は無視してよい。なお円筒座標系でのベクトルの発散は以下で与えられる：

$$\text{div} \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (\text{B})$$

(次ページに続く)



II-2 (物理数学) (100点)

以下の設問に答えよ.

- (1) 以下の微分方程式の特解と一般解を求めよ.

$$y = xy' + (y')^2. \quad (\text{A})$$

ただし $y' \equiv dy/dx$ である (ヒント: 両辺を x で微分してみよ.) また, 一般解の幾つかと特解とを (x, y) 平面で図示し, それらの幾何学的関係を述べよ.

- (2) 微分方程式

$$y' = e^{-2xy} \quad (\text{B})$$

の解に

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = a (> 0) \quad (\text{C})$$

を満たすものがある. この解の $x \rightarrow +\infty$ での近似展開の式 $y = a + \dots$ において, a の次の2項目と3項目を求めよ.

- (3) 以下の積分を実行して値を求めよ.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx. \quad (\text{D})$$

- (4) 領域 $\theta \in \{-\pi, \pi\}$ で定義された以下の関数のフーリエ展開を求めよ.

$$f(\theta) = \begin{cases} -1 & \text{for } -\pi < \theta < 0, \\ 0 & \text{for } \theta = 0, \\ +1 & \text{for } 0 < \theta < \pi. \end{cases} \quad (\text{E})$$

- (5) あるコンビニの昼の T 分間に N 人の客が来店するという. その間, 客の来店はランダムであるとして, ある一分間に n 人の客が来る確率 P_n を求めよ. また, $T \gg 1$, $N \gg n$ の時には, その確率がポアソン分布で近似されることを示せ.

(このページは白紙である)

II-3 (統計力学) (100点)

以下の設問に答えよ。

- (1) 温度 T で平衡状態にある理想気体を閉じ込めた容器に円形の小孔を開けた。小孔の直径も奥行きも気体分子の平均自由行程より十分短いとする。また、簡単のため、容器の外は真空であるとする。そのとき単位時間、単位面積あたりに小孔から出て行く分子数 R が気体の種類によらず

$$R = \frac{1}{4}n\langle v \rangle \quad (\text{A})$$

と書けることを示せ。ただし、 $n, \langle v \rangle$ はそれぞれ気体の数密度、平均速さである。また速度分布は等方的であり、速さ v の分布関数 $f(v)$ は $4\pi \int_0^\infty dv v^2 f(v) = n$ を満たすものとする。なお、一般に小孔のある壁に垂直な成分と平行な成分の独立性は保障されないことに注意すべきである。

- (2) マクスウェル分布に従う質量 m の古典理想気体を容器に入れたときに、(A) 式に基づき R を数密度 n と温度 T の関数として表せ。
- (3) 同種の理想気体を入れた2つの容器を小孔で繋ぐことを考える。それぞれの容器の小孔が開いていない壁は透熱壁であり、熱浴と接触して容器内を一定温度に保つことができるとする。厳密には小孔から流入する気体によって小孔近傍の気体は平衡状態でなくなるが、その影響は小さいとして無視し、小孔で繋いだ2つの容器内の気体は、それぞれ平衡状態を保っているものとする。

- (a) ここで温度 T_H の古典理想気体を入れた容器と、温度 T_L の古典理想気体を入れた容器を小孔で繋いだとき平衡条件が

$$\frac{P_H}{\sqrt{T_H}} = \frac{P_L}{\sqrt{T_L}} \quad (\text{B})$$

となることを示せ。ただし、 P_H, P_L はそれぞれ温度 T_H, T_L に保った容器の圧力である（このように分子間衝突が無視できる状態で平衡化した稀薄気体はクヌーゼン領域にあると言われる。）

- (b) 1粒子当たりのエネルギー ϵ が $\epsilon = cp$ で与えられる光子気体の場合に、(A) 式の R が温度のみの関数であることを示し、その値を求めよ。ただし、 c, p はそれぞれ光速、運動量の大きさである。また光子気体は化学ポテンシャルがゼロのボース分布に従うことと $\zeta(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^x$ を用いて良い（このことから光子気体の小孔を通じた接続では左右の容器の温度が等しくない限り平衡にならず、 $T_H \neq T_L$ の条件下では熱伝導が存在する非平衡定常状態になる。）

(このページは白紙である)

平成 23 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題は III-1 から III-7 まで 7 問ある。この中から 3 問選択せよ。4 問以上選択した場合はすべての解答が無効になることがある。
 - (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
 - (3) 各解答用紙は横長に使用して、解答用紙表側の左上部(線より上)に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号、氏名を書いてはいけない。この線より上の欄には表、裏とも解答を書いてはいけない。
 - (4) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
 - (5) 問題冊子は表紙を含めて 15 ページまでである。
-

III-1 力学 (潮汐力)

III-2 量子統計 (一次元調和振動子)

III-3 量子力学 (ポテンシャル問題)

III-4 物理数学 (常微分方程式)

III-5 実験 (放射線計測)

III-6 実験 (真空)

III-7 宇宙 (コンパクト天体)

III-1 (潮汐力) (100点)

潮の満ち引きが起こる原因となる潮汐力について考察する．以下，地球と月のみを考え，それぞれの質量を M, m ，中心間距離を D ，地球の半径を R ，共通重心と地球中心間の距離を d ，月の公転の角速度を ω とする (図1)．ただし，地球の自転が及ぼす影響については考えず，公転軌道の離心率は0であり，万有引力定数は G とする．

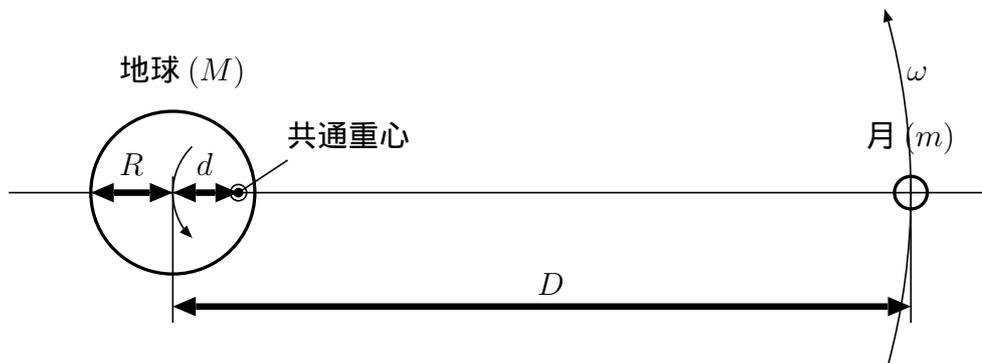


図1

(1) 以下の文章の空欄を埋めよ．

ある瞬間における地球上の月への最近点と最遠点をそれぞれ点A, 点Bとする (図2)．地球の自転を考えないとき，地球上の全ての点はある円周に沿って平行移動するように運動する．すなわち点A, 点Bを含む地球上の全ての点は半径 ，角速度

で相互の位置関係や向きを保った状態で運動する．このとき，地球中心位置での遠心力と月との引力の釣り合いから G, m, D, d, ω の関係を求めると となる．また，地球上の月への最近点と最遠点にある単位質量の質点に対する月の引力と遠心力の差をそれぞれ G, m, R, D で表すと となり，これを (R/D) の1次までで近似すると となる．

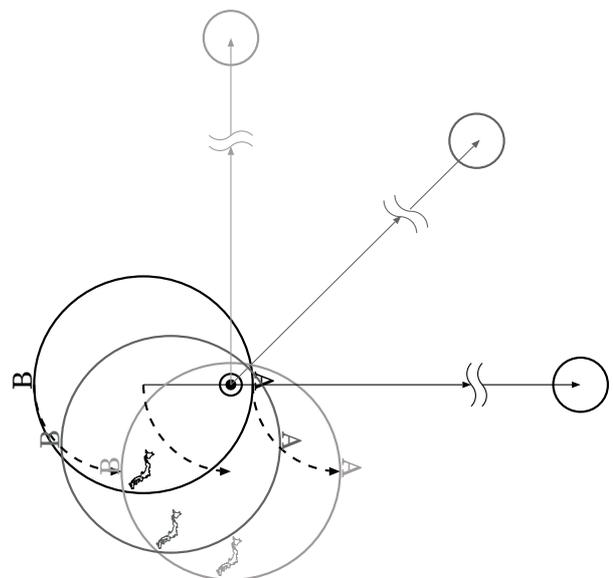


図2

(次ページに続く)

- (2) 次に，地球中心を原点とし，月の位置ベクトルを D ，地球表面付近のある点の位置ベクトルを R ， R と D のなす角を θ とする (図 3)．位置 R にある単位質量の質点に対する月の引力ポテンシャル $U(R)$ を (R/D) の 2 次の項までで近似し，その各項が，公転運動や潮汐力とどのように関係しているか説明せよ．

- (3) 前問で求めた $U(R)$ に含まれる潮汐力に関連する部分を用いて，潮汐力の R 方向の成分 F_R と θ 方向の成分 F_θ (図 3) を求めよ．

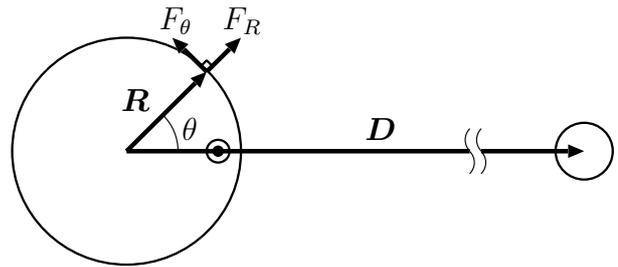


図 3

- (4) 公転軸方向より見た海面の形状を特徴がわかるように図示し， $\theta = n\pi/6$ の地球表面上の各点における潮汐力ベクトルの概要を図示せよ (誇張のために海面が地表面より内側に描かれていても構わない)．必要であれば図 4 を解答用紙に書き写して使用しても良い．

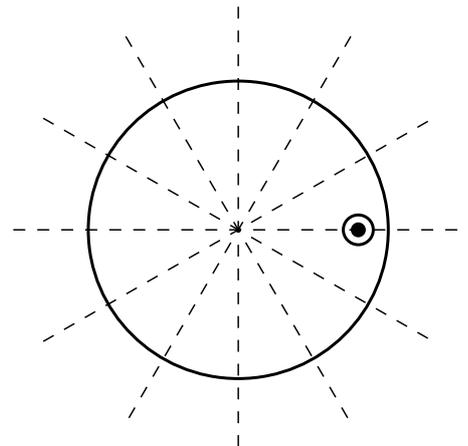


図 4

III-2 (量子統計：一次元調和振動子) (100点)

調和ポテンシャル中の古典ならびに量子系の統計力学的性質を考察しよう。

- (1) まず, N 個の古典的な一次元調和振動子から成る系を考える。系のハミルトニアンは位置座標 x_i , 運動量 p_i を用いて

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2m} p_i^2 + \frac{k}{2} x_i^2 \right) \quad (\text{A})$$

で与えられる。

- (a) 分配関数を求めよ。
(b) エネルギーの期待値を計算し, その結果を用いて比熱を求めよ。
- (2) 古典力学と異なり, 量子力学的な調和振動子では, エネルギーは次のような離散的な値をとる:

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B})$$

ただし, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ である。

- (a) N 個の独立な調和振動子からなる量子系に関する分配関数を求めよ。
(b) エネルギーの期待値および比熱を求めよ。比熱の温度依存性の概略図を描け。
(c) 量子系に対する比熱の表式を低温極限ならびに高温極限で評価し, 古典論と量子論の相違点について議論せよ。
- (3) 次に多電子が一次元の調和ポテンシャルに閉じ込められて運動する場合を考えよう。1電子のエネルギー固有値は(B)式で与えられる。一様な磁場 H がかけられており, 磁場は電子のスピン内部自由度 σ と結合し, ゼーマンエネルギー E_σ ($\sigma = \uparrow, \downarrow$) を与える:

$$E_\uparrow = -\frac{1}{2}g\mu_B H, \quad E_\downarrow = \frac{1}{2}g\mu_B H. \quad (\text{C})$$

ただし, g はランデの g 因子, μ_B はボーア磁子である。

- (a) 系が熱浴, 粒子浴と接触していると仮定し, 電子系の大分配関数を求めよ。また, 大分配関数よりスピン $\sigma (= \uparrow, \downarrow)$ の電子数の期待値 N_σ の表式を導出せよ。化学ポテンシャルは μ とする。

(次ページに続く)

- (b) 調和ポテンシャルが弱くなると，エネルギー間隔 $\hbar\omega_0$ は小さくなる．ここでは，化学ポテンシャル μ を固定し， $\omega_0 \rightarrow 0$ の極限を考える．この極限では，エネルギー固有値は稠密に分布するので，量子数 n に関する離散的な和は近似的に積分に置き換えることができる． $k_B T \ll \mu$ を満たす低温領域での比熱を T の最低次まで求めよ．ここで， μ には温度依存性がないものとし，磁場は $g\mu_B H < 2\mu$ の範囲をとるものとする．

ただし， $\beta \rightarrow \infty$ で

$$\frac{1}{\beta} \int_0^\infty dx g(x) \log[1 + \exp(-\beta(x - \mu))] \simeq \text{定数} + \frac{\pi^2}{6\beta^2} g(\mu)$$

となることを用いてよい．

- (c) 次に絶対零度で有限磁場の場合を考えよう．ここでも $\omega_0 \rightarrow 0$ の極限を考え，量子数の和は積分に置き換えられるものとする．ここで，磁化

$$M = \frac{1}{2} g\mu_B (N_\uparrow - N_\downarrow)$$

の磁場依存性を計算せよ．ただし，磁場は $g\mu_B H < 2\mu$ の範囲をとるものとする．

III-3 (量子力学：ポテンシャル問題) (100点)

1次元空間に質量 m の粒子がある．この空間の座標を x として，この粒子に働くポテンシャルは

$$V(x) = g^2 x^4 \quad (g > 0) \quad (\text{A})$$

であるという．以下の設問に答えよ．

- (1) この粒子が量子力学に従うとして，その基底状態のエネルギーを E_0 とする．次元解析により， E_0 が \hbar ， m ， g にどう依存するかを求めよ．
- (2) この粒子のエネルギー準位の近似値を，変分法を使って求めることを考える．変分法とは，あるパラメータを持つ波動関数 $\Psi(x)$ を用意し，そのエネルギー期待値をパラメータについて最小化することでエネルギー固有値の近似値を求めることを意味する．

(a) 任意の規格化可能な波動関数 $\Psi(x)$ を持つ状態は，必ず基底状態のエネルギー E_0 より大きいか等しいエネルギー期待値を持つことを示せ（したがって，上に述べた変分法によって， E_0 の上限が求まる．）

(b) 波動関数

$$\Psi(x) = N e^{-bx^2} \quad (N > 0, b > 0) \quad (\text{B})$$

が規格化されているための N の値と，そのエネルギー期待値を求めよ．

(c) 上の結果を用いて，変分法により E_0 の近似値を求めよ．

(d) 次に，同様にして第1励起状態のエネルギーの近似値を求めるためには，波動関数をどう選べばよいか？理由を明示して答えよ．

- (3) 上で示したように，量子力学のエネルギー準位は g に依存していて， g の値は物理的に重要な意味を持つ．しかし，この粒子が古典力学に従うときは， g に対する依存性は非常に単純なものである．これはなぜかを説明せよ（ヒント：作用，または運動方程式を書き出し， $y = gx$ とスケール変換を試してみよ．）また，古典力学で重要ではない g が，量子力学ではなぜ重要な意味を持つかを説明せよ．

(このページは白紙である)

III-4 (物理数学：常微分方程式) (100点)

(1) $\dot{y}(t) \equiv dy(t)/dt$, $\ddot{y}(t) \equiv d^2y(t)/dt^2$ として, 2階の非斉次線形常微分方程式

$$\ddot{y}(t) + a(t)y(t) = r(t) \quad (\text{A})$$

の一般解を以下の手順に従って求めてみよう.

(a) 斉次方程式

$$\ddot{y}(t) + a(t)y(t) = 0$$

の独立な一般解を $y_1(t)$, $y_2(t)$ としたとき

$$Y(t) \equiv c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$$

が条件

$$\dot{c}_1(t)y_1(t) + \dot{c}_2(t)y_2(t) = 0, \quad \dot{c}_1(t)\dot{y}_1(t) + \dot{c}_2(t)\dot{y}_2(t) = r(t)$$

の下で (A) 式の解になっていることを示せ.

(b) $c_1(t)$, $c_2(t)$ の連立微分方程式を解くことで, その解が

$$c_1(t) = c_1(0) - \frac{1}{W} \int_0^t r(s)y_2(s)ds, \quad c_2(t) = c_2(0) + \frac{1}{W} \int_0^t r(s)y_1(s)ds \quad (\text{B})$$

となることを示せ. このとき W が時間によらない定数であり

$$W = y_1(0)\dot{y}_2(0) - \dot{y}_1(0)y_2(0)$$

となることを示せ.

(2) (1) で解いた 2 階の非斉次線形常微分方程式を, 理想化された溶媒中の粒子の問題に適用してみよう. 質量 M , 位置 $X(t)$ の溶質粒子が質量 m , 位置 $\{x_j(t)\}$ の N 個の溶媒粒子 $j = (1, 2, \dots, N)$ からの影響を受けて運動方程式

$$M\ddot{X}(t) = \sum_{j=1}^N \gamma_j \left\{ x_j(t) - \frac{\gamma_j}{m\omega_j^2} X(t) \right\}, \quad (\text{C})$$

$$m\ddot{x}_j(t) = -m\omega_j^2 x_j(t) + \gamma_j X(t) \quad (\text{D})$$

に従うとする. ただし, ω_j , γ_j はそれぞれ定数であるとする. このモデルでは溶媒粒子同士の相互作用は無視されている.

以下の設問に答えよ.

(次ページに続く)

- (a) (D) 式が (A) 式と同じ形の微分方程式であることを利用して, (D) 式の解を求めよ. その解を書き直すと

$$x_j(t) = \frac{\gamma_j}{m\omega_j^2} X(t) - \frac{\gamma_j}{m\omega_j^2} \int_0^t \cos[\omega_j(t-s)] \frac{dX(s)}{ds} ds + \left\{ x_j(0) - \frac{\gamma_j}{m\omega_j^2} X(0) \right\} \cos(\omega_j t) + \dot{x}_j(0) \frac{\sin(\omega_j t)}{\omega_j} \quad (\text{E})$$

となることを示せ. ただし, $X(0)$, $x_j(0)$, $\dot{x}_j(0)$ はそれぞれ $X(t)$, $x_j(t)$, $\dot{x}_j(t)$ の初期時刻での値である.

- (b) (E) 式を利用して, (C) 式が

$$M\ddot{X}(t) = - \int_0^t \eta(t-s) \frac{dX(s)}{ds} ds + F(t) \quad (\text{F})$$

と書けることを示せ. このとき $\eta(t)$, $F(t)$ を求めよ.

- (c) 求めた方程式 (F) は一階微分を含むので一見すると時間反転対称性を破っているように見える. しかし, 元の方程式は時間反転対称性を保っているのもそれを見かけに過ぎない. 方程式 (F) が時間反転対称性を保っていることを示せ. また, その方程式が時間反転対称性を破るためには, どのような操作が必要であるかを考察せよ.

III-5 (実験：放射線計測) (100点)

- (1) 図1のような中心部に半径 r_a の陽極があり，内径 r_c の陰極を持つ長さ ℓ の円筒電離箱に， $-U$ の電圧が印加されている．管の内部は1気圧のキセノンガスで満たされ，10 keV以上のX線には100%の感度がある．電子のドリフト速度 d_e とイオンのドリフト速度は d_i は，どちらも電場の強さに依らず一定であり $d_e \gg d_i$ である．またキセノンガスの誘電率を ϵ ， W 値(二次電子を放出するのに必要なエネルギー)を22 eVとする．電子の電荷を $-e$ とし，SI単位系を用いよ．
- (a) 電離箱内の電場の大きさ E を円筒中心からの距離 r の関数として求めよ．また電気容量 C を求めよ．
- (b) 今，20 keVのX線光子1個が距離 r の位置に入射し，電離電子を生成した．生成された電離電子の数 N を求めよ．また電離電子がすべて陽極で計測された場合のエネルギー分解能 $\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}$ (ϵ はエネルギー)を，統計揺らぎのみを考慮して求めよ．
- (c) 抵抗 R が無限大のとき，X線が入射してから充分時間が経過した後の陽極電圧 ΔU を，二次電子による寄与 ΔU^e とイオンによる寄与 ΔU^i に分けて，電気容量 C と電離電子数 N を用いて求めよ．ただし， ΔU^e ， ΔU^i は U に比べて十分小さい．
- (d) $r_a \ll r_c$ の場合， ΔU はX線の入射位置にあまり関係なく電子の寄与 ΔU^e が大半となることを示せ． $\frac{r_a}{r_c} = \frac{1}{1000}$ として考えてみよ．
- (e) 抵抗 R が有限の値のとき，この電離箱で放射線のパルス計測が行えるように，時定数を設定したい．二次電子成分のみをパルスとして取り出したいときの R の条件を，電気容量 C を用いて求めよ．またそのときの ΔU の時間変化をグラフに表せ．
- (2) 電離箱を用いてX線放射線源の強度を求める．この放射線源からは単色のX線が放射され，電離箱はこのX線に対して100%の感度があるものとする．
- (a) 図2に示すように，点状のX線放射線源と電離箱の間に，放射線源から見込み角の直径2度の円窓を開けた鉛板を置く．鉛板はX線を完全に吸収する．放射線源から一様等方にX線が放射されるとき，この電離箱で計測されるX線の全放射線量に対する割合を求めよ．
- (b) 今，1分間の計測を3回行い，その電離箱計測数が表のようになった．また測定に含まれる宇宙線などのバックグラウンド(BG)を測定するために，放射線源を取り除いて同じ時間計測を行った．各測定におけるX線計測数 A, B, C およびその分散 D, E, F を求めよ．

(次ページに続く)

- (c) この3回の計測によるX線計測数の重み平均 μ とその分散 σ_{μ}^2 を求めよ．またX線放射線源の最も確からしい放射線強度を求めよ．

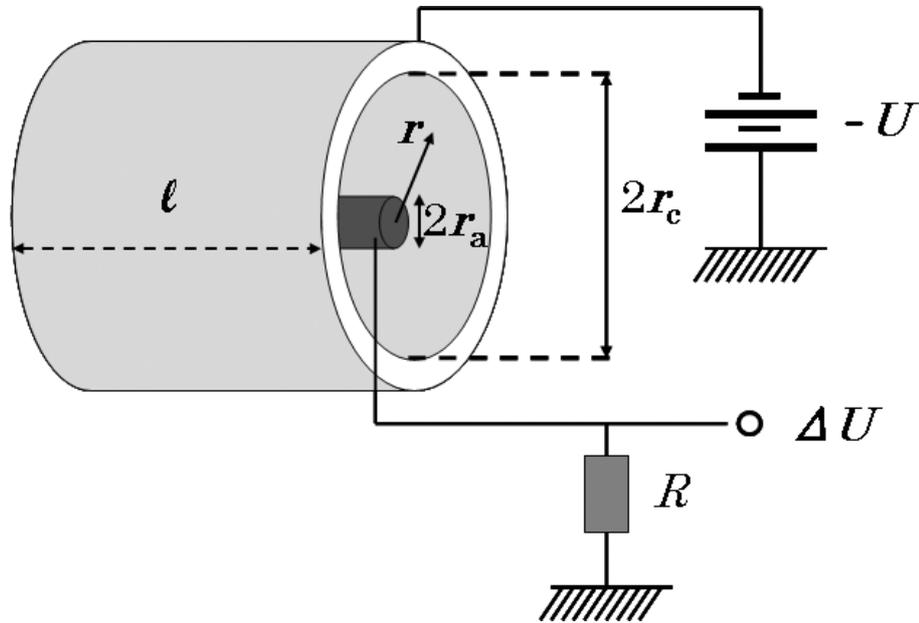


図1

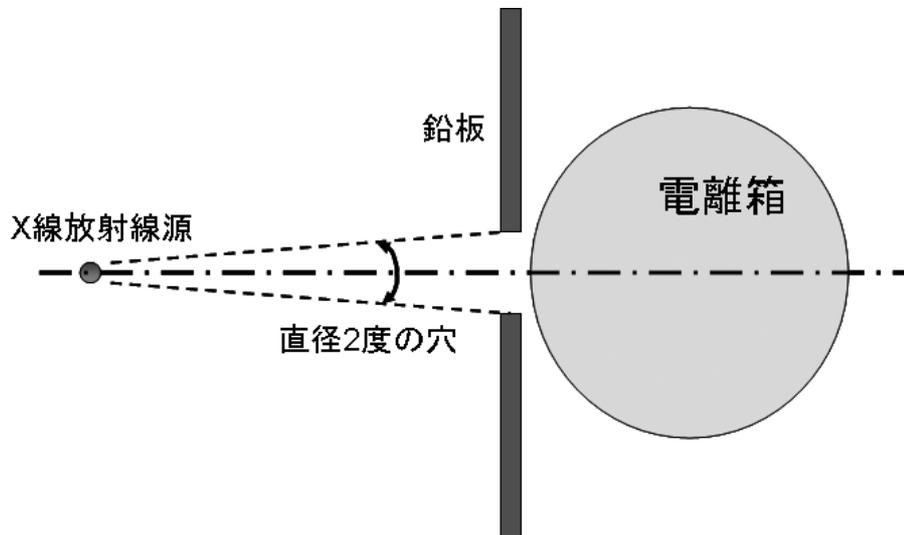


図2

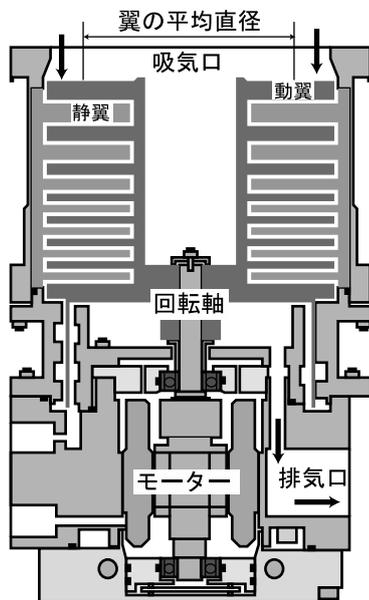
表

計測番号	電離箱計測数	BG計測数	X線計測数	X線計測数の分散
1	14	3	(A)	(D)
2	15	5	(B)	(E)
3	11	2	(C)	(F)

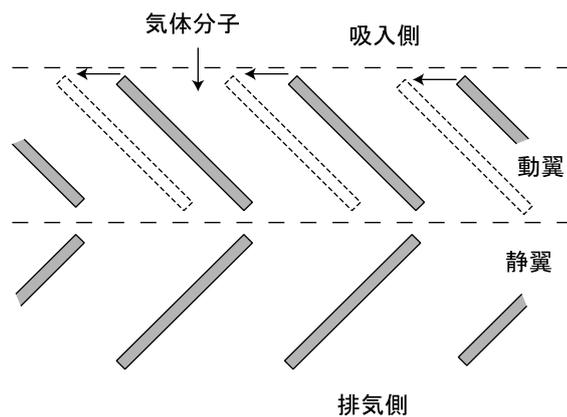
III-6 (実験：真空) (100点)

ターボ分子ポンプを用いて真空槽を圧力 10^{-5} Pa ($=\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$) 以下の超高真空に排気するシステムを設計する。ターボ分子ポンプとは、下図に示したように、動翼（高速で回転する円筒の周囲に取り付け、軸に対して傾いた幅の狭い多数の羽）と静翼（動翼に対して逆に傾けて固定した羽）を交互に配置して取り付けて、吸気側から排気側へ気体を送り出すポンプである。以下の設問に答えよ。なお対象とする気体は 20°C の空気とし、数値の解答は有効数字1桁でよい。

- (1) 空気分子の平均速度 \bar{v} を求めよ。ただし気体定数は $8.3 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ 、空気の分子量は 29 である。
- (2) 気体の圧力が高いときと低いときでは、流体としての性質が大きく異なる。圧力が高いとき、分子はお互いに頻りに衝突し、連続流体のように振る舞う (粘性流)。圧力が低くなると分子の平均自由行程 l_m が大きくなり、パイプの直径 D などに対して同程度となり、連続流体とは見なせなくなる (分子流)。正確には $l_m/D \geq 0.3$ を分子流領域と呼ぶ。平均自由行程は、 $l_m = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2}$ [m] の式を使って計算できる。 d は分子の直径で、 n は分子数密度である。分子流領域に入る圧力を内径 20 cm のパイプについて求めよ。空気分子の直径 d は 3.7×10^{-10} m で、ボルツマン定数は $1.38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ である。
- (3) ターボ分子ポンプの超高真空における動作の仕組みを推察して記し、翼の平均直径が 20 cm とすると、どの程度の回転速度が必要か目安になる値を求めよ。



(a) 模式断面図



(b) 正面から見た動翼と静翼

(次ページに続く)

- (4) ある断面を単位時間に通過する気体の量，すなわち流量 Q は，単位時間にその断面を通過する気体の体積とその点での気体の圧力との積である．パイプの流量は $Q = C\Delta P$ と表すことができる．ここで ΔP はパイプの両端の圧力差， C はコンダクタンスである．パイプの分子流領域におけるコンダクタンスは， $C = \alpha \frac{D^3}{L} [\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}]$ で近似できる．係数 α は $120 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ， L はパイプの長さ， D はパイプの内径である．内径 20 cm，長さ 50 cm のパイプ A の，分子流領域のコンダクタンス C_A を計算せよ．
- (5) ターボ分子ポンプを使うと， 10^{-8} Pa の超高真空まで一定の排気速度で排気できるが，排気側の圧力が 10 Pa 程度に高くなると機能しなくなる．一方油回転ポンプは大気圧から一定の排気速度で排気できるが，0.1 Pa 以下になると急速に排気速度が低下する．排気速度 $S_T = 1.6 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ のターボ分子ポンプと $S_R = 600 \text{ l} \cdot \text{min}^{-1}$ の油回転ポンプ，さらにパイプ A，B も装置間を接続するために使って真空槽を超高真空に排気するシステムを考えて図示せよ．なおパイプ B は内径 30 mm，長さ 1.3 m で，パイプ内の平均圧力 10 Pa においてコンダクタンスは $0.01 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ である．
- (6) コンダクタンス C_X および C_Y である 2 本のパイプを直列接続する場合の合成コンダクタンス C_S と，並列接続する場合の合成コンダクタンス C_P を， C_X および C_Y を使って表せ．
- (7) パイプを接続することによりポンプの排気速度は変化する．この場合，パイプのコンダクタンスを含めてポンプの有効排気速度を定めることができる．コンダクタンスと排気速度が同じ単位であることに注目して，問 (5) のターボ分子ポンプの有効排気速度 S_T^e と 10 Pa における油回転ポンプの有効排気速度 S_R^e を求めよ．
- (8) 真空槽表面に小さな穴があり，その穴から $Q_L = 5 \times 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ で空気が流入しているとする．問 (5) の排気システムを使うと真空槽内の到達圧力 P_{eq} がいくらになるか求めよ．

III-7 (宇宙：コンパクト天体) (100点)

次の文章を読んで、以下の設問に答えよ。

一般に星の大きさは、自己重力と圧力勾配力との釣り合い(静水圧平衡)により決まる。星は球対称とし、星の半径、質量、中心圧力をそれぞれ R, M, P とすると、それらを用いて静水圧平衡はおおよそ

$$\frac{GM}{R^2} \sim \boxed{\text{(ア)}} \quad (\text{A})$$

で与えられる。(簡単のため、微分を割り算で、また星の中心密度を星の平均密度で、それぞれ置き換えなさい。)

これをもとに電子の縮退圧で支えられている星、白色矮星の質量と半径との間の関係を求めよう。化学組成は一様で温度はゼロ、質量分布は等方とし、回転は考えない。まず電子の位相空間密度を運動量空間で積分することにより、電子の数密度 n_e を求めると、それは p_F (フェルミ運動量) を用いて、

$$n_e = \boxed{\text{(イ)}} \quad (\text{B})$$

とかける(ただしプランク定数を \hbar とする)。逆に、Fermi 運動量を電子の数密度 n_e で表すと

$$p_F = \boxed{\text{(ウ)}} \quad (\text{C})$$

となる。縮退電子ガスの圧力 P を n_e の関数として表せば、非相対論的な極限では、電子質量を m_e として

$$P = \boxed{\text{(エ)}} \quad (\text{D})$$

超相対論的な極限では、光速を c として

$$P = \boxed{\text{(オ)}} \quad (\text{E})$$

となる。(ヒント: 圧力は速度 v と運動量 p の積の $1/3$ を運動量空間で積分して求められる。)

すなわち、(A) 式から、非相対論的な白色矮星の質量と半径との間の関係は、核子一個あたりの平均的な電子数を Z/A 、核子質量を m_p として、

$$R \sim \boxed{\text{(カ)}} \quad (\text{F})$$

で与えられる。星の半径は質量の $-1/3$ 乗に比例することがわかる。

相対論的な白色矮星の場合、質量は一意に決まり、それは核子一個あたりの電子数を $Z/A = 1/2$ として

$$M \sim \frac{3\sqrt{\pi}}{64} \left(\frac{\hbar c}{G m_p^2} \right)^{3/2} m_p \quad (\text{G})$$

となる。これは、チャンドラセカール質量に相当する質量である。

(次ページに続く)

- (1) 上の文章中の空欄 (ア) ~ (カ) を埋めよ。なお、導出の過程も示せ。
- (2) 主系列星の半径はほぼ質量に比例することを示せ。ただし、主系列星はガス圧で支えられており、中心温度は質量によらないと仮定してよい。また、白色矮星と主系列星とで、質量と半径の関係が異なる理由を簡潔に説明せよ。
- (3) (G) 式を導出し、相対論的な白色矮星の質量が、半径によらず一意に決まることを示せ。
- (4) 中性子星は中性子の縮退圧で支えられた星である。中性子星は中性子のみで構成されると仮定することにより、(F) 式にならって、中性子星の半径と質量の間の関係を数式で表せ。また、中性子星の半径は同じ質量の白色矮星の半径のおよそ何分の一になるか、答えよ。
- (5) あるコンパクト天体が白色矮星か中性子星のどちらかであるとする。両者を区別するには、どのような観測で何を求めればよいか、記せ。ただし、コンパクト天体までの距離 D は分かっており、スペクトルは単一温度 $T (\neq 0)$ の黒体放射で表せ、星表面全体が一様に光っているとす。

平成 23 年度 京都大学大学院理学研究科 物理学・宇宙物理学専攻
大学院入試問題 注釈集

問題 I-1 (力学)

基本的なバネの振動の問題である。3つの直線状や円状に並んだ質点がどのような基準振動を持つか、系の対称性を考慮しつつ、基準振動の個数やその振動数を Lagrange 方程式から導く事を目的としている。この問題は特に専門的な知識を必要とせず、力学の基本的理解度を測る事を目的としている。

問題 I-2(電磁気学)

超伝導を題材にした古典電磁気学の問題である。電磁気学の問題として解けるように設定しているが、超伝導の最も基本的な性質は完全電気伝導性ではなく完全反磁性(マイスナー効果)であり、古典電磁気学のみからは導出できない。マイスナー効果の式を得るために形式的に $B_0 = 0$ と置いたが、古典電磁気学の範囲でこの手続きに理論的な根拠を与えられない。問題文では説明しなかったが、「マイスナー効果はボーズ・アインシュタイン凝縮という量子現象なしには理解できない」ことを認識することは重要である。また(A)式の右辺はクーロン力項ではない電磁誘導に寄与する電場成分を含んでいるので、ローレンツ力項もそこには加わるはずであるが、電磁場が十分弱いと仮定し無視されている。

問題 I-3(量子力学)

δ 関数型ポテンシャルによる散乱は量子力学の基本問題である。今回の問題は、これを 2 粒子に拡張したものである。相対座標を使えば、散乱は通常の δ 関数ポテンシャル問題に帰着するので解くことができる。この問題のもう一つのポイントは、フェルミ粒子とボース粒子の違いである。粒子の入れ替えによって波動関数にマイナスがつくかどうか、固有エネルギーの違いを生み出す。設問に従って丁寧に考えていけば自然に答が得られると思う。

問題 II-1(電磁気学)

前半は、ビオ・サバールの法則を適用して、一様な磁場分布を得るためのコイルの巻き数比を求める問題。後半は、コイルに流すべき電流値と試料にかかる磁場の均一度を算出する問題と、 $\text{div}B=0$ を利用して軸上からわずかに離れた位置の磁場を評価する問題である。電磁気の基本方程式は問題文に与えてあり、その適用力が問われた。また磁場の数値を算出する能力も問われた。展開式による近似計算の正確性が要求されたが、高得点者が比較的多かった。

問題 II-2 (物理数学)

この問題では、物理の理解とさらなる探求に必要な基礎的な数学の知識を問うた。具体的には(1)において基本的な微分の知識、(2)では近似法の初歩、(3)では複素平面での解析性と積分、(4)

では基礎的なフーリエ展開について短い設問を設けた。どれも、テーマとしては少し馴染みのないものもあるかも知れないが、基本的な微分積分の知識を元に考え得る範囲である。また(5)では初歩的な確率の計算とその近似を問い、物理学実験等に必要な基礎的な確率論の知識を身につけているかどうかを見た。

問題 II-3 (統計力学)

小孔を通した理想気体の平衡状態を求める問題。一見直感に反する事であるが、小孔を通しての古典理想気体の平衡は異なった温度や圧力でも実現し得る。また(1)ではその効果が一般の場合でも実現可能なように速度分布の独立性が成り立たない場合での平衡条件を求めさせ、以下の設問が量子気体でも有効であるようにした。しかし(1)の一般的条件が受験生には難しかったようである。

問題 III-1 (潮汐力)

通常の力学ではあまり馴染みの無い潮汐力であるが、最近点と最遠点に関しては非常に簡単にその大きさが計算できる。この問題では、上記2点での潮汐力を確認した後、重力場のポテンシャルを展開近似し、潮汐力に対応する項を取り出してより正確な潮汐力についての考察を行う。ポテンシャルの勾配が力となることと、潮汐力による海面の形状を一般常識として持っていれば、解きやすい問題であるものと思われる。

問題 III-2 (量子統計：一次元調和振動子)

問(1)、(2)は調和振動子の古典および量子統計力学というスタンダードな問題である。分配関数や比熱の計算などは教科書に載っているものである。一方、問(3)は調和ポテンシャル中にある「フェルミ粒子」の問題なので、フェルミ粒子系の分配関数や低温展開の計算をする必要がある。これも統計力学のスタンダードな問題であるが、「調和ポテンシャル」という言葉に惑わされることなく、思考をボースからフェルミに切り替える必要がある。

問題 III-3 (量子力学：ポテンシャル問題)

これは量子力学の初歩から初めて、すこし応用を取り入れた問題である。テーマは1次元1質点という分かりやすいものであり、基本的な束縛状態の概念が基礎となっている。しかし、ありがちな調和振動子を避け、座標の4乗に比例するポテンシャルについて問うことで、量子力学を表面的ではなく、ある程度深く理解しているかどうかを聞くように構成されている。設問(1)は、重要ではあるが、しばしばよく認識されていない次元解析、(2)は変分法について、その知識を前提とはせず、受験生を解へと導く工夫をしている。また(3)ではより高度にスケール変換について問い、高いレベルの受験生を識別するようになっている。

問題 III-4 (物理数学:常微分方程式)

常微分方程式の一般的解法を前半で求めさせ、後半ではそのうちの自由度を形式的に消去して着目した自由度が従うべき方程式を求めさせた。後半はランジュバン方程式と呼ばれる揺らぎを受けた粒子が従う方程式がどのように導かれるかという概念的に難しい問題を含んでいるが、誘導が丁寧だったために受験生の平均点は高かった。

問題 III-5(実験:放射線計測)

実験の問題 と分類されているが、放射線検出の最も基本的な電離箱の原理とそのデータ処理法を扱った問題であり、電磁気学および統計学の基礎的な問題である。電離箱の問題はコンデンサー内を移動する電荷移動によるコンデンサーで発生する電圧・電流変化を調べる初等電磁気学の問題であり、放射線計測の専門知識は全く必要としない。このように当専攻の実験に分類される問題は、実験の専門知識を問うのではなく、基礎物理で現実的な問題を考えられるように作られた考えやすい問題が多い。

問題 III-6(実験:真空)

真空技術は多くの物理実験で必要とされる。最近油拡散ポンプに代わって使われることが多くなったターボ分子ポンプを題材にした問題である。簡単な計算からターボ分子ポンプの動作原理を推察し、パイプのコンダクタンスを考慮してポンプの性能が発揮される真空排気システムを考える。真空技術に対する専門知識は必要なく、実験に対する基礎的な洞察力を問う問題である。

問題 III-7(宇宙:コンパクト天体) 量子力学の基礎概念と、天体構造の基礎を結びつけた問題。縮退圧という微視的な物理過程が、白色矮星の質量-半径関係という巨視的で観測可能な量として現れることを導き出す問題である。計算にはやや時間がかかるものの、内容は量子力学および宇宙物理学の初等レベルな問題で、宇宙物理学の専門知識は全く必要としない。設問を追っていけば解答にたどり着くよう工夫されている。