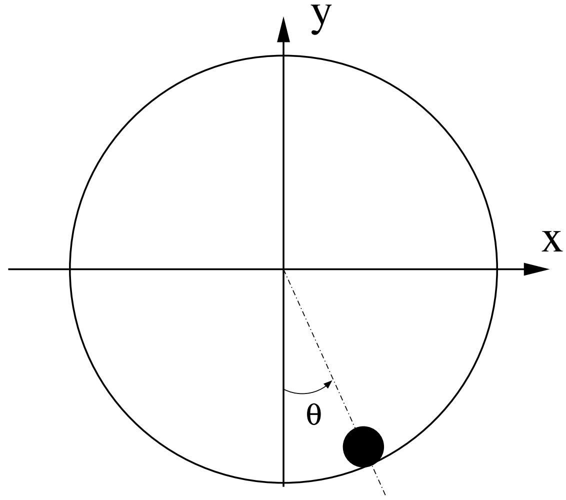
I-1 (力学：拘束系) (100 点)

図のように鉛直に固定された半径 a の滑らかな円周の内側を運動する質量 m の質点を考える。ここで重力加速度を g とする。ただし、図に描かれている (x, y) 座標は、円の中心を原点とし、y は鉛直上向きに、x は y と直交するようにとってある。



(1) 極座標 (r, θ) を

$$x = r\sin\theta, \qquad y = -r\cos\theta$$

として、(r, θ) 座標でラグランジアンを書け。ここで、拘束条件 $r = a$ を考慮し、ラグランジアンに $\lambda(a - r)$ を加えよ。ただし、λ は、ラグランジュの未定乗数である。

(2) (a) (r, θ) に関するオイラー · ラグランジュの運動方程式を書け。また、この運動方程式において λ に比例する項は、どのような力を表すか簡単に述べよ。

(b) λ を一般座標とみなし、オイラー · ラグランジュ方程式を書け。

(3) この質点が円周上を運動し、θ^3 が θ に比べて無視できる場合の θ に関する運動方程式を書き、それを解け。ただし、$t = 0$ で $\theta = \theta_0, \dot{\theta} = 0$ となる初期値を与えたとする。ここで、$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ である。

(4) (3) のような近似が有効でない場合を考える。$t = 0$ で $\theta = \pi/2$ の円周上で初速度ゼロ（$\dot{\theta} = 0$）でこの質点を滑り落す。このときの周期 T を求めよ。ただし、定積分 $F \equiv \int_0^{\pi/2} d\theta(\cos\theta)^{-1/2}$ を使って T を表せ。（この定積分を実行する必要はない。）

(次ページに続く)

(5) $t = 0$ で、$\theta = 0$ の点で速さ $a\dot{\theta} = 2\sqrt{ag}$ で、円周上を滑らせる。

(a) 角度 θ の点での λ を求めよ。

(b) この質点が円周上を離れる $\cos\theta$ の値を求めよ。

I-2 (電磁気学：磁性体) (100 点)

真空の透磁率を μ_0 とし以下の問いに答えよ。
真空中に半径 R の球形の磁性体があり，一様な磁化 $\boldsymbol{M}$ をもっている。ここで磁化 $\boldsymbol{M}$ は $\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$ を満たすように定義されているとする。磁化に平行に z 軸をとる。外部磁場はなく，定常であり電流も流れていないとする。

(1) 球の内部の磁場 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{in}}$，磁束密度 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{in}}$ と外部の磁場 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{out}}$，磁束密度 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{out}}$ は一般に球の表面で連続にはつながらない。球の表面における磁場と磁束密度の接続の条件を示せ。ただし，球の表面上の各点での単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とし，単位接線ベクトルを $\boldsymbol{t}$ とする。

(2) 球の内部および外部それぞれについて $\boldsymbol{H}$ がスカラーポテンシャル ϕ を用いて表わせることを示せ。また，ϕ が Laplace 方程式を満たすことを示せ。

(3) 全空間で磁場 $\boldsymbol{H}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよう。z 軸対称な系の Laplace 方程式の極座標での一般解は，a_n, b_n を定数として，

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)$$

となる。ここで

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

は Legendre の多項式である。
球の表面で (1) で求めた接続条件を適用して全空間で磁場 $\boldsymbol{H}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。

(4) この磁性体において

$$-\frac{\mu_0}{2} \int_{\text{球の内部}} \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{M} \; dV = \frac{\mu_0}{2} \int_{\text{全空間}} \boldsymbol{H}^2 dV$$

となることを示せ。
この等式は磁性体を磁化させるのに必要なエネルギーは，仮想的に球の表面に誘起される磁荷の作る磁場のエネルギーに等しいことを示している。

I-3 (量子力学：調和振動子) (100 点)

一次元調和振動子のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{A}$$

で与えられる。ここで、x は座標演算子、p は運動量演算子を表し、ω は角振動数、m は粒子の質量である。系は量子力学に従うものとする。

エネルギー固有状態（定常状態）は、

$$H\,|\psi_n\rangle = E_n\,|\psi_n\rangle \tag{B}$$

を満たす解である。ただし、$|\psi_n\rangle$ および E_n は n 番目 $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ のエネルギー固有状態および固有エネルギーである。

(1) 以下の消滅演算子 a と生成演算子 $a^\dagger$ を定義する。

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + i\frac{1}{m\omega}p) \tag{C}$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x - i\frac{1}{m\omega}p) \tag{D}$$

交換関係 $[x, p] = i\hbar$ より、a,$a^\dagger$ の交換関係は $[a, a^\dagger] = 1$ である。このとき、ハミルトニアンは

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) \tag{E}$$

と表せることを示せ。

(2) 演算子 $N \equiv a^\dagger a$ は粒子数演算子と呼ばれ、エネルギー固有状態は N の固有状態として表すことができる。基底状態 $|\psi_0\rangle$ は $a|\psi_0\rangle = 0$ を満たす解である。ここで $|\psi_0\rangle$ は $\langle\psi_0|\psi_0\rangle = 1$ に規格化されているとする。このとき、n 番目の固有状態 $|\psi_n\rangle$ は

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|\psi_0\rangle \tag{F}$$

と表せることを数学的帰納法を用いて示し、その固有エネルギー E_n を求めよ。また、この $|\psi_n\rangle$ は規格化条件 $\langle\psi_n|\psi_n\rangle = 1$ を満たすことを示せ。

(3) $\langle\psi_k|x|\psi_l\rangle$ および $\langle\psi_k|p|\psi_l\rangle$ を求めよ。

(次ページに続く)

次に、基底状態を x 軸方向に微小距離移動させた状態について、その時間発展を考える。運動量演算子 p が微小並進の生成子であることから、x 軸に沿って微小距離 ϵ だけ移動させた状態は

$$(1 - i\frac{1}{\hbar}\epsilon p)\,|\psi_0\rangle \tag{G}$$

のように表せる。時刻 $t = 0$ のときに式 (G) の状態にあったとし、この系の時間発展 $|\psi(t)\rangle$ を考える。

(4) $t = 0$ での状態 $|\psi(t = 0)\rangle$ を $|\psi_n\rangle$ で展開し、

$$|\psi(t = 0)\rangle = \sum_n C_n\,|\psi_n\rangle \tag{H}$$

と表した時の係数 C_n を求めよ。

(5) 状態 $|\psi(t)\rangle$ について、x の期待値 $\langle x\rangle = \langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle$ および p の期待値 $\langle p\rangle = \langle\psi(t)|p|\psi(t)\rangle$ を求めよ。ただし、エネルギー固有状態 $|\psi_n\rangle$ の時間発展は $|\psi_n(t)\rangle = e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\,|\psi_n\rangle$ と表せる。

また、$X \equiv \langle x\rangle$, $Y \equiv \langle p\rangle$ としたとき、点 (X, Y) の軌跡を X-Y 平面上で図示し、$t = 0$ での点の位置を示し、その移動方向を矢印で表せ。

II-1 (統計力学：混合のエントロピー) (100 点)

(1) 混合のエントロピー（混合前と後のエントロピー変化）を熱力学的に求めよう。２種類の理想気体 α, β があり、それぞれの分子が体積 V_α, V_β の中に N_α 個、N_β 個ずつあるとする。また、温度と圧力は等しいものとし、$N = N_\alpha + N_\beta$ とおく。更に分子 α, β の間に相互作用はないものとする。

(a) 気体 α が体積 V_α から等温のまま膨張して体積が $V_\alpha + V_\beta$ になった時のエントロピー増を求めよ。ただし Boltzmann 定数を k、温度を T とする。

(b) 体積が $V_\alpha + V_\beta$ である気体 α, β を半透膜を通してそれぞれ体積一定のまま準静的に混合したとする。図 1 はこれを図示したもので、それぞれ体積 $V_\alpha + V_\beta$ の箱に入った気体 α, β を $\mathrm{C-D}, \mathrm{A'-B'}$ に張った半透膜を通しながら混合し、最終的に全体の体積が $V_\alpha + V_\beta$ になったことを表している。また半透膜 $\mathrm{C-D}$ は気体 β のみを、半透膜 $\mathrm{A'-B'}$ は気体 α のみを通すものとする。この過程でエントロピーがどのように変化するか答えよ。

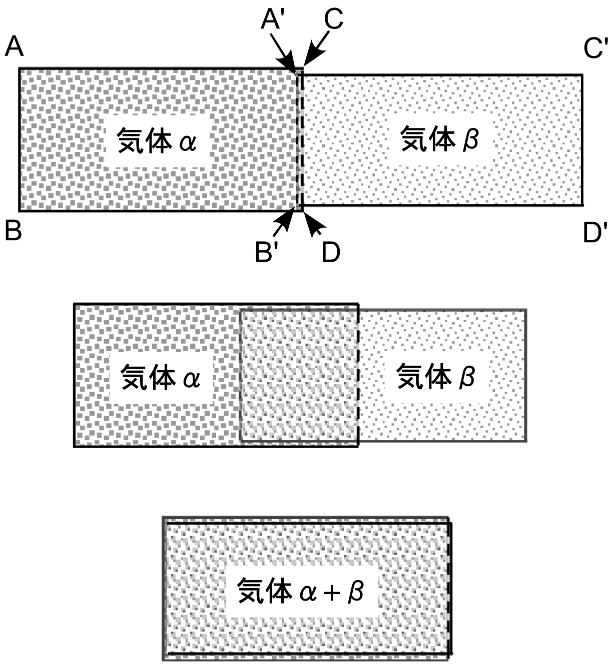


図 1

(次ページに続く)

(c) 気体 α の全体に対する混合比を $\phi(=\frac{N_\alpha}{N})$ と置いたときの混合のエントロピーが

$$\Delta S = -Nk[\phi\log\phi + (1-\phi)\log(1-\phi)] \tag{A}$$

と書けることを示せ。

(2) 次に混合のエントロピーを、統計力学的に求めてみよう。分子の総数を N とし、α 分子、β 分子の数をそれぞれ N_α、N_β とする。系全体を N 個の格子点で表し、各格子点に1個ずつ分子を置くものとする。系を左右に分割し、左側の N_α 個の格子点に分子 α を、右側の N_β 個の格子点に分子 β を置くものとすると、この時の配置は1通りしかない。

(a) N 個の格子点にランダムに分子 α, β を配置したとする。この時の状態数とエントロピーを求めよ。

(b) 完全に2つに分かれている状態との差から、混合のエントロピーが式 (A) と同じ形に書けることを示せ。ただし Stirling の公式

$$\log x! \approx x(\log x - 1) \tag{B}$$

を用いよ。

(3) 分子 α、分子 β を格子点上に配置したとき、最隣接点間のみに相互作用が働くものとする。$\alpha-\alpha$ 間相互作用を $\epsilon_{\alpha\alpha}$、$\beta-\beta$ 間相互作用を $\epsilon_{\beta\beta}$、$\alpha-\beta$ 間相互作用を $\epsilon_{\alpha\beta}$ と書き、また最隣接格子点の数が z だとする。このとき系が一様に混合したとして、混合前と後の内部エネルギー差が

$$\Delta U = N\chi\phi(1-\phi)kT \tag{C}$$

の形に書けることを示せ。またこの時の χ の表式を求めよ。

(4) 混合の自由エネルギー ΔF を ϕ, χ, T で書き表せ。また χ を変化させたときの ΔF の ϕ 依存性の概略を図示し、一様な混合状態が不安定になる χ の値を求めよ。

II-2 (物理数学：ブラウン運動) (100 点)

単位時間に1回ずつ，左右ランダムに単位ステップで移動する粒子を考える．1 単位時間に右向きに進む確率を $(1+v)/2$，左向きに進む確率を $(1-v)/2$ とする．

(1) t 単位時間が経過する間に，右向きに k ステップ（左向きに $t-k$ ステップ）進む確率 p_k を与えよ．規格化条件 $\sum_{k=0}^{t} p_k = 1$ を満たすことも確認せよ．

(2) (a) $|v| \ll 1$ なら $t \gg 1$ で上記確率分布はガウス分布に漸近する．これを以下の手順で調べよう．まずスターリングの公式 $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ を用い，k を $x \equiv 2k-t$ に置き換えることにより，上記確率は x, t, v を使って

$$p_{\frac{t+x}{2}} \approx \sqrt{\frac{2t}{\pi(t^2-x^2)}} \times \Big(\alpha\Big)^{\frac{t}{2}} \times \Big(\beta\Big)^{\frac{x}{2}},$$

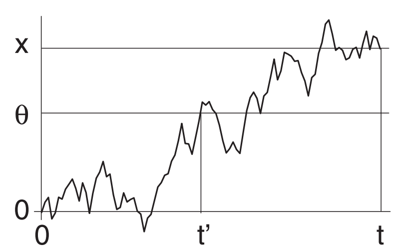
と表すことができる．この α と β を求めよ．

(b) $|v|$ も $|x|/t$ も共に $O(1/\sqrt{t}) \ll 1$ の微小量とすれば，例えば $(1+v)^{\frac{x}{2}} \approx e^{\frac{vx}{2}}$ と近似できる．このような近似を用いることによって，時刻 t に粒子が位置 x から $x+dx$ の間にいる確率分布 $f(x,t)dx$ を求める．$x(=2k-t)$ の基本ステップ幅が 2 であることに注意を払って

$$f(x,t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \times \exp{(\gamma)},$$

と表すことができる．この γ を求めよ．

(3) このようなブラウン粒子が，時刻 $t=0$ に位置 $x=0$ から運動を開始して位置 $\theta(>0)$ を初めて通過する時刻（初期通過時刻）が $[t, t+dt]$ の区間内にある確率 $p_\theta(t)dt$ を以下の方法で求めよ．



時刻 t に位置 $x > \theta$ に到着するには，必ず θ は一度は通過するから

$$f(x,t) = \int_0^t dt'\, f(x-\theta, t-t') p_\theta(t') \tag{A}$$

が成り立つ．この関係にラプラス変換 $\int_0^\infty dte^{-st}\cdots$ を施すことによって初期通過時刻の分布 $p_\theta(t)$ を求めることができる．ここで，

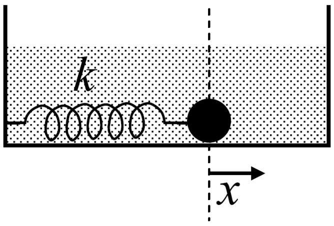
$$\int_0^\infty dt \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4t} - st\right) = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-|z|\sqrt{s}}, \tag{B}$$

$$\int_0^\infty dt \frac{|z|}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{z^2}{4t} - st\right) = e^{-|z|\sqrt{s}} \tag{C}$$

の関係を使うとよい．

II-3 (力学：減衰振動) (100 点)

1 本のバネでつないだおもりの運動を考える。バネの一端を固定し他端におもりをつけ（バネ振り子)、液体で満たされた箱の床面に置く。バネ定数を k、液体の粘性係数を η とする。おもりの質量を m とし、平衡点からの位置を x ととる。以下では、バネの質量と抵抗は無視でき、床は水平で滑らかであるとする。



おもりが液体から受ける粘性力は粘性係数とおもりの速度に比例し、$-A\eta\frac{dx}{dt}$ のように書ける。このとき、おもりの運動方程式は、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - A\eta\frac{dx}{dt} \tag{A}$$

となる。$x = Ce^{gt}$ とおいたとき、上述の運動方程式は以下の代数方程式に変換できる。

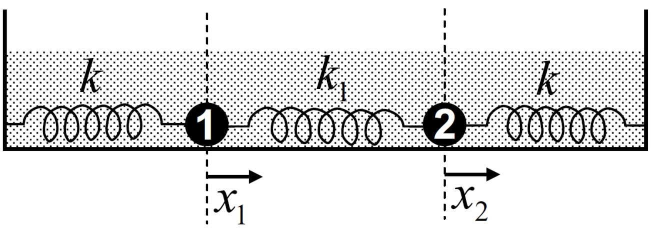
$$g^2 + 2\alpha g + \omega_0^2 = 0 \tag{B}$$

ただし、$\alpha = \frac{A\eta}{2m}$ および $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ である。

(1) 初期条件として $t = 0$ で $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = v_0$ とする。$\alpha > \omega_0$ および $\alpha < \omega_0$ の場合のそれぞれについて $x(t)$ を求めよ。$x(t)$ は実数のパラメータと変数のみで記述すること。

(2) 同じ初期条件で、$\alpha < \omega_0$ の解で $\alpha \to \omega_0$ の極限をとることによって、$\alpha = \omega_0$ の場合の $x(t)$ を求めよ。

次に、上述と同じバネ振り子を二つ用意し、バネ定数 k_1 のバネで連結して液体中 (粘性係数 η) の床面に置いた場合の 2 個のおもりの運動を考える。バネの両端は自然長の状態で固定してあり、平衡点からのおもりの位置を図のように x_1,x_2 ととる。



(3) おもり 1,2 の運動方程式を書け。

(次ページに続く)

(4) x_1,x_2 の線形結合 q_1,q_2 を考える。q_1,q_2 の方程式が以下のとおり独立になるように適当な線形結合を選び、以下の式の ω_1,ω_2 を求めよ。

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + 2\alpha \frac{dq_1}{dt} + \omega_1^2 q_1 = 0 \tag{C}$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + 2\alpha \frac{dq_2}{dt} + \omega_2^2 q_2 = 0 \tag{D}$$

(5) 初期条件として、$t = 0$ で $x_1 = x_2 = 0$, $\frac{dx_1}{dt} = v_0$, $\frac{dx_2}{dt} = 0$ とする。粘性係数 $\eta = 0$ のとき、おもり 1,2 の運動にはうなり現象が生じる。η を次第に大きくしたとき、ある臨界の粘性係数 η_c でうなり現象は消える。η_c を求め、そのときの $x_1(t)$, $x_2(t)$ を求めよ。

ここでは、「うなり」とは異なる周波数の振動が重なり、振幅が周期的に変動する現象を呼び、

$$e^{-\gamma t}\left[B_1 \sin\left(\Omega_1 t + b_1\right) + B_2 \sin\left(\Omega_2 t + b_2\right)\right] \tag{E}$$

の形式で表せることとする。(ここで t 以外の変数は時間に依存しない実数パラメータで、$\Omega_1 \neq \Omega_2$ かつ Ω_1,Ω_2,B_1,B_2 はゼロ以外の数である。)

III-1 (電磁気学：双極子放射) (100 点)

(1) スカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{x},t)$、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ と電磁場 $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$、$\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ との関係は、以下の式で与えられる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\nabla\phi(\mathbf{x},t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t}, \qquad \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{x},t) \tag{A}$$

(a) ４つの Maxwell 方程式のうち、電荷密度 $\rho(\mathbf{x},t)$、電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{x},t)$ を含む２つの方程式は、以下の通りである。

$$\nabla\cdot\mathbf{D}(\mathbf{x},t) = \rho(\mathbf{x},t), \qquad \nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{x},t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \mathbf{j}(\mathbf{x},t) \tag{B}$$

ここで、$\mathbf{D}(\mathbf{x},t) = \varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = c^2\varepsilon_0\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ であり、c は光速、ε_0 は真空の誘電率である。

式（A）より、$\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$, $\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$, $\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t}$ に関する（式（B）以外の）Maxwell 方程式を導け。

(b) 式（A）には、ゲージ変換の不定性がある。

$$\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{x},t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = 0 \tag{C}$$

という条件を課した上で、式（A）を式（B）に代入し、ϕ、$\mathbf{A}$ についての２階微分方程式を導け。ただし、必要なら以下のベクトルの積の公式を使え。

$$\mathbf{K}\times(\mathbf{L}\times\mathbf{M}) = \mathbf{L}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{M}) - (\mathbf{K}\cdot\mathbf{L})\mathbf{M} \tag{D}$$

(2) 電荷 e、質量 m をもつ荷電粒子が軌道 $\mathbf{x}_e(t)$ を描いて運動している。この粒子がつくる電荷密度、電流密度は、$\rho = e\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_e(t))$, $\mathbf{j} = e\dot{\mathbf{x}}_e(t)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_e(t))$ である。ここで、$\dot{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}$ とする。

(a) この荷電粒子の運動方程式

$$m\frac{d^2\mathbf{x}_e}{dt^2} = e\mathbf{E}(\mathbf{x}_e,t) + e\dot{\mathbf{x}}_e\times\mathbf{B}(\mathbf{x}_e,t) \tag{E}$$

と Maxwell 方程式を使い、

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}_e^2 + \frac{1}{2}\int d^3x\,(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})\right] = -\int d^3x\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) \tag{F}$$

を示せ。また、この式は物理的に何を表すか簡単に述べよ。必要なら以下のベクトルの積の公式を使え。

$$\nabla\cdot(\mathbf{L}\times\mathbf{M}) = \mathbf{M}\cdot(\nabla\times\mathbf{L}) - \mathbf{L}\cdot(\nabla\times\mathbf{M}) \tag{G}$$

(次ページに続く)

(b) この荷電粒子の速さが c に比べて十分小さいとき、この荷電粒子がつくる電磁場は、十分遠方で

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}\left[\mathbf{x}\times(\mathbf{x}\times\dot{\mathbf{v}})\right], \qquad \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \frac{\mathbf{x}\times\mathbf{E}}{rc} \tag{H}$$

で与えられる。ここで、$r=|\mathbf{x}|$、$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{x}}_e$ である。このとき、(F) の右辺が $S=-e^2\dot{\mathbf{v}}^2/(6\pi\varepsilon_0 c^3)$ となることを示せ。

また、この荷電粒子が半径 a、角速度 ω の円運動をしているとき、S の表式を求めよ。

III-2 (量子力学：摂動論) (100 点)

系のハミルトニアンとして

$$H = H_0 + \lambda V$$

を考える。ここで，λV はハミルトニアン H_0 に対する微小な摂動である。H_0 の固有状態は既知とし，エネルギー固有値を $\varepsilon_k^{(0)}$ $(k = 1, 2, ...)$，その固有状態を $\left|\phi_k^{(0)}\right\rangle$ と表す。$\varepsilon_k^{(0)}$ は離散的とする。λ は実数のパラメータであり，$0 \leq \lambda \leq 1$ である。

(1) まず簡単のために $\left|\phi_k^{(0)}\right\rangle$ が縮退していない場合を考える。
H のエネルギーの固有値を ε_k と表し，その固有状態を $|\phi_k\rangle$ と書こう。$|\phi_k\rangle$ は $\lambda \to 0$ の時に $\left|\phi_k^{(0)}\right\rangle$ に一致するとする。ここで λV が十分小さいとして，

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \varepsilon_k^{(0)} + \lambda\varepsilon_k^{(1)} + \lambda^2\varepsilon_k^{(2)} + ... \\ \left|\phi_k\right\rangle &= \left|\phi_k^{(0)}\right\rangle + \lambda\left|\phi_k^{(1)}\right\rangle + \lambda^2\left|\phi_k^{(2)}\right\rangle + ... \end{aligned} \tag{A}$$

と展開できるとしよう。$|\phi_k\rangle$ として

$$\begin{aligned} H\left|\phi_k\right\rangle &= \varepsilon_k\left|\phi_k\right\rangle \\ \left\langle\phi_k^{(0)}\middle|\phi_k\right\rangle &= \left\langle\phi_k^{(0)}\middle|\phi_k^{(0)}\right\rangle = 1 \end{aligned} \tag{B}$$

を満たすものを考え, $\varepsilon_k^{(1)}$，$\left|\phi_k^{(1)}\right\rangle$，$\varepsilon_k^{(2)}$ を $\varepsilon_k^{(0)}$ と $\left|\phi_k^{(0)}\right\rangle$ と V を用いて表せ。

(2) 次に $\varepsilon_k^{(0)}$ に対応する H_0 の固有状態に縮退がある場合を考える。この場合，$\varepsilon_k^{(0)}$ を固有値として持つ部分空間を考え，基底として適当な直交規格化関数列 $\left|\phi_{k\alpha}^{(0)}\right\rangle$ を採用することにしよう。ここで α はこれらの基底の指標であり，$\left|\phi_{k\alpha}^{(0)}\right\rangle$ は以下の式を満たす。

$$\begin{gathered} H_0\left|\phi_{k\alpha}^{(0)}\right\rangle = \varepsilon_k^{(0)}\left|\phi_{k\alpha}^{(0)}\right\rangle \\ \left\langle\phi_{k\alpha}^{(0)}\middle|\phi_{k\alpha'}^{(0)}\right\rangle = \delta_{\alpha\alpha'} \end{gathered} \tag{C}$$

この基底を用いると H_0 の固有状態でエネルギー $\varepsilon_k^{(0)}$ に対応する状態は，a_α を係数として

$$\left|\phi_k^{(0)}\right\rangle = \sum_\alpha a_\alpha\left|\phi_{k\alpha}^{(0)}\right\rangle \tag{D}$$

（次ページに続く）

のように展開される。この場合のエネルギーに対する摂動の一次補正 $\varepsilon_k^{(1)}$ の満たすべき関係式を求めよ。

(3) 縮退している場合の具体的な例として水素原子の主量子数 $n=2$ の状態を考えてみる。この場合，状態は 1 つの $2s$ 軌道 ($l=0$，$m=0$) と 3 つの $2p$ 軌道 ($l=1$，$m=-1,0,1$) からなっており，それぞれの状態は極座標表示では Bohr 半径 a を用いて

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = a^{-3/2} g_{nl}(r/a) Y_l^m(\theta,\varphi) \tag{E}$$

で表される。ここで $Y_l^m(\theta,\varphi)$ は球面調和関数であり，

$$g_{2s}(\rho) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1-\rho/2)\, e^{-\rho/2} \tag{F}$$

$$g_{2p}(\rho) = \left(\frac{\sqrt{6}}{12}\right)\rho\, e^{-\rho/2} \tag{G}$$

である。z 軸方向に電場 $\boldsymbol{E} = E\hat{z}$ がある場合，電子の電荷を $-e$ とすると，ハミルトニアンに $eEr\cos\theta$ という項が加わる。$eEr\cos\theta$ が小さいとしてエネルギーに対する 1 次補正 $\varepsilon_n^{(1)}$ を求めよ。(Linear Stark Effect)。

ただし，以下の公式を用いてもよい。

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta\, Y_l^{m*}(\theta,\varphi) Y_{l'}^{m'}(\theta,\varphi) = \delta_{mm'}\delta_{ll'} \tag{H}$$

$$\cos\theta\, Y_l^m = \left[\frac{(l+1+m)(l+1-m)}{(2l+1)(2l+3)}\right]^{1/2} Y_{l+1}^m + \left[\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}\right]^{1/2} Y_{l-1}^m \tag{I}$$

III-3 (統計力学：イジング・スピン) (100点)

(1) 上下2方向しか向くことができないスピン（イジング・スピン）が外場 H 中に置かれている状況を考える．スピンは状態 $s = \pm 1$ に応じて，エネルギー $-s\mu_B H$ をとる．ここで μ_B はスピン磁気モーメント．

温度を T，ボルツマン定数を k_B として，この1スピンの分配関数を求めよ．

このスピンがとる状態の平均値 $\langle s \rangle$ とエントロピー S を求め, それらの外場 H への依存性を図示せよ（$H \geq 0$ のみならず $H < 0$ も考える）．

(2) 次に，$N (\gg 1)$ 個のスピンが互いに同じ強さ J/N で強磁性相互作用している平均場（分子場）結合系を考えよう．各スピン s_k が受けている分子場 H_{eff} は，系の全スピンの平均値を $m = \sum_j s_j / N$ とおくと，

$$H_{\mathrm{eff}} = \frac{J}{\mu_B N} \sum_{j(\neq k)} s_j = \frac{J}{\mu_B} (m - \frac{s_k}{N}) \approx \frac{Jm}{\mu_B} \tag{A}$$

と表すことができる．温度 T で，分子場 Jm/μ_B の中でスピンがとる平均値 $\langle s_k \rangle$ が，全スピンの平均値 m に等しいとおいた方程式（自己無撞着方程式, self-consistent equation）を書き下し，系を高温から冷やしていくときに，自発磁化 $m \neq 0$ が生じ始める臨界温度 T_c を求めよ．系の自発磁化の温度依存性を描け．また系のエントロピーの温度依存性を描け．

(3) 別の考え方で臨界温度が存在することを示そう．この平均場結合イジング・スピン系のエネルギーは

$$E = -\frac{J}{2N} \sum\sum_{i \neq j} s_i s_j = -\frac{J}{2N} (\sum_{i=1}^{N} s_i)^2 + \frac{J}{2} \approx -\frac{NJ}{2} m^2 \tag{B}$$

と書き換えることが出来る．磁化のない状態 $m \approx 0$ のエネルギーは，スピンがすべてそろった基底状態 $m = \pm 1$ のエネルギーに比べれば $NJ/2$ と非常に大きいので，その滞在確率は基底状態に比べれば$e^{-NJ/2k_B T}$ と微小である．このようなきわめて小さい滞在確率にもかかわらず，温度がある値より大きくなると系が磁性を失うのはなぜか，その理由を考察せよ．

系がとり得る微視的状態の数は $e^{\frac{S}{k_B}}$ と概算されること，$\ln 2 \approx 0.69$ であること，の知識に基づいて臨界温度を概算せよ．

III-4 (物理数学：熱伝導) (100 点)

地表を無限に広い平面と見なし、その温度が周期 T で変動しているものとする。地表から下向きに x 軸を取り、温度 u を x と時間 t の関数であるとすると、その分布の時間依存性は次の熱伝導方程式に従う。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{A}$$

ここで a は地殻の熱拡散率で、$a = 2.53 \times 10^{-7}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ と仮定する。

(1) 式 (A) を解き、$x \to \infty$ で有限な解が

$$u(x,t) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n x} \cos\left(n\omega t - \alpha_n x + \phi_n\right) \tag{B}$$

と書けることを示せ。ただし

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \alpha_n = \sqrt{\frac{n\omega}{2a}} \tag{C}$$

で、ϕ_n は t と x によらない位相成分である。また必要であれば

$$i = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2, \quad -i = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 \tag{D}$$

を用いよ。

(2) 地表の温度変化が

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \tag{E}$$

と書けるとき、式 (B) の係数の満たすべき式を求めよ。

(3) 地表の温度が、1 年（$T = 60 \times 60 \times 24 \times 365 \simeq 3.15 \times 10^7\mathrm{s}$）周期で、平均値 15°C、振幅 15°C で変動しているものと考える。すなわち

$$f(t) = 15 + 15\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \tag{F}$$

とする。このとき、地上における温度変化と逆転している（すなわち地上の夏に最低温度、冬に最高温度になる）深さの中で、最も小さい x の値を求めよ。またその深さにおける温度変化の振幅を求めよ。ただし $\exp(-\pi) = 0.043$ である。

III-5 (実験：信号雑音比) (100 点)

天体からの可視光を検出する際の信号雑音比について考える。天体から 1 秒間に平均 N 個の光子が検出器に入るとする。検出器の検出効率は 100%であるとし、光子 1 個が検出器に入ると電子 1 個が発生するとする。この電子の数は、ポアッソン分布に従い、ある 1 秒間に M 個の電子が生じる確率は

$$P_N(M) = \frac{e^{-N} N^M}{M!} \tag{A}$$

で与えられる。

(1) ある 1 秒間に生じる電子数が、式 (A) の確率分布に従うとき、その平均は N で、標準偏差は $N^{1/2}$ であることを示せ。但し、

$$\sum_{M=0}^{\infty} P_N(M) = 1$$

である。

t 秒間の積分を行ったとき、天体からの信号は平均で Nt となり、一方、その雑音はポアッソン分布の標準偏差と考えてよいので $(Nt)^{1/2}$ となる。従って、信号雑音比は $Nt/(Nt)^{1/2} = (Nt)^{1/2}$ となりそうだが、雑音源はこれだけではない。夜空からやってくる光子も雑音源となる (これを背景光という)。夜空からは、1 秒間に平均 B 個の光子が検出器に入り、この数もポアッソン分布に従う。更に、t 秒間積分した後に検出器にたまった電子を読み出す際にも雑音を生じる。これを読み出し雑音といい、ポアッソン分布に従いその標準偏差は R である。信号雑音比を求めるには、これら 3 つの雑音を全て含んだトータルの雑音を計算する必要がある。

(2) 一般に、独立なポアッソン分布である $P_N(M)$ と $P_B(M)$ にそれぞれ従う確率変数の和を考えると、その分布の標準偏差は $(N+B)^{1/2}$ となる。これを考慮して、t 秒間の積分をして読み出した時の天体の信号雑音比を求めよ。(但し、N、B、R は時間によらず一定である。)

以下に、得られた信号雑音比について考察する。

(3) R が他の雑音に比べて十分に大きく他の雑音が無視可能な場合 (これを読み出し雑音リミットと言う)、信号雑音比を 2 倍よくするには、積分時間を何倍にしなければならないか?

(4) 雑音の中で夜空の明るさが起源となっているものが最も卓越しており、その他の雑音が無視可能な場合 (これを背景光リミットと言う)、信号雑音比を 2 倍よくするには、積分時間を何倍にしなければならないか?

(次ページに続く)

実際の測定では、検出器の都合上、非常に長い間 (例えば 1 晩) 積分し続ける事はできない。そこで、1 回の積分時間を例えば Δt として、この積分を 1 晩で n 回繰り返し、取得したデータを足し合わせるという操作を行う。この場合、トータルの積分時間 T は $n\Delta t$ となる。

(5) 非常に暗い天体からの光を検出する場合、一般には 1 回の積分時間が短いと読み出し雑音リミットになり、ある程度以上長くなると背景光リミットになる。トータルの積分時間が同じ ($T =$ 一定) であった時に、読み出し雑音リミットのデータを何度も取得して足し合わせる場合と、背景光リミットのデータを何度も取得して足し合わせる場合では、どちらが信号雑音比としては得をするか?

III-6 (実験：X 線回折) (100 点)

結晶の構造を X 線回折によって調べる実験を考える。実験室系では X 線の発生装置として数十 kV の電圧で加速した電子を金属ターゲットに衝突させて発生する X 線を用いる方法（管球型、回転対陰極型）が広く用いられている。

(1) この場合、発生する X 線は 2 種類に分類することができる。それぞれ、名前を挙げ、その起源、特徴を簡潔に説明せよ。

(2) X 線は電磁波のうちどの範囲の波長に対応するか有効数字二桁で答えよ。ただし、X 線の光子のエネルギーは 1.2×10^2〜 1.2×10^5eVの範囲にあるとする。なお、プランク定数は 6.6×10^{-34}J・s、1eVは1.6×10^{-19} J、光の速度は 3.0×10^8m/sである。

(3) 電磁波の中で X 線が精密な結晶構造解析に適している理由を述べよ。また、X 線以外の結晶構造解析の方法を挙げ、その特徴を述べよ。

結晶に入射する X 線および散乱する X 線の波数ベクトルをそれぞれ **k**、**k**’(絶対値はともに 2 π / λ、λ は X 線の波長）とすると散乱ベクトルは **K** = **k**’ − **k** と定義される。結晶による X 線の回折は **K** = **G** の場合に起こる。（ラウエの条件）ただし、**G** は逆格子ベクトルであり、次のように表される。

$$\mathbf{G} = h\mathbf{a}^* + k\mathbf{b}^* + l\mathbf{c}^*$$

$$\mathbf{a}^* = 2\pi\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}, \mathbf{b}^* = 2\pi\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})}, \mathbf{c}^* = 2\pi\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}$$

ここで、**a**、**b**、**c** はそれぞれ実空間における単位格子の軸ベクトルであり、h、k、l はミラー指数である。

(4) ラウエの条件はよく知られたブラッグの法則 $2d\sin\theta = \mathrm{n}\lambda$ と等価であることを示せ。ただし、d は回折に寄与する格子面（回折面）の面間隔、θ は回折面から測った散乱角である。

(5) 実際の X 線回折測定では、結晶に対する X 線の入射角 ω、検出器の角度 2θ（入射方向から測った角度）を変化させて散乱強度を測定して逆格子点の位置を決定し、結晶構造の解析を行う。今、2 次元逆格子平面内にある逆格子点 **Q**（q_x、q_y）が回折計では ω、2θ の位置に観測された。逆格子平面内で逆格子点（q_x、q_y）と結晶に対する ω、2θ、散乱ベクトル **K** の関係を図示せよ。また、q_x および q_y を ω、2θ の関数として示せ。

(次ページに続く)

無限の大きさの完全結晶について、ある散乱ベクトル $\mathbf{K}$ での回折強度 $I(\mathbf{K})$ は $I(\mathbf{K}) = I_e | F(\mathbf{K}) |^2 L(\mathbf{K})$ となる。ここで、I_e は 1 つの電子による散乱強度、$L(\mathbf{K})$ はラウエの回折関数、$F(\mathbf{K})$ は構造因子である。$L(\mathbf{K})$ は $\mathbf{K} = \mathbf{G}$ のときのみ有限な値を持つため、

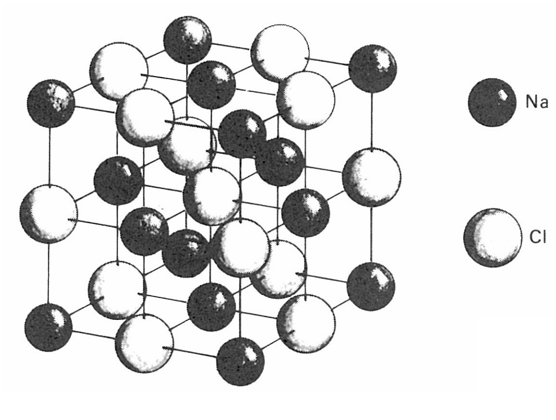
$$F(\mathbf{K}) = F(\mathbf{G}) = \sum_j f_j \mathrm{e}^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}_j}$$

のみを考えればよい。また、$\mathbf{G}$ はミラー指数で記述できるので、

$$F(\mathbf{G}) = \sum_j f_j \mathrm{e}^{2\pi i(hx_j + ky_j + lz_j)}$$

となる。ここで、$\mathbf{r}_j$ は単位格子内の原子の位置であり、単位格子の軸ベクトル $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ を用いて、$\mathbf{r}_j = x_j\mathbf{a} + y_j\mathbf{b} + z_j\mathbf{c}$ である。また、f_j は $\mathbf{r}_j$ にある原子の原子散乱因子である。

(6) NaCl 結晶からの回折を考える。NaCl 結晶について構造因子を計算し、消滅則を示せ。ただし、消滅則とは特定のミラー指数 h、k、l に対する構造因子が 0 となり、X 線の回折強度が 0 になる法則である。また同じ岩塩型構造を持つ NaCl と KCl では実際に観測される回折に差が生じる。どのような回折に対し、どのような違いが生じるか述べよ。



NaClの単位格子

III-7 (実験：レーザー) (100 点)

(1) レーザーに関する以下の問いに答えよ。

(a) レーザーの原理を述べよ。

(b) 発振器から波長 8.00×10^{-7}m のレーザーが出力 1.00kW で放射されているとすると、振動の 1 周期の間に放射される光子の数はいくらか。光速を c=3.00 × 10^8m/s、プランク定数を h=6.63 × 10^{-34}J・s とし、有効数字に注意して計算せよ。

(c) 波長 λ のレーザーを共鳴吸収する原子が静止している。この原子が速度 v でレーザーの進行方向に対向して移動する場合、原子に共鳴吸収させるにはレーザーの波長を $\Delta\lambda$ だけシフトさせる必要がある。シフト量を求めよ。ただし、共鳴吸収時に起こる原子の反跳は無視する。

(d) 静止している励起原子から λ の光が放出されれば、その正反対の方向へ原子は反跳する。原子質量を M、光放出前後の原子の内部エネルギー差を ΔE として光放射後の原子の速さ v を求めよ。

(e) 発振器から放射されるレーザーの波長は共振器内に配置した分散素子を使って変化させることができるが、波長範囲は主にレーザー媒質によって決まる。ある標的原子を共鳴遷移できる波長を発振するレーザーを製作したい。図 1 に標的原子のエネルギー準位を示す。光学的に許される遷移は選択規則により与えられる。いま、ΔJ=0,±1 の遷移が許され、偶項は奇項（奇項は偶項）へ遷移できる、という選択規則が成立する場合、標的原子の遷移可能な準位の組み合わせを全て記せ。ここで、$^1S_0$ は標的原子の基底準位で偶項を、^3P_n（n=0,1,2）は励起準位で奇項を示す。

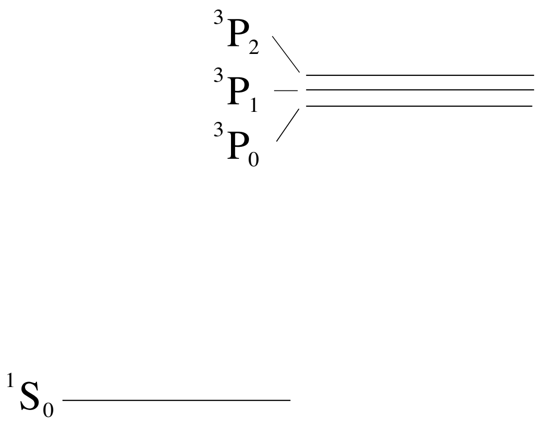


図 1:

(次ページに続く)

(f) 設計したレーザー発振器は直線偏光となるよう製作した。この発振器から放射されるレーザーの光軸上に $\lambda/4$ 波長板を配置し円偏光となるよう $\lambda/4$ 波長板を調整した。円偏光の電場振幅は直線偏光のものに比べ何倍になるか。

(2) 図2に示すような2個のスリットによる光の干渉実験を行った。以下の問いに答えよ。

(a) S1,S2 における光の電場振幅を A_1,A_2 とし、位相が距離 r とともに $\exp(ikr)$ の形で変化するものとして、スクリーン上に表れる干渉パターンの強度分布をスクリーンの中央からの距離 x の関数として求めよ。ただし、S1,S2 における光の位相は一致しているものとし、$l \gg x$, $l \gg d$ を満足しているものとする。ここで、$k=2\pi/\lambda$ であり λ は光の波長を示す。簡単のため電場振幅は距離 r とともに変化しないものとする。

(b) スクリーン上の干渉パターンの強度分布について、極大から次の極大までの距離を測ったところ、3.16cm であった。l=10.0cm、d=2.00μm とし、(a) で求めた近似的な関数を使って光の波長を求めよ。

(c) 一方のスリット S2 を小さくし通過しにくくし、S2 を通過する強度が S1 を通過する強度の 4% にしても、スクリーン上の干渉縞濃度の極大と極小値にかなりの違いがあって、干渉効果が認められる。極大値と極小値の比を示せ。

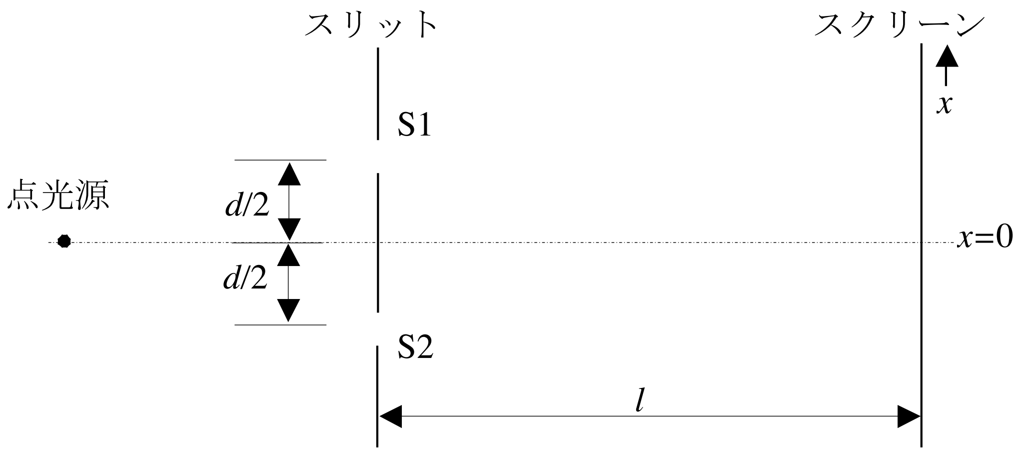


図 2:

III-8 (天文学：電磁流体) (100 点)

電気伝導度が高く、電磁力の働きが本質的である流体の力学を電磁流体力学とよぶ。電磁気学の基礎方程式を用いて電磁流体の運動を論じよう。解答では、以下のベクトル恒等式を適宜使用してよい。

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B},$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \triangle \boldsymbol{A}.$$

(1) 磁束密度$\boldsymbol{B}$の磁場内を電気伝導度σの電磁流体が速度$\boldsymbol{v}$で運動している。ただしcを光速として、$|\boldsymbol{v}| \ll c$とする。この時、電磁流体の電流$\boldsymbol{j}$、電場$\boldsymbol{E}$の関係式 (Ohm の法則) は、式 (A) のように与えられる。

$$\boldsymbol{j} = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right). \qquad \text{(A)}$$

l, τを、ここで考えている電磁場、電磁流体の特徴的な空間、時間変化の大きさとすると、$l/\tau \sim |\boldsymbol{v}| \ll c$の場合、変位電流を無視することができる。また、電磁流体は電気的に中性であるとする。この場合、Maxwell 方程式は以下のように書ける。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0,$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}.$$

ここで、磁場を$\boldsymbol{H}$、真空の透磁率をμ_0とすると、$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$である。なお、電気伝導度$\sigma$は定数とする。この場合、磁束密度の時間変化が式 (B) で与えられることを示せ。

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma}\triangle \boldsymbol{B}. \qquad \text{(B)}$$

(2) 電気抵抗が無視できる場合 ($\sigma \to \infty$) の電磁流体と磁場の運動を調べよう。

(a) 流体の速度を$\boldsymbol{v}$とすると、流体中の線要素$\delta \boldsymbol{r}$の流体運動にそった変化 (Lagrange 微分) が、式 (C) で与えられることを示せ。(ヒント:点$A(\boldsymbol{r})$, 点$B(\boldsymbol{r} + \delta \boldsymbol{r})$からなる線要素の、流体速度$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$にそった時間変化を考える。)

$$\frac{d}{dt}\delta \boldsymbol{r} = (\delta \boldsymbol{r} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{v}. \qquad \text{(C)}$$

(b) 電磁流体の質量密度をρとして、連続方程式 (質量保存則) と式 (B) を用いて、$\sigma \to \infty$での$\boldsymbol{B}/\rho$の Lagrange 微分を求めよ。また、この結果と式 (C) とを参照して、このとき磁力線は電磁流体とともに運動することを示せ。これを Alfvén の磁気凍結定理と呼ぶ。

(次ページに続く)

(3) 磁気凍結定理のひとつのあらわれに、太陽風の大規模磁場構造がある。太陽には表面から放射状に出る大局的な磁場構造がある。また、太陽からは太陽風とよばれる電気伝導度の高い高温プラズマが惑星間空間へ放射状に流出している。この太陽風プラズマの軌跡のパターンは、太陽の自転運動のためにスパイラル状になる。磁気凍結定理から、太陽風プラズマにより太陽表面から引き出された磁力線も、このプラズマのスパイラルパターンをなぞった構造を持つことになる (図 1)。ここでは、太陽からの距離 $r \geq 10r_\odot$($r_\odot$ は太陽半径) では、慣性系で見た場合、太陽風プラズマは動径方向に V で等速直線運動をするものとする。太陽赤道面内にある太陽風の磁場構造に関して、以下の問に答えよ。

(a) 太陽とともに一定の角速度 ω で回転する系で見た太陽風プラズマの運動を考え、この系での太陽を中心とする 2 次元極座標 (r, ϕ) で、$r \geq 10r_\odot$ にあるスパイラル磁場の磁力線構造 (形状) を表す方程式を求めよ。

(b) 太陽の自転角速度 $\omega = 3.0 \times 10^{-6}$[rad/s]、太陽半径 $r_\odot = 7.0 \times 10^5$[km]、太陽風の速さ $V = 4.0 \times 10^2$[km/s]、太陽と地球の間の距離を $r_0 = 1.5 \times 10^8$[km] として、地球軌道付近で磁力線と、太陽と地球を結ぶ線のなす角度 ψ を求めよ。

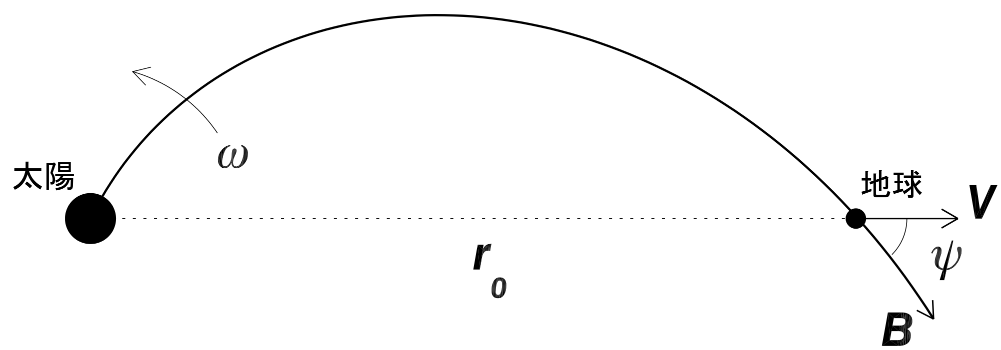


図 1: 太陽赤道面内での太陽風のスパイラル磁場。$\boldsymbol{V}$ は太陽風プラズマの速度、$\boldsymbol{B}$ は太陽風の磁力線を表す。

III-9 (天文学：光電離平衡) (100 点)

高温度星は紫外線を放出し、周りにある希薄な星間ガスを光電離する。一方、電離された自由電子とイオンは再結合する。この光電離と再結合という過程がつり合う状態、つまり光電離平衡が実現することにより、高温度星の周りに広大な電離ガス領域が形成される。以下、球対称な電離ガス領域の構造を考える。ガスは水素原子 (H^0)、陽子 (H^+=p)、自由電子 (e^-) のみから成るとし、星からの距離 r[m] におけるそれぞれの個数密度を $n_{\mathrm{H}^0}(r)$ [m^{-3}]、$n_{\mathrm{p}}(r)$ [m^{-3}]、$n_{\mathrm{e}}(r)$ [m^{-3}] とする。なお、電離ガス領域自体から放出される光子の影響、及び粒子の衝突による H^0 の電離・励起は無視する。H^0 は全て基底状態にあるとする。

(1) 単位周波数 (1 Hz) あたりの光度、つまり光度密度 $L_\nu(\nu)$ [J s^{-1} Hz^{-1}] を持つ高温度星から距離 r[m] の位置において、単位体積 (1 m^3) 単位時間 (1 s) あたり何個の H^0 が電離されるか。ただし、電離光子に対する H^0 の吸収断面積を $a(\nu)$ [m^2] とする。また、この位置に届くまでに電離光子が電離に使われて減る効果は小さくて無視できるとする。

(2) 一方、単位体積・単位時間あたりに起きる再結合の数は、再結合係数を β [m^3 s^{-1}] として、$n_{\mathrm{p}}(r)\cdot n_{\mathrm{e}}(r)\cdot\beta$ で与えられる。中性である水素の割合 $\xi(r) = n_{\mathrm{H}^0}(r)/n_{\mathrm{H}}(r)$ を用いて、光電離平衡の式を書け。ただし、$n_{\mathrm{H}}(r) = n_{\mathrm{H}^0}(r) + n_{\mathrm{p}}(r)$ である。

以下、電離ガス領域内外で一定の $n_{\mathrm{H}} = 1 \times 10^7$ [m^{-3}]、高温度星から単位時間に放射される電離光子の個数が 5×10^{48} [s^{-1}] である場合を考える。なお、$a(\nu)$ は電離光子の周波数 ν に依らず一定で $a \sim 6 \times 10^{-22}$ [m^2] と近似して良い。また、$\beta \sim 3 \times 10^{-19}$ [m^3 s^{-1}] である。

(3) (2) で求めた式から、$r = 1 \times 10^{17}$ [m] における ξ を有効数字一桁で概算せよ。

(4) ここまで、電離光子が途中で電離に使われて減る効果を無視してきた。しかし、高温度星から遠ざかるにつれて、この効果を無視できなくなる。この効果を評価するために、周波数 ν [Hz] を持った $N_\nu(\nu)$ 個 [Hz^{-1}] の電離光子が、半径 r [m] の球殻から $r + dr$ [m] の球殻へ微小距離 dr [m] だけ進んだときの個数変化 $dN_\nu(\nu)$ [Hz^{-1}] を $\xi(r)$ を用いて表せ。

(5) 電離ガス領域とその外側の中性ガス領域との境目の領域を遷移領域とよぶ。この領域を通過する際に電離光子の数が $1/e$ に減る (e は自然対数の底) と考えることにより、遷移領域の厚さを有効数字一桁で概算せよ。ただし、この領域において $\xi \sim 0.5$ と近似してよい。

(6) 電離ガス領域の半径を有効数字一桁で概算せよ。必要なら $\pi^{1/3} \sim 1.5$ を用いてよい。