

平成 18 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
- (2) 各解答用紙は、横長に使用して、左半分の最上部に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
- (3) 計算用紙は回収しない。

I-1 (力学) (100 点)

図のような二重振子の微小な振動について考えよう。振動は鉛直面内でおこると仮定し、一般化座標として図の θ と φ を使い、その時間微分をそれぞれ $\dot{\theta}$ 、 $\dot{\varphi}$ とする。また、図のように、おもりの質量を m 、 m' 、糸の長さを l 、 l' とする。以下では、 θ 、 φ 、 $\dot{\theta}$ 、 $\dot{\varphi}$ は微小量として、これらの 2 次まで考慮する。重力加速度は g とし、糸の部分の質量は無視する。

- (1) 振子全体の運動エネルギーを求めよ。
- (2) 振子全体の位置エネルギーを求めよ。但し、振子が鉛直に垂れている状態の位置エネルギーを 0 とする。
- (3) θ 、 φ に対する運動方程式を求めよ。
- (4) 問 (3) で求めた運動方程式を解くと、一般解は、

$$\theta(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$\varphi(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

と書ける ($\omega_1 < \omega_2$)。 ω_1^2 、 ω_2^2 の値、 A_1/B_1 、 A_2/B_2 の値を求めよ。

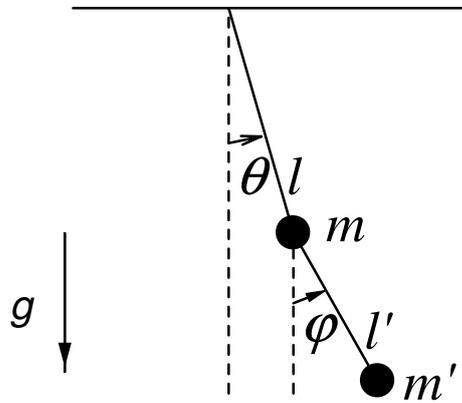
- (5) 以下では、 $l = l'$ 、 $m' \ll m$ とする。このとき、角振動数 ω_1 と ω_2 は、

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m'}{m}} \right), \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m'}{m}} \right)$$

と近似的に表せることを示せ。

- (6) 初期条件を、 $t = 0$ で $\theta = 0$ 、 $\dot{\theta} = 0$ 、 $\varphi = \varphi_0$ 、 $\dot{\varphi} = 0$ とする。この場合、一般解の係数 A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 を求めよ。また、 $\theta(t)$ と $\varphi(t)$ の運動の様子を、時間 t の関数としてグラフで示せ。時間 t の範囲は $t = 0$ から $\frac{4\pi}{\omega_2 - \omega_1}$ までとり、 $\theta(t)$ と $\varphi(t)$ の挙動の違いがわかるように二つのグラフを上下にならべて比較せよ。

(ヒント : $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$)



I-2 (電磁気学) (100 点)

一様な電場 $\vec{E} = (0, 0, E)$ と、それに垂直な一様磁場 $\vec{B} = (0, B, 0)$ の存在する空間における、荷電粒子の運動を考える。ただし、 $E > 0, B > 0$, 荷電粒子の電荷を q 、質量を m とする。電荷 q は正または負とする。また、粒子の初速度は $\vec{v} = (v_0, 0, 0)$ とし、 $|v_0/c| \ll 1$ を満たすものとする。 c は光速である。

- (1) 荷電粒子の運動方程式を書け。
- (2) 荷電粒子の速度を求め、時間の関数として表せ。
- (3) 荷電粒子の初期の位置を、原点 $(0, 0, 0)$ に選んだとき、軌道の形を、次の 2 つの場合について図示せよ。
 - (a) $v_0 = -E/B$
 - (b) $v_0 = 0$
- (4) E/B という速さで x 軸の負方向に運動する座標系で見たときの、電場と磁場の大きさ、方向を求めよ。これより、問 (3)(a) の運動の特徴が説明できることを述べよ。
- (5) 次に、磁場はそのままにして一様な電場の代わりに、一様な重力場 (重力加速度 $\vec{g} = (0, 0, -g)$) を与える。このときの荷電粒子の運動方程式を解き、旋回中心の動く向きに注意して、運動の特徴を述べよ。

I-3 (量子力学) (100点)

スピン $1/2$ を持つ粒子のスピン演算子 s は、パウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

を用いて $s = \frac{\hbar}{2}\sigma$ と表され、スピン演算子 s は交換関係

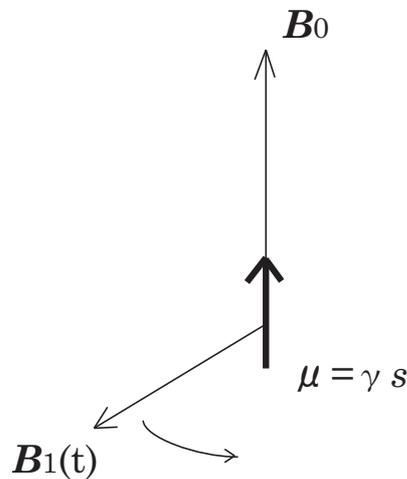
$$[s_1, s_2] = i\hbar s_3, \quad [s_2, s_3] = i\hbar s_1, \quad [s_3, s_1] = i\hbar s_2,$$

を満たす。

一般にスピンを持った粒子は、粒子に固有の磁気モーメントを持っている。今、考えているスピン $1/2$ の粒子の固有磁気モーメントを $\mu = \gamma s$ とし、この粒子が z 方向の静磁場 B_0 、及び静磁場に直交する $x-y$ 平面内で角速度 ω で回転する磁場 $B_1(t)$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1(t) = \begin{pmatrix} B_1 \cos(\omega t) \\ -B_1 \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A})$$

の中に静止しているとしよう。(下図参照)



軌道運動は考えないとするとハミルトニアンは

$$H(t) = -\boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(t)),$$

で与えられる。ここで時刻 $t = 0$ にスピンの z 軸の正方向を向いていたとして、時刻 t にスピンの z 軸の負方向を向いている確率 $P(t)$ を求めよう。

但し、スピン $1/2$ を持つ粒子の状態は二成分波動関数

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix},$$

で表され、これを用いてシュレーディンガー方程式は通常 of 形

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = H(t) \psi(t),$$

に書くことができる。

$$\omega_0 = \gamma B_0, \quad \omega_1 = \gamma B_1,$$

と定義し、以下の問題に答えよ。

- (1) まず静磁場のみ ($B_1 = 0$) の場合を考え、この場合の波動関数

$$\psi_0(t) = \begin{pmatrix} \psi_{0+}(t) \\ \psi_{0-}(t) \end{pmatrix} \text{ を求めよ。但し、任意定数を決める必要はない。}$$

- (2) 次に一般に $B_1 \neq 0$ の場合を考える。問 (1) で求めた ψ_0 を用いて波動関数を $\psi(t) = \begin{pmatrix} a_+(t)\psi_{0+}(t) \\ a_-(t)\psi_{0-}(t) \end{pmatrix}$ のように表したとき、 $a_{\pm}(t)$ の満たす方程式を求めよ。

- (3) $t = 0$ でスピンの z 軸の正方向を向いていたものとして $a_{\pm}(t)$ を求めよ。また、時刻 t でスピンの z 軸の負方向を向いている確率 $P(t)$ を求めよ。

- (4) $P(t)$ の最大値の大まかな形を、式 (A) で導入された振動磁場 B_1 の角振動数 ω の関数として図示し、その物理的意味を考察せよ。

平成 18 年度大学院入学試験問題 II (3 時間 30 分)

注意

- (1) 問題 II-1、II-2、II-3 の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
 - (2) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に、問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
 - (3) 計算用紙は回収しない。
-

II-1 (熱統計力学) (100 点)

(1) ファン・デル・ワールズ方程式で記述される流体がある。即ち圧力 p は温度 T と粒子数密度 n により

$$p = \frac{k_B T n}{1 - bn} - an^2 \quad (\text{A})$$

と表せる。正の定数 a, b の物理的意味を述べよ。 k_B はボルツマン定数である。

(2) 一定温度 T での $p - v$ 曲線が図のような形状の時には、気体相と液体相が共存する。ただし $v = 1/n$ は一粒子当たりの体積。 v_g と v_l は気体相と液体相での v の値である。共存する時の圧力 $p = p_{\text{cx}}(T)$ は温度の関数であるがどのように決まるか考えよう。平衡では 2 相の圧力と化学ポテンシャル μ が等しくなることを利用して、一粒子当たりのヘルムホルツ自由エネルギー f の 2 相の間の差を v_g, v_l, p_{cx} を用いて書け。また温度一定の場合の微分式 $df = -pdv$ も用いて、平衡での 2 相共存の条件として、領域 A と領域 B の面積が等しいことを導け (Maxwell の規則)。

(3) (A) 式より、等温圧縮率 $K_T = (\partial n / \partial p)_T / n$ は

$$nk_B K_T = \frac{(1 - bn)^2}{T - T_s(n)} \quad (\text{B})$$

の形に書ける。 n に依存した温度 $T_s(n)$ を計算せよ。図で $T = T_s(n)$ となる点はどこに位置するか答えよ。

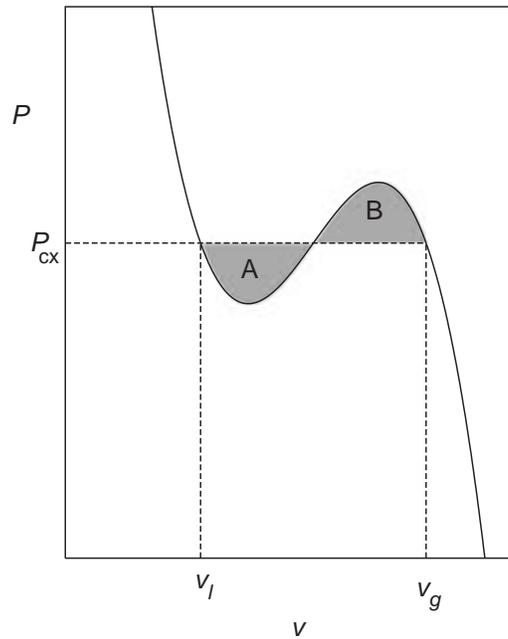
(4) 温度 T を臨界温度 T_c まで上昇させると、2 相の体積差 $\Delta v = v_g - v_l$ が零になり、2 相の区別がなくなる臨界点と呼ばれる状態が達成できる。 $T_s(n)$ が密度 n の

関数として最大となり、かつ温度が $T = T_s(n)$ である状態が臨界点になることを示せ。このことから臨界点における密度 n_c と温度 T_c を a, b で表せ。次に密度 n を臨界値 n_c に保ったまま温度 T を臨界温度 T_c に高温側から近づけてみよう。等温圧縮率 K_T がどのように振舞うか図示せよ。

(5) 2 相共存状態の外から熱を僅かに与えると、共存状態を保ったまま圧力と温度が変化する。平衡状態では

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T\Delta v} \quad (C)$$

の関係が知られている。ここで $L = T\Delta s$ は粒子 1 個当たりの潜熱であり、 $\Delta s = s_g - s_l$ は気体状態と液体状態での粒子 1 個当たりのエントロピー差である。この (C) 式がどのようにして導かれるか答えよ。



II-2 (物理数学) (100 点)

$f(t)$ は時間 t の連続な実関数で、正の定数 M と α に対し、 $|f(t)| \leq Me^{-\alpha t}$ を満たす。この $f(t)$ を用いて、複素関数 $\chi(\zeta)$ を、次式で定義する。

$$\chi(\zeta) = \int_0^{\infty} f(t)e^{i\zeta t} dt \quad (\text{A})$$

以下の問に答えよ。

- (1) $\chi(\zeta)$ の n 階導関数 $\chi^{(n)}(\zeta)$ が、 ζ 複素平面の上半面で

$$|\chi^{(n)}(\zeta)| \leq M \frac{n!}{(\alpha + \zeta_2)^{n+1}} \quad (\text{B})$$

を満たすことを示せ。但し、 ζ_2 は ζ の虚部である。

(ヒント：一般に、 $\left| \sum_{i=1}^N a_i \right| \leq \sum_{i=1}^N |a_i|$ であり、これは積分にも拡張できる。)

- (2) ζ 平面上の複素積分を利用して、

$$\chi(\omega) = \frac{1}{i\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta \quad (\text{C})$$

を導け。ここで、 ω は実数であり、P の付いた積分は実軸上の主値積分を意味する。即ち、被積分関数 $F(x)$ が x_0 のみで極をもつ場合、 $x_1 (< x_0)$ から $x_2 (> x_0)$ までの主値積分は、次式で与えられる。

$$\text{P} \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{x_1}^{x_0 - \varepsilon} F(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^{x_2} F(x) dx \right]$$

- (3) $\chi(\zeta)$ の実部を $\chi_1(\zeta)$ 、虚部を $\chi_2(\zeta)$ とする。即ち、 $\chi(\zeta) = \chi_1(\zeta) + i\chi_2(\zeta)$ 。このとき、まず、 $\chi_1(\zeta)$ と $\chi_2(\zeta)$ について、 ζ の関数としての偶奇性を調べよ。次に、それを利用して、(C) 式より次の 2 式を導け。

$$\chi_1(\omega) = \frac{2}{\pi} \text{P} \int_0^{\infty} \frac{\zeta \chi_2(\zeta)}{\zeta^2 - \omega^2} d\zeta \quad (\text{D})$$

$$\chi_2(\omega) = -\frac{2}{\pi} \text{P} \int_0^{\infty} \frac{\omega \chi_1(\zeta)}{\zeta^2 - \omega^2} d\zeta \quad (\text{E})$$

(4) $f(t)$ が次の 1 階微分方程式を満たすとする。

$$\frac{df(t)}{dt} + af(t) = Ae^{-bt} \quad (\text{F})$$

このとき $f(t)$ および $\chi(\zeta)$ を求めよ。ここで, a, b, A は共に正の定数である (但し, $a > b$)。また, $f(t)$ の初期条件は $f(0) = 0$ である。

II-3 (複合問題) (100 点)

理想流体の渦のダイナミクスを論じよう。粘性がないために渦はその形状を保ち続ける。その結果、直線的な渦が存在する場合は流体の運動は渦ベクトルに垂直な平面内に拘束され、2次元的な扱いが可能になる。また、この系では電磁気学とのアナロジーが成立する。

今、流体系は十分大きく広がっており、境界の影響はないものとして、以下の問に答えよ。

- (1) 流体の速度場 \boldsymbol{v} が

$$\boldsymbol{v} = \text{rot} \boldsymbol{A}, \quad \text{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad (\text{A})$$

を満たすとする。但し \boldsymbol{A} は $\text{div} \boldsymbol{A} = 0$ を満たすベクトルポテンシャルである。このとき渦度 $\boldsymbol{\omega} = \text{rot} \boldsymbol{v}$ は $\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{\omega}$ を満たすことと、その特解がビオ・サバール則

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 \boldsymbol{r}' \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \quad (\text{B})$$

で表されることを示せ。

- (2) \boldsymbol{e}_z を z 方向の単位ベクトルとして、渦度が $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$ で表される直線渦を考える。渦の断面積を S として循環 $\Gamma \equiv \omega S$ を一定に保ったまま $S \rightarrow 0$ の極限を取ったものを渦糸と呼ぶ。 xy 平面の原点に置かれた循環 Γ の渦糸が、原点以外の場所に作る速度場を求めよ。(ヒント: この状況では渦度は $\boldsymbol{\omega} = \Gamma \delta(x) \delta(y)$ と表される。またベクトルポテンシャル自体は無限遠に2次元系特有の特異性を持つが、速度場は無限遠ではゼロになる。)
- (3) 位置 (x_j, y_j) に循環 Γ_j の渦糸 j が存在する渦糸系 ($1 \leq j \leq N$) を考える。この系での渦糸の移動速度は問 (2) で計算した他の渦糸が作る誘導速度の総和に等しいものとする。このとき $z_j \equiv x_j + iy_j$, $z_j^* = x_j - iy_j$ の時間発展は

$$\frac{dz_j^*}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{\Gamma_k}{z_j - z_k} \quad (\text{C})$$

で記述できることを示せ。

(4) 問(3)の(C)式は

$$\Gamma_j \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_j}, \quad \Gamma_j \frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (\text{D})$$

という(係数を別にして)正準方程式に書き直せることを示せ。またこのときのハミルトニアン H を既知変数を用いて表せ。

(5) この系で渦糸の全角運動量

$$\sum_{j=1}^N \Gamma_j \left(x_j \frac{dy_j}{dt} - \frac{dx_j}{dt} y_j \right) \quad (\text{E})$$

が保存量であることを示せ。

平成 18 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題 III-1 から III-9 まで 9 問ある。これらから 3 問選択せよ。
 - (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の用紙一枚に記入せよ。
裏面を用いてもよい。
 - (3) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に、
問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
 - (4) 計算用紙は回収しない。
-

III-1 力学：中心力

III-2 量子力学：磁場中の電子

III-3 統計力学：ボーズ凝縮

III-4 物理数学：微分方程式

III-5 流体力学：ラバール管

III-6 実験：中性子散乱

III-7 実験：データ解析

III-8 天文学：制動放射

III-9 天文学：恒星

III-1 (力学：中心力) (100点)

3次元座標空間において中心力ポテンシャル $U(r)$ の中で運動する質量 m の粒子の運動を古典力学によって考察する。以下の問いに答えよ。

- (1) 粒子の軌道は一つの平面上にのる。この理由を簡潔に説明せよ。
- (2) この平面上で、動径 r 方向と角度 θ 方向の運動方程式を導け。
- (3) 中心力ポテンシャルが $U(r) = g/r$ で与えられる場合に粒子の軌道の形を求めたい。ただし、 $g < 0$ とする。変数変換 $u = 1/r$ を行い、 u を θ の関数とみなして u に対する2階の微分方程式を導け。
- (4) 上で求めた微分方程式を解くと r は θ の関数として

$$r = \frac{a}{1 + b \cos \theta} \quad (\text{A})$$

という形に表わせることを示せ。ここで、 a, b は定数である。

- (5) 上で求めた軌道は $b < 1$ のときどのような曲線になるか。また、 $a/(1 - b^2)$ という量は何を表すか。
- (6) 中心力ポテンシャルが $U(r) = gr^n$ と書ける場合を考える。ただし、 $g > 0$ または $g < 0$ 、 n は正または負の整数とする。運動方程式の解として円軌道が存在するためには、 g と n がある関係を満たす必要がある。この関係を求めよ。
- (7) 問(6)で求めた関係が満たされていると仮定し、半径 r_0 の円運動に動径方向の小振幅振動が加わった運動を考察しよう。 $U(r)$ に遠心力ポテンシャルを加えた有効ポテンシャル $U^{(\text{eff})}(r)$ を $r - r_0$ に関して2次まで展開して動径方向の角振動数 ω_r を求めよ。
- (8) 問(7)で求めた ω_r の表式から g を消去すれば、 ω_r と角度 θ 方向の角振動数 ω_θ の関係式が得られる。この関係式を求めよ。
- (9) 問(8)で求めた関係式を見ると、よく知られた $n = -1$ の場合や調和振動子ポテンシャル ($n = 2$) 以外にも、円軌道でない周期軌道が存在する n の値がたくさんあることが分かる。そのような n の例を一つ挙げ、その軌道の略図を示せ。ただし、周期軌道とは何回か回転した後ふたたび初期時刻と同じ点に同じ速度で戻ってくる軌道のことである。

III-2 (量子力学：磁場中の電子) (100点)

一様な磁場中にある質量 m , 電荷 $-e$ の電子の運動を考える．ベクトルポテンシャル \mathbf{A} を用いて電子のハミルトニアンは，

$$H = \frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla + e\mathbf{A})^2$$

と与えられる．以下 x, y, z 方向に，それぞれ長さ L_x, L_y, L_z の周期的境界条件で考えよう．

- (1) ベクトルポテンシャル $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ は， z 方向に B の大きさの一様磁場を与えることを示せ．以下このベクトルポテンシャルを使って問題を解け．
- (2) 変数 z に関する部分の固有関数とエネルギー固有値を求めよ．ただし，固有関数を規格化する必要はない．
- (3) 以下の問は，変数 x および y に関する自由度のみを考えることにする． y 方向には平面波を考えて，変数 x に関する波動関数のシュレーディンガー方程式を書け．また，なぜ平面波が固有関数になるか理由を書け．
- (4) 質量 m , バネ定数 K を持つ一次元調和振動子の固有関数は，

$$u_N(x) = C_N \exp\left(-\frac{x^2}{2\ell^2}\right) H_N\left(\frac{x}{\ell}\right)$$

であり，エネルギー固有値は $\varepsilon_N = (N + 1/2)\hbar\omega_c$ であることを参考にして，変数 x に関する部分のシュレーディンガー方程式の固有関数とエネルギー固有値 E_x を求めよ．ここで， N は 0 以上の整数， C_N は N に依存する定数， $\omega_c = \sqrt{K/m}$ は固有角振動数， $\ell = \sqrt{\hbar^2/mK}$ は波動関数の広がりを表す定数， $H_N(x/\ell)$ はエルミート多項式である．

- (5) 同じ固有値 E_x に属する、単位面積あたりの状態の数 (縮退度) を求めよ．ただし $L_x \gg \ell, L_y \gg \ell$ とする．
- (6) ベクトルポテンシャルに関数 $\chi = -Bxy$ の勾配 $\nabla\chi$ を加えるゲージ変換を行ってもエネルギー固有値は変わらないことを示せ．このことはゲージ変換によってベクトルポテンシャルが変わっても，位相に関係しない物理現象は変わらないことを意味している．これをゲージ不変性と言う．

III-3 (統計力学: ボーズ凝縮) (100点)

粒子数 N のボーズ統計に従う理想気体が十分大きな体積 V の容器に閉じこめられている。このとき、分布関数 $f(\epsilon)$ は

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}$$

で与えられる。但し ϵ, μ はそれぞれボーズ粒子のエネルギー、化学ポテンシャルであり、 β はボルツマン定数 k_B 、温度 T を用いて $\beta = 1/(k_B T)$ と表される。以下の間に答えよ。

- (1) この系の化学ポテンシャル μ に関連して以下の事を説明せよ。
 - (a) 物理的に μ の取り得る範囲を求めよ。
 - (b) 温度を固定したとき、粒子数の期待値が $\mu = 0$ で最大になることを示せ。
- (2) ボーズ粒子のエネルギーが運動量の大きさ p および粒子質量 m を用いて $\epsilon = p^2/2m$ で与えられるとしよう。系の体積が十分大きいので励起状態にある粒子数 N' は積分で表現できる。このとき d 次元理想ボーズ気体において T と数密度 N'/V の関係を積分

$$F_{d/2}(\alpha) \equiv \int_0^\infty dx \frac{x^{d/2-1}}{e^{x+\alpha} - 1}$$

を用いて表せ。尚、この関係式は T 及び N' が与えられたときの化学ポテンシャルの決定方程式となっている。また考えているボーズ粒子のスピンはゼロとし、スピン自由度は考えなくてよいものとする。更に d 次元単位球の表面積を一括して S_d と表すと、求める式が一つの式で書いて便利である ($S_3 = 4\pi, S_2 = 2\pi$ 等に注意)。

- (3) 問(2)で求めた条件式では、空間次元 d がある条件を満たすと、十分低温では α が解を持たなくなる。このことを考慮して1次元系、2次元系でボーズ凝縮が生じるか否かを論ぜよ。
- (4) 3次元系に限定して考察を進める。
 - (a) これまでの議論を参考にして、ボーズ凝縮の生じる温度 T_c を求めよ。
 - (b) $T \leq T_c$ での凝縮相における粒子数密度 n_c を粒子数密度 $n \equiv N/V$ 及び T, T_c の関数として書き下せ。

但し

$$\zeta(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}, \quad \Gamma(x) \equiv \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

等を用いて良い。

- (5) 次に $\epsilon = cp$ の光子気体を考えよう。仮に問 (2)、(3) で用いたボーズ凝縮の判定条件が有効であれば、3次元系では有限温度でボーズ凝縮が起こることになる。しかし実際には、光子気体では有限温度で熱力学量に何の異常も現れない。その理由を説明せよ。

III-4 (物理数学：微分方程式) (100点)

- (1) 実関数 $u(x, y)$ に対する 2次元のラプラス方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) = 0,$$

を極座標 (r, θ) ($0 \leq r < \infty$, $-\pi \leq \theta < \pi$)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

を用いて書き直せ。

- (2) 問(1)で極座標で表したラプラス方程式の解 $u(r, \theta)$ で、原点 $r = 0$ で有限であるものの一般形を求めよ。
- (3) 問(2)で求めた一般形を用いて、円周 $r = r_0$ で境界条件

$$u(r_0, \theta) = f(\theta),$$

を満たす解を求めよ。但し、 $f(\theta)$ は与えられた関数とする。

- (4) 問(3)で求めた解で特に、 $f(\theta)$ を $[-\pi, \pi]$ で区分的に連続な関数

$$f(\theta) = |\theta|, \quad (-\pi \leq \theta < \pi),$$

を接続して得られる周期関数とした場合の解を求めよ。但し、解は級数形のまままで足し上げる必要はない。

III-5 (流体力学：ラバール管) (100 点)

管の中の定常流を考える。簡単のため、流れの性質は管の中心軸に沿った座標 (x) にのみ依存するとし、管の断面積 A は x のみの関数 $A(x)$ とする。

このとき、流れの連続の式、運動方程式は、以下のようになる。

$$\frac{1}{A} \frac{d}{dx}(A\rho v) = 0 \quad (\text{A})$$

$$\rho v \frac{dv}{dx} + \frac{dp}{dx} = 0 \quad (\text{B})$$

ただし、 $\rho(x)$ は質量密度、 $p(x)$ は圧力、 $v(x)$ は速度である。また、流れは断熱的であるとすると、以下の式が成り立つ。

$$\frac{d}{dx}(p\rho^{-\gamma}) = 0 \quad (\text{C})$$

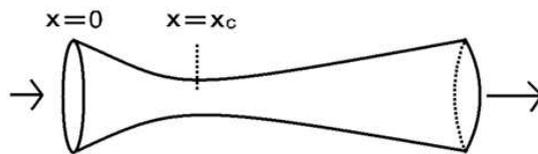
ここで、 $\gamma = C_p/C_v$ は比熱比であり、単原子理想気体では $5/3$ である。 (C_p, C_v) は、それぞれ、定圧比熱、定積比熱である。）

上記の方程式を積分しよう。まず、方程式 (A) と (C) の積分は容易に以下のように求まる。

$$A\rho v = f = \text{constant} \quad (\text{D})$$

$$p\rho^{-\gamma} = K = \text{constant} \quad (\text{E})$$

- (1) 運動方程式 (B) の積分を求めよ (ベルヌーイの定理)。また、その物理的意味を述べよ。



以下では、有限の長さの管を考える。このとき、左端を高圧、右端を低圧とすると、左端から右端へ流れが発生する。右端 (出口) における流れの速度が超音速となるためには、管の断面積が x と共に減少し、あるところ ($x = x_c$) で $dA/dx = 0$ となり、再び増大するようになっている必要がある。そのような管 (上図参照) をラバール管といい、ロケットやジェット機のジェット噴射における超音速流の生成に使われる。以下の問いに答えよ。

- (2) 流れの初速 v_0 が音速以下であり、かつ、 $dA/dx < 0$ ならば、流れの速さの 2 乗は x と共に単調増加する ($dv^2/dx > 0$) ことを示せ。ただし、音速 c は $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$ と表される。
- (3) 流れの速さが音速に等しくなることができるのは、 $dA/dx = 0$ の場所のみであることを示せ。
- (4) 速さの 2 乗の勾配 (dv^2/dx) の符号がどうなるか、以下の場合に分けて答えよ。
- (a) $x < x_c, \quad v > c$
 - (b) $x < x_c, \quad v < c$
 - (c) $x > x_c, \quad v > c$
 - (d) $x > x_c, \quad v < c$

また、この結果に基づいて、解曲線のあらましを図示せよ。図は縦軸に v/c をとり、横軸に x をとること。ただし、 c は x における音速とする。

- (5) ラバール管の左端（入口）では流れの初速 v_0 はそこでの音速 c_0 に比べて十分小さい ($v_0 \ll c_0$) とし、右端（出口）では、流れの速さ（終速） v_1 はそこでの音速 c_1 より十分大きい ($v_1 \gg c_1$) とする。終速 v_1 を、比熱比と c_0 で表せ。

III-6 (実験：中性子散乱) (100点)

- (1) 中性子は、原子炉内で核分裂反応により発生させることができる。しかし、発生直後の中性子はあまりにも高速であるため、減速材と呼ばれる物質との衝突を通して熱中性子に変換した後で、構造解析等の物性研究に利用されている。以下の問に答えよ。
- (a) 中性子の減速材として、多量の水素原子を含む物質を低温に保持して用いることが多い。この理由を、数式を使わずに、簡潔に述べよ。
- (b) 中性子の質量 m はいくらか。kg 単位で有効数字二桁で答えよ。ヒント：アボガドロ数 N_A は $6.0 \times 10^{23}/\text{mol}$ である。
- (c) ド・ブロイ波長が 1 \AA である中性子のエネルギーを、電子ボルト単位で有効数字二桁で答えよ。なお、素電荷 e は $1.6 \times 10^{-19}\text{C}$ 、プランク定数 h は $6.6 \times 10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}$ である。
- (2) 固体中の原子は、平衡位置を中心に微小振動している。一つの原子の振動は、原子間相互作用を通して固体全体に伝播し、格子振動と呼ばれる集団運動となる。格子振動は、基準振動の重ね合わせとして記述され、各々の基準振動を量子化したものがフォノンである。フォノンの分散関係（即ち、運動量とエネルギーの関係）は、中性子非弾性散乱を用いて調べることができる。以下の問に答えよ。
- (a) 中性子の波数ベクトルが、非弾性散乱により k_1 から k_2 に変化したとする。このとき中性子が失った運動量 P とエネルギー E を、 k_1 、 k_2 および中性子の質量 m を用いて表せ。
- (b) k_1 と k_2 がなす角度を散乱角と呼ぶ。散乱角が 0 度から 180 度まで変化する際、 P の絶対値 P が取りうる範囲を、 k_1 の絶対値 k_1 と、 k_2 の絶対値 k_2 を用いて表せ。但し、 $k_1 \geq k_2$ とする。
- (c) 前問で得られた不等式から k_2 を消去して、 P 、 E 、 k_1 の関係を表す不等式を導け。また、その不等式を満たす領域を、 $P - E$ 平面上に図示せよ。
- (d) フォノンのエネルギーを E_{ph} 、運動量の絶対値を P_{ph} とする。このフォノンが中性子非弾性散乱によって観測されるためには、 $P = P_{\text{ph}}$ および $E = E_{\text{ph}}$ の条件が必要である。即ち、中性子が失った運動量およびエネルギーが格子系に移動して、フォノンが生成される条件である。今、フォノンの分散関係が、フォノンの速度 v を用いて、 $E_{\text{ph}} = vP_{\text{ph}}$ で与えられる場合を考える。前問の結果を参考にして、 $E > 0$ でフォノンが観測されるために k_1 が満たすべき条件を求めよ。なお、ここでは、完全に等方的な固体を想定する。また、結晶における逆格子ベクトルについては考慮しなくてもよい。

III-7 (実験:データ解析) (100 点)

(1) 表面張力の作用により、液滴は振動数 ω で振動している。この液体の密度を ρ 、液体の表面張力を f 、液滴の直径を R とする。

(a) ω, ρ, f, R のそれぞれの次元を長さ [L]、質量 [M]、時間 [T] の基本次元を使って表せ。(ヒント：表面張力は単位面積あたりのエネルギー)

(b) ω, f, ρ, R の間には、 $\omega \propto f^A \rho^B R^C$ の関係がなり立つ。次元解析により A, B, C を求めよ。

(2) 毎分、平均で 2 個崩壊するとされている放射性同位元素の試料がある。これを確かめるために、1 分毎の崩壊数の測定を 40 回行ない表 1 の分布を得た。以下の問いに答えよ。

(a) 確率変数 X 、平均 μ のポアソン分布の確率分布関数 $P(X, \mu)$ は、

$$P(X, \mu) = \frac{\mu^X}{X!} e^{-\mu}$$

である。このときの分散 σ^2 を求めよ。その算出方法も書け。

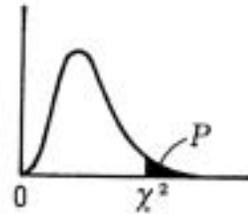
(b) 表 1 にある測定回数の分布はポアソン分布に従うものとする。上に述べた「平均毎分 2 個崩壊する」が正しいと仮定して、各崩壊数に対応する測定回数の期待値を求めよ。但し、 $e^{-2} = 0.14$ とする。

(c) この「平均毎分 2 個崩壊する」という仮定の正当性を χ^2 検定法で判定する。この場合の自由度を求めよ。また表 2 の χ^2 分布を用いてこの仮定を検定してみよ。

崩壊数	測定回数	期待値
0	11	
1	12	
2	11	
3	4	
4	2	
5 以上	0	

表 1

右側の面積が P になるような χ^2 の値



ϕ \ P	0.90	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	P \ ϕ
1	0.0158	0.102	0.455	1.323	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	1
2	0.211	0.575	1.386	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	2
3	0.584	1.213	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	3
4	1.064	1.923	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	4
5	1.610	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	5
6	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	6
7	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.3	7
8	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.53	20.1	22.0	8
9	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.7	23.6	9
10	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.5	23.2	25.2	10
11	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.9	24.7	26.8	11
12	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.0	23.3	26.2	28.3	12
13	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.4	24.7	27.7	29.8	13
14	7.79	10.17	13.34	17.12	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	14
15	8.55	11.04	14.34	18.25	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	15
16	9.31	11.91	15.34	19.37	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	16
17	10.09	12.79	16.34	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	17
18	10.86	13.68	17.34	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	18
19	11.65	14.56	18.34	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	19
20	12.44	15.45	19.34	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	20
21	13.24	16.34	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	21
22	14.04	17.24	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	22
23	14.85	18.14	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	23
24	15.66	19.04	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	24
25	16.47	19.94	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	25
26	17.29	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	26
27	18.11	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	27
28	18.94	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	28
29	19.77	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	29
30	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	30
40	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	40
50	37.7	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	50
60	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	60
70	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2	70
80	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3	80
90	73.3	80.6	89.3	98.6	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	90
100	82.4	90.1	99.3	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	100

表2 χ^2 分布: ϕ は自由度。
(日科技連出版 大村平著 「統計のはなし」より転写)

III-8 (天文学：制動放射) (100点)

完全電離した水素ガスからの連続光放射について考える。電離ガス中の自由電子が陽子の近くを通過していく際に、加速を受けて双極子放射を出す。このガスが単位体積、単位時間、単位周波数当りにどれだけの放射を出すかを考えよう。

まず、一つの自由電子 (電荷 $-e$ 、質量 m) が、衝突パラメータ b 、無限遠方での速度 v で陽子に接近し、その軌道をわずかに直線からまげながら通過していく場合を考える。この場合、双極子放射のスペクトル、すなわち単位周波数当りの放射エネルギー $(dW/d\nu)$ は、

$$\frac{dW}{d\nu} = \frac{4\pi e^2}{3\epsilon_0 c^3} |\hat{\mathbf{r}}(\omega)|^2 \quad (\text{A})$$

で与えられる。ただし、 ν は周波数で、 $\omega = 2\pi\nu$ であり、 ϵ_0 は真空の誘電率、 c は光速、 \mathbf{r} は電子の陽子に対する相対位置ベクトルで、 $\ddot{\mathbf{r}}$ はその時間2階微分を示している。また、 $\hat{\mathbf{r}}(\omega)$ は、 $\ddot{\mathbf{r}}$ のフーリエ変換である。衝突時間 τ を $\tau = b/v$ とすると、 $\hat{\mathbf{r}}(\omega)$ は次式で近似される。

$$\hat{\mathbf{r}}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\mathbf{r}} dt & \omega \ll \tau^{-1} \\ 0 & \omega \gg \tau^{-1} \end{cases} \quad (\text{B})$$

- (1) $dW/d\nu$ を $\omega \gg \tau^{-1}$ と $\omega \ll \tau^{-1}$ の場合に分けて求めよ。但し、式 (B) を積分する際には、電子の運動は直線で近似してよく、その軌道の垂直方向に働く加速度だけ考慮すればよい。
- (2) 電子の速度を v として (陽子は静止しているとする)、衝突パラメータが b と $b+db$ の間での、単位時間、単位体積当りの電子と陽子の衝突数を求めよ。電子と陽子の密度はそれぞれ n_e 、 n_p とし、電子の軌道は直線で近似してよい。

以下では、 $\omega \ll \tau^{-1}$ だけを考える。 b を b_{\min} から b_{\max} まで積分することによって、単位周波数、単位体積、単位時間当りの放射エネルギー $d^3W/d\nu dV dt$ を求め、次に、電子の速度分布でこの結果を平均化する。温度 T の電子の速度分布をマクスウェル分布として平均化すると、

$$\frac{d^3W}{d\nu dV dt} = \frac{e^6}{6\pi^2 \epsilon_0^3 m c^3} \sqrt{\frac{2\pi}{3mkT}} n_e n_p e^{-h\nu/kT} \overline{g_{ff}} \quad (\text{C})$$

が得られる。ここに、 k はボルツマン定数、 h はプランク定数で、 $\overline{g_{ff}}$ は定数である。速度平均をとった $d^3W/d\nu dV dt$ は、 α_ν を吸収係数とし、黒体放射を

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (\text{D})$$

として、 $4\pi\alpha_\nu B_\nu$ と書くことができる。

- (3) $h\nu \ll kT$ の場合に、 $\exp(-h\nu/kT)$ を $h\nu/kT$ の 1 次の項までとって、吸収係数を求めよ。

完全電離水素ガスの視線方向の厚みを L とすると、光学的厚み τ_ν は近似的に

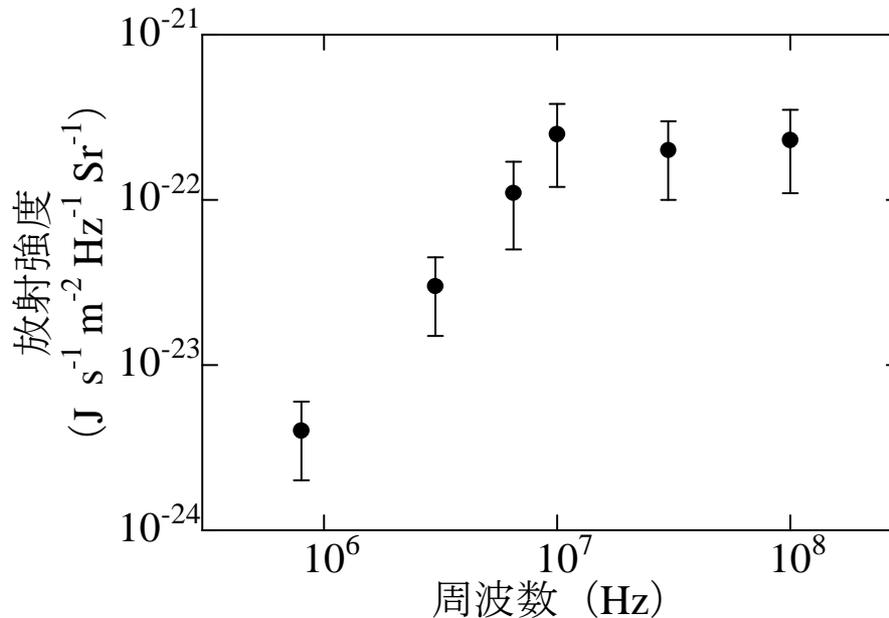
$$\tau_\nu = \alpha_\nu L = 1.6 \times 10^{-11} \left(\frac{n_e}{1 \text{ m}^{-3}} \right) \left(\frac{n_p}{1 \text{ m}^{-3}} \right) \left(\frac{L}{1 \text{ m}} \right) \left(\frac{T}{1 \text{ K}} \right)^{-3/2} \left(\frac{\nu}{1 \text{ Hz}} \right)^{-2} \quad (\text{E})$$

と書ける。また、これから、電波領域で観測されるこのガスの放射強度 I_ν は、次式で与えられる。

$$I_\nu = \frac{2k\nu^2}{c^2} T (1 - e^{-\tau_\nu}) = 3.1 \times 10^{-40} \left(\frac{\nu}{1 \text{ Hz}} \right)^2 \left(\frac{T}{1 \text{ K}} \right) (1 - e^{-\tau_\nu})$$

($\text{J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \text{ Sr}^{-1}$) (F)

- (4) $\tau_\nu = 1$ となる ν を ν_c とする。 ν が ν_c より十分大きな場合と十分小さい場合について、それぞれ放射強度の ν 依存性を調べよ。また、得られた結果の物理的な解釈を述べよ。
- (5) 視線方向の長さが $3 \times 10^{16} \text{ m}$ で温度 10^4 K の完全電離水素ガスからの電波放射強度を測定したところ、図のような結果が得られた。この結果から、この電離ガスの電子密度を推定せよ。



III-9 (天文学：恒星) (100点)

恒星の大気を、電磁波が出てくる層と定義しよう。ある波長の電磁波に注目したとき、放射と吸収という、物質との相互作用が十分に起これば、その波長での黒体放射が実現する。太陽よりもやや低温で大気の温度 T が 5.0×10^3 K の恒星は、可視光の波長域 ($\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m 付近) 全体にわたってそのスペクトルを $T = 5.0 \times 10^3$ K の黒体放射と粗く近似することができる。

しかし、恒星の主成分である水素のエネルギー準位を考えると、なぜ黒体放射で近似できるのか不思議でもある。どうして輝線でなく連続スペクトル (continuum) として出てくるのだろうか、以下に考察しよう。光速度を $c = 3.0 \times 10^8$ m/s、プランク定数を $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J·s、ボルツマン定数を $k = 1.4 \times 10^{-23}$ J/K、素電荷を $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C とせよ。また、エネルギー $\chi = \chi_0$ eV に対して $T = T_0$ K なら $\log_{10}(e^{-\chi/kT}) = -5.0 \times 10^3 \chi_0/T_0$ となることを使ってよい。

- (1) 水素のイオン化エネルギーは 13.6 eV である。主量子数 $n = 2$ と $n = 3$ の準位が $n = 1$ の準位から 10.2 eV、12.1 eV 上にあることを示せ。
- (2) 今、水素原子だけを考える。恒星の大気と光との相互作用で $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m 付近の連続スペクトルを放射したり吸収したりする場合には、 $n = 3$ とそれより上の準位にある水素原子が重要だと考えられる。なぜか、簡潔に説明せよ。
- (3) $T = 5.0 \times 10^3$ K の熱平衡で、水素の $n = 3$ の準位には、基底準位に比べておよそ 10 の何乗倍だけ分布しているか。
- (4) 次に、ボルツマンの原理を水素原子と水素陽イオン H^+ に適用する。水素原子が基底準位にある場合の数を N とし、水素陽イオンがあって自由電子が速さの範囲 $(v, v + dv)$ にある場合の数を dN^+ とすると、

$$\frac{dN^+}{N} = \frac{2g^+}{g} \frac{4\pi m_e^3 v^2 dv}{N_e h^3} \exp\left(-\frac{\chi + m_e v^2/2}{kT}\right) \quad (\text{A})$$

となることを示せ。ここで、 g と g^+ はそれぞれ水素原子と水素陽イオンの統計重率、 N_e は電子の密度、 χ は水素のイオン化エネルギー、 m_e と v は電子の質量と速さである。

上式を、速さに関して積分すると、水素原子と水素陽イオンの個数比として

$$\frac{N^+}{N} = \frac{2g^+}{g} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{N_e h^3} e^{-\chi/kT} \quad (\text{B})$$

が得られる。この式で $\chi = 13.6$ eV、 $T = 5.0 \times 10^3$ K とし、 $g^+/g = 1/2$ 、恒星大気の電子の密度を代入して計算すると、およそ 10^{-6} の比となる。

- (5) 恒星大気には電子を2個持った陽子、水素陰イオン H^- も存在する。水素陰イオンから1個の電子を無限遠に引き離すのに必要なエネルギーは 0.7 eV である。(B) と同様の計算を水素陰イオン H^- に対して行ない、水素原子に対する個数比を求めよ。なお、水素陰イオンに対して電子状態を考えた統計重率 g^- は1である。
- (6) 水素原子の $n = 3$ の準位にあるものと水素陰イオンとの個数比から、 $T = 5.0 \times 10^3 \text{ K}$ の大気を持つ恒星の可視光の連続スペクトルの成因について述べよ。