

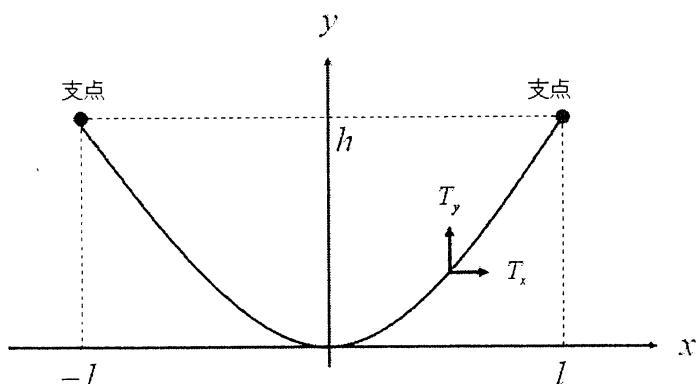
平成17年度大学院入学試験問題 I (3時間)

注意

- (1) 問題 I-1,I-2,I-3 の解答はそれぞれ別の用紙1枚に記入せよ（裏面を用いてよい）。
- (2) 各解答用紙ごとに、指定の位置に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。

I-1 (力学) (100点)

長さが $2L$ で一定で、任意の張力に対しても伸び縮みしないひもを、両端を持って支えたときの重力に対する安定形状を考える。ひもの線密度を ρ とし、水平方向の座標を x 、上向き縦方向への座標を y とし、ひもの形状は $y(x)$ で与えられるとする。 $y(x)$ の一階、二階の微分をそれぞれ y, \dot{y} とする。重力加速度は g とする。図の黒丸は手で支える支点を表す。



- (1) ひもの x, y 方向の張力をそれぞれ T_x, T_y とする。 $y(x), T_y(x)$ という二つの未知の関数について、ひも上のある一点 (x, y) でのひも素片の傾きと力の釣り合いから二つの微分方程式を立てよ。ただし、 $x = 0$ を中心にひもは左右対称であるとし、 $x \geq 0, \dot{y} \geq 0$ の領域で考えよ。
- (2) 上で求めた連立方程式を解いて、 $y(x), T_y(x)$ の一般解を求めよ。 (ρ, g, T_x) と積分定数を含む形で表すこと。)

ヒント:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad (\text{A})$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (\text{B})$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad (\text{C})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arcsinh} x. \quad (\text{D})$$

- (3) ひもの両端の高さが同じで、その間の水平方向の距離が $2l$ だったとしよう。この時の T_x と、ひもの真ん中の最低点とひもの両端の高さの差 h を、 ρ, g, L, l のみで書かれた形で求めよ。ただし、 $\sinh x/x = A$ ($A > 1, x > 0$) の解を $x = f(A)$ と表記すること。

次に、同じ問題を変分原理の考え方で解いてみよう。

- (4) 単位質量の質点に対する重力場のポテンシャルが、質点の座標 y のみの関数として一般的に $\phi(y)$ と書けるとしよう。任意のひもの形状 $y(x), x_1 \leq x \leq x_2$ に対して、ひもの全重力ポテンシャルエネルギー $U[y(x), \dot{y}(x)]$ と、ひもの長さ $L[y(x), \dot{y}(x)]$ を x に関する積分の形で表せ。
- (5) 安定な形状は、ひもの長さ L が一定という条件のもとで、重力ポテンシャルエネルギーが最小になるという条件で求めることができる。これは、変分 δL がゼロになるように制限を課した任意の微小変分 $\delta y(x)$ に対し、変分 δU がゼロになるということと等価である。これを解くためには、ラグランジュの未定乗数 λ を用いて、

$$S \equiv U - \lambda L \equiv \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(y, \dot{y}) dx \quad (\text{E})$$

が最小になるような解を求めれば良い。ここで、 S を作用、 \mathcal{L} をラグランジアンに見立てれば、 \mathcal{L} には x が陽に含まれないことから、エネルギー積分

$$\frac{d\mathcal{L}(y, \dot{y})}{d\dot{y}} \dot{y} - \mathcal{L} = \text{const.} \quad (\text{F})$$

が成り立つ。これを用いて $y(x)$ に関する方程式を求めよ。特に、 $\phi = gy$ の場合、(2) で求めた解が実際にここで求めた方程式を満たすことを示せ。(2) が解けなかった者はここで得られた方程式を解いて解を導いても良い。

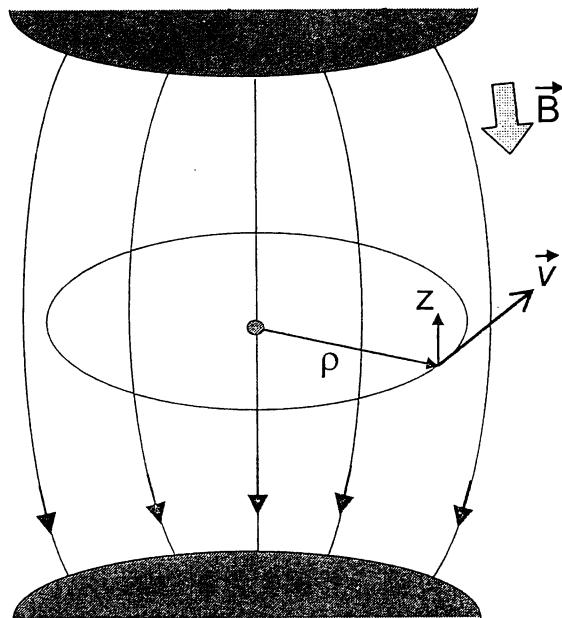
- (6) ここで求めた、垂直な重力場に対して安定な曲線はカテナリー曲線として知られているが、この曲線は、 $y_1 \leq 0, y_2 \leq 0$ であるような始点 (x_1, y_1) 、終点 (x_2, y_2) 及びその間の曲線の長さが固定された条件下で、曲線を x 軸の回りに回転してできる曲面の表面積が最大になっていることが知られている。この理由を説明せよ。

I-2 (電磁気学) (100 点)

磁場 \vec{B} 中を速度 \vec{v} で運動する荷電粒子を考える。

- (1) ローレンツ力による仕事では、粒子のエネルギー、従って軌道に沿った粒子の速さ v は変化しないことを示せ。

以下では、下図のように鏡像対称な上下 2 つの磁極で作られる軸対称な下向きの磁場（円筒座標では $\vec{B} = (B_\rho(\rho, z), 0, B_z(\rho, z))$ ）の中での正電荷 qe を有する荷電粒子の運動を考える。鏡像対称面 ($z = 0$) では磁場 \vec{B} はこの面に垂直であり、 ρ のみの関数となる。



- (2) 相対論的運動方程式は運動量 $\vec{p} = m_0\gamma\vec{v}$ を用いて $\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}$ で記述できる。ここで、 m_0 は荷電粒子の静止質量、 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ はローレンツファクター、 \vec{F} は作用する外力である。鏡像対称面上で対称軸を中心とする円運動を考えるとき、ローレンツ力が動径方向の向心加速度を与えることから
- $$m_0\gamma\frac{v^2}{\rho} + qevB_z(\rho, 0) = 0 \quad (\text{A})$$
- が成り立つことを示せ。

式 (A) から円軌道の半径は $\rho_0 = -\frac{m_0\gamma v}{qeB_z(\rho_0, 0)}$ となることが判る。

次に、速さ v を同一に保ったまま、この鏡像対称面内の半径 ρ_0 の円軌道から動径方向に微小な距離 x だけ離れた位置 $(\rho_0 + x)$ に変位した粒子の運動について考える。

(3) 静止系に於ける加速度の動径方向の成分が $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{v^2}{\rho_0 + x}$ で与えられることを用いて、動径方向の運動方程式を導け。

(4) 粒子の軌道に沿った進行方向の距離を s とするとき、(1)で証明したように速さ v は一定であるから、 $vdt = ds$ と記述できることを用いて、独立変数を t から s に変換して、

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{1-n}{\rho_0^2}x = 0 \quad (\text{B})$$

が成り立つことを示せ。但し、 $n = -\frac{\rho_0}{B_z} \frac{dB_z}{dx}$ とする。また、 x が微小量であることから、 $\frac{x}{\rho_0}$ の2次以上の項は無視できると考えてよい。

さらに、速さ v を同一に保ったまま、鏡像対称面上の半径 ρ_0 の円軌道から垂直方向に微小な距離 z だけ変位した粒子の運動を考える。

(5) 軸方向 (z 方向) の運動方程式を求めるこことにより

$$\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{n}{\rho_0^2}z = 0 \quad (\text{C})$$

が成り立つことを示せ。微小量 z の2次以上の項は(4)と同様に無視できるものとする。

(6) 荷電粒子の運動が鏡像対称面上の円軌道から少しずれた場合、そのずれが水平、垂直両方向ともに増大せず、有限の範囲内に収まるための n に対する条件を求めよ。

I-3 (量子力学) (100 点)

量子力学に関する次の文章の□に入るべき式や文章と、{}の中で選ぶべきものの記号を答えよ。理由も簡単に述べよ。

- (1) デルタ関数ポテンシャル $V(x) = c\delta(x)$ のもとで運動している1次元粒子を考える。束縛状態の個数は $c > 0$ のときは、(1) 個であるが、 $c < 0$ のときは、(口) 個である。また、ポテンシャルが $V(x) = c\delta(x - a) + c\delta(x + a)$ のような2つのデルタ関数の和からなる偶関数のとき、束縛状態が存在する条件は、(ハ) であり、束縛状態のうち、パリティが偶のものの個数は(ニ)、奇のものの個数は(ホ) である。ここで、パリティとは x を $-x$ に写す変換のことである。
- (2) z 軸に平行な磁場の中にある粒子の $x-y$ 面内の運動を考える。磁場の大きさを B 、粒子の質量を m 、電荷を e とする。サイクロトロン運動の角振動数は、 $\omega = \boxed{(1)}$ であたえられ、エネルギー準位は(口){(a) $E_n = -\frac{C}{n^2}$, ($n = 1, 2, \dots$)}, (b) $E_n = C \times (n + \frac{1}{2})$, ($n = 0, 1, 2, \dots$), (c) $E_n = C \times n^2$, ($n = 0, 1, 2, \dots$)} であたえられる。ここで、 C は ω と Planck 定数 \hbar を使って、 $C = \boxed{(ハ)}$ と書ける。また、各準位に含まれる状態の数は、系の $x-y$ 方向の面積の(ニ) 乗に比例し、磁場の大きさの(ホ) 乗に比例する。
- (3) 3次元空間の原点付近に局在している球対称ポテンシャル $V(r)$ によるスピンのない粒子の散乱を考える。局在しているとは、遠方 $r \rightarrow \infty$ で $V(r)$ が速やかにゼロに近づくことである。3次元空間の波を角運動量の大きさが定まった球面波に分解して考えると、各成分には、 $V(r)$ に加えて、遠心ポテンシャルが働く。角運動量の演算子を \vec{L} とすると、 \vec{L}^2 の固有値は(1){(a) $-\frac{b}{l^2}$, (b) $b \times (l + \frac{1}{2})$, (c) $b \times l(l + 1)$ } と書ける。ここで、 $l = 0, 1, 2, \dots$ であり、 b は Planck 定数 \hbar を使ってあらわすと、(口) である。各成分に働く遠心ポテンシャルは \vec{L}^2 の固有値に比例し、 r の(ハ) 乗に比例するから、遠心力バリアーによってポテンシャル $V(r)$ が遮蔽される効果は、(ニ){(a) l が大きいほど大きい, (b) l が大きいほど小さい, (c) l が中くらいのとき最も大きい}といえる。よって、入射粒子のエネルギーが低いときは、散乱は(ホ){(a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$ 以上}の部分波によって起こっているとしてよい。
- (4) 粒子のスピンと統計性の間には、密接な関係があることが知られている。実際、スピンが(1)の粒子はフェルミオンであり、そうでないスピンをもつ粒子はボソンである。また、 n_F 個のフェルミオンと、 n_B 個の粒子からなる複合粒子の統計性は、(口) が偶数であるか奇数であるかに応じて、ボソンであ

るかフェルミオンであるかがきまる。例えば、 ${}^3\text{He}$ 原子は、原子核が 2 個の陽子と 1 個の中性子からなり、そのまわりを 2 個の電子がまわっているから、フェルミオンであるのに対し、 ${}^4\text{He}$ 原子核は、 ${}^3\text{He}$ 原子核に比べて、(ハ) が 1 つ多いため、 ${}^4\text{He}$ 原子はボソンである。また、 ${}^3\text{He}$ 原子と ${}^4\text{He}$ 原子のスピンは、それぞれ、(ニ) である。そのため、凝縮系の低温での振舞いは大きく異なっている。 ${}^4\text{He}$ が 2K 程度で超流動性を示すのに対し、 ${}^3\text{He}$ の超流動は Cooper 対を作る必要があるため、(ホ){(a) 決して起きない, (b) ずっと高い温度で起きる, (c) ずっと低い温度で起きる} ことが知られている。

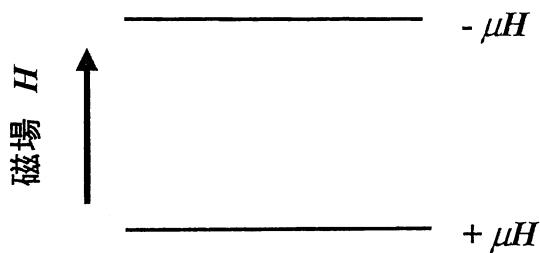
平成17年度大学院入学試験問題 II (3時間30分)

注意

- (1) 問題II-1、II-2、II-3の解答はそれぞれ別の用紙1枚に記入せよ（裏面を用いてもよい）。
- (2) 各解答用紙ごとに、指定の位置に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。

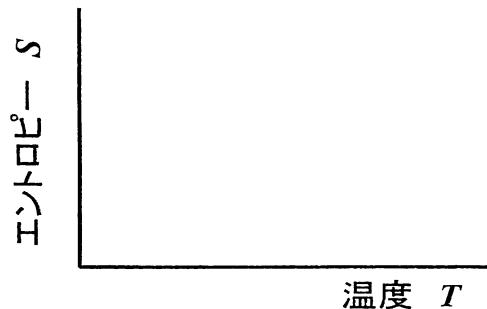
II-1(熱統計力学) (100点)

$1/2$ のスピンを持つ粒子からなる系について考える。個々の粒子は磁気モーメント μ を持つとする。この粒子が外部磁場 H の中に置かれると Zeeman 効果により、エネルギー準位は、 $-\mu H$ 、 $+\mu H$ の2つに分裂する。このような粒子 N 個からなる系が一様な磁場 H の中に置かれ、温度 T に保たれている。またこの系はカノニカル分布によって扱えるものとする。以下ボルツマン定数 k_B とする。ただし磁気モーメント間の相互作用は無視してよいものとする。



- (1) この系のヘルムホルツの自由エネルギー F 、エントロピー S を求めよ。またエントロピー S に対して以下の2つの極限について値を求めよ。
 - (a) 高温極限 (2準位が縮退しているとみなせる場合)。
 - (b) 低温極限 ($\mu H \gg k_B T$ とみなせる場合)。また低温極限の漸近式を求めよ。

上で求めた極限での振る舞いを考慮し、エントロピー S の温度依存性を下記の座標軸を用いて図示せよ。(各自、座標軸を解答用紙に書くこと。)



- (2) この系の磁気モーメント(磁化) M を求めよ。また $H/T \rightarrow 0$ の時 M はどのように表されるか。
- (3) また上で求めた磁気モーメントを利用して、比熱を求めよ。
- (4) 今、この系の磁化率(χ : M/H)が $\chi = C/T$ (C : 正の定数)と書き表せる状態にあるとする。温度を T_1 に保って磁場をゼロから $H = H_1$ まで等温的に変化させる。このときに発生する磁化熱、エントロピー S の変化を求めよ。簡単のため内部エネルギーの変化は無視できるものとする。
- (5) 次に断熱的に磁場を H_1 から H_2 ($H_1 \gg H_2 \sim 0$) に戻すとき温度はどのように変化するか。下記の座標軸でエントロピーの図を使って議論せよ。(各自、座標軸を解答用紙に書くこと。)



- (6) 上記のようなスピン $1/2$ の系の代表例として、電子スピンと陽子(プロトン)の核スピンがある。電子の磁気モーメントは $\mu_B = 9.27 \times 10^{-24}$ (J/T)、陽子(プロトン)の磁気モーメントは $\mu_N = 5.05 \times 10^{-27}$ (J/T) である。それぞれ $H = 10$ T、 $T = 2$ K のもとではどちらの方が強くスピン偏極を起こしているか。スピン偏極率, $P = (N_+ - N_-)/(N_+ + N_-)$ を用いておおよその値を評価し、議論せよ。 $(N_+, N_-$ は、 $+μ$, $-μ$ の状態の存在確率)。ただし $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ (J/K) である。

II-2(物理数学) (100点)

(1) 以下の常微分方程式の一般解を求めよ。

(ヒント：(b) の解は齊次方程式の一般解と非齊次方程式の特解の和)

$$(a) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \left(1 + \frac{dy}{dx} \right) = 0, \quad (b) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \cos x$$

(2) N 次元空間の半径 r の球の体積は、 $V_N = C_N r^N$ と書ける。以下のように 2 通りの方法で $\exp(-r^2)$ を全空間で積分し C_N を求めよ。

ただし、 $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2$ 、 $\Gamma(m) = \int_0^\infty dr e^{-r} r^{m-1}$ である。必要なら、 $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を用いよ。

$$i) I_N = \int_{\text{全空間}} e^{-(x_1^2 + \cdots + x_N^2)} dx_1 \cdots dx_N$$

$$ii) I_N = \int_{\text{全空間}} e^{-r^2} dV_N = \int_0^\infty e^{-r^2} N C_N r^{N-1} dr = C_N \Gamma \left(\frac{N}{2} + 1 \right)$$

(3) コーシーの積分公式¹を利用して $\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z} \right)^{2n} \frac{dz}{z}$ を求めよ。この結果を用いて次の公式を導け。

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = 2\pi \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}$$

(4) コーシー分布 $p(x; a) = \frac{C}{x^2 + a^2}$ ($x \in [-\infty, \infty]$ 、 a は正の定数) に対し次の間に答えよ。

(a) フーリエ変換 $\tilde{p}(k; a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(x; a) e^{ikx} dx$ を求めよ。
(ヒント：コーシーの積分公式¹を利用する。)

(b) 規格化定数 C 、平均、分散を求めよ。

(c) 確率変数 ζ が $p_2(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\zeta - x; a) p(x; a) dx$ に従うとき、 p_2 のフーリエ変換を求め、 $p_2(\zeta) = p(\zeta; 2a)$ となることを示せ。

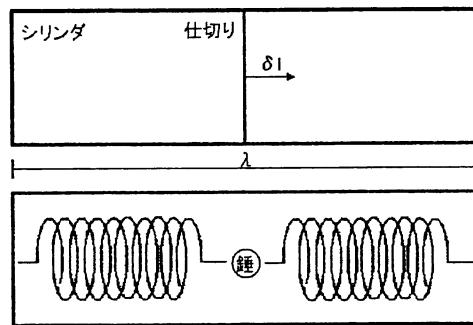
(d) それぞれが $p(x; a)$ に従う n 個の独立な確率変数の和 $\zeta_n = x_1 + \cdots + x_n$ の従う確率密度関数は、 $p_n(\zeta_n) = p(\zeta_n; na)$ と書けることを示せ。

¹ コーシーの積分公式： $\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$ 、点 a は経路 C の内部の点、 $f(z)$ はこの領域内で正則。更に、 $\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{(n+1)}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n f(z)}{dz^n}|_{z=a}$ ($n \geq 0$) が成り立つ。

II-3 (流体力学) (100 点)

気体中を音波が伝わるとき、熱エネルギーの損失を通して様々な構造形成の種が励起されることがある。本問では、バネの振動との対比から音波の復元力を理解した上で、種が生まれるメカニズムを考察しよう。

長さ λ 、断面積 S のシリンダの中央に厚さが無視できる重さ M の仕切りを置き(下図)、この仕切りが圧力差を復元力として振動することを確認する。シリンダと仕切りとの間の摩擦は無視する。仕切りをはさんで両側には同種の理想気体が同じ圧力(p_0)で断熱的に満たされている。以下、仕切りを跨いだ気体のやりとりはないものとする。また、気体は高温とし、仕切りが動いても仕切りのそれぞれの側で温度、密度、圧力は常に一様に保たれるものとする。



(1) 以下の文章の空欄 (イ) ~ (ホ) に入るべき式または言葉を答えよ。

仕切りが δl だけ右に移動し、仕切りの右の体積が V_r になったとする。移動前の体積を V_0 とすると S を用いて $\delta V = V_r - V_0 = \boxed{(イ)}$ である。このとき、(口)のために仕切りの右側の気体の圧力は増加し、(ハ)のために左側の圧力は減少している。左右での圧力変化を $\delta p_l \equiv p_l - p_0$ 及び $\delta p_r \equiv p_r - p_0$ と表す。圧力差による仕切りに働く力(F_p)は図の右向きを正として

$$F_p = -(\delta p_r - \delta p_l) S \quad (\text{A})$$

となる。 λ を用いて δp_r を求めると、

$$\delta p_r = -\frac{1}{\kappa_s} \frac{\delta V}{V_0} = \boxed{(二)} \delta l \quad (\text{B})$$

である。ここで、 κ_s は(口)率である。次に、バネ定数が K_s のバネによる力と比較してみる。鍤の両側の位置の変化を同じ様に δl とすると、フックの法則により、鍤に働く力(F_s)は

$$F_s = -K_s \delta l + K_s (-\delta l) \quad (\text{C})$$

である。式(A)の右辺第1項を $\delta p_r S = K_p \delta l$ とすると、 $K_p = \boxed{(ホ)}$ となり、仕切りの振動は圧力差を復元力とするバネの振動とみなせることがわかる。

これ以後、仕切りを取り除き、断面積 S の無限に長いシリンダを考える。シリンダの中には密度 ρ_0 の一様な気体が満たされている。このときにシリンダ軸方向に伝搬する波長 λ の平面波を考察しよう。平面波に伴う密度、速度、圧力の揺らぎをそれぞれ $\delta\rho$ 、 δv 、 δp とする。揺らぎ成分に対する流体力学の基礎方程式は、軸方向を x とすると次のように与えられる：

$$\text{質量保存式} : \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} = 0, \quad (\text{D})$$

$$\text{運動方程式} : \rho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial t} = - \frac{\partial \delta p}{\partial x}. \quad (\text{E})$$

- (2) 一様な気体の単位質量当りの体積 V_0 は $1/\rho_0$ である。一方、平面波が伝搬するときの単位質量当りの体積 $V_0 + \delta V$ は $1/\rho$ となる。 $\delta\rho$ は微小であるとし、 δV を $\delta\rho$ の 1 次まで考えて ρ_0 を用いて表せ。なお、 $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ である。
- (3) 波の伝播が断熱過程とみなせる場合、密度と圧力の揺らぎの関係は音速 c_s を用いて $\delta p = c_s^2 \delta\rho$ と表せるため基礎方程式系が δv と $\delta\rho$ の 2 变数で閉じている。従って、揺らぎの伝搬を陽に記述できる。このとき、単位質量当りの体積変化に対しても問(1)の考察が成り立つとして、 c_s を K_p を用いて表せ。
- (4) 音波の復元力である圧力勾配力を K_p と密度勾配を用いて表せ。

このように、音波はバネ定数 K_p を持つバネ振動と理解できる。最後に、密度の大きさに応じて熱エネルギーが散逸する場合を考える。このとき圧力揺らぎは

$$\delta p = c_s^2 \delta\rho - L(\rho, T) \quad (\text{F})$$

の様に、断熱の場合(右辺第1項)と熱エネルギーの散逸による圧力の減少(右辺第2項)の差として記述される。簡単のため $L(\rho, T)$ の温度依存性は密度の依存性に組み込まれるとし、 $L = C\rho^n$ の場合を考えよう。 C はある正定値とする。

- (5) 热エネルギーが散逸する場合、式(F)を用いると、運動方程式は

$$\rho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial t} = -c_s^2 \frac{\partial \delta\rho}{\partial x} + F(\rho_0) \frac{\partial \delta\rho}{\partial x} \quad (\text{G})$$

と書き下せる。 $\delta\rho$ は十分小さいとして、 $F(\rho_0)$ を求めよ。

- (6) $n = 1$ の場合を考える。この振動のバネ定数 K'_p を評価し、断熱の場合と比べて復元力が小さくなることを示せ。その物理的理由も述べよ。
- (7) $n < 0$ の場合を考える。このときのバネ定数 K''_p は K_p より大きくなるが、その物理的理由を述べよ。

この様に熱エネルギーが散逸しても音波の復元力が増大する場合がある。この結果、密度塊の形成が始まり、更に複雑な構造形成につながる。宇宙における星雲形成のメカニズムの一つとして考えられている過程である。

平成 17 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題 III-1、から III-9 まで 9 問ある。これから 3 問選択せよ。
 - (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の用紙一枚に記入せよ（裏面を用いてもよい）。
 - (3) 各解答用紙ごとに、指定の位置に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
-

III-1 力学：散乱問題

III-2 電磁気学：核磁気共鳴

III-3 量子力学：角運動量の合成

III-4 統計力学：量子統計

III-5 物理数学：微分方程式

III-6 実験学：半導体

III-7 実験学：荷電粒子の検出

III-8 天文学：輻射輸送

III-9 天文学：力学平衡

III-1 (力学 : 散乱) (100 点)

図1[実験室系] のように質量 m_1 で無限遠点で速度 v を持つ粒子 1 と質量 m_2 で静止した粒子 2 との散乱を考える。粒子 1 と 2 の間には中心力ポテンシャル $U(r) = \frac{k}{r}$ (r は粒子間距離。 $k > 0$) による力が働いている。粒子の速度は非相対論的範囲であると仮定する。

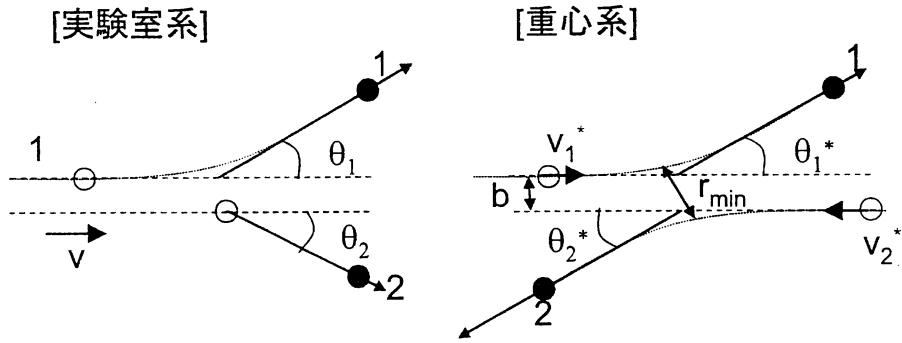


図 1: 左図は実験室系、右図は重心系での粒子 1 と粒子 2 の散乱の模式図である。白マルは散乱前無限遠点での粒子の位置、黒マルは散乱後無限遠点での粒子の位置を示している。座標は粒子 1 の進行方向を正にとる。 θ_1 、 θ_2 は粒子 1 の進行方向に対する実験室系での粒子 1 と粒子 2 の散乱角で、 θ_1^* 、 θ_2^* は重心系での粒子 1、粒子 2 の散乱角である。 b は衝突係数、 r_{min} は粒子 1 と粒子 2 の最近接距離とする。

- (1) 重心系での粒子 1 の速度 v_1^* と粒子 2 の速度 v_2^* を m_1 、 m_2 、 v を使って表せ。
- (2) 重心系での粒子 1 の散乱角 θ_1^* と実験室系での粒子 1 の散乱角 θ_1 の間に次の関係式が成り立つことを示せ。

$$\tan \theta_1 = \frac{m_2 \sin \theta_1^*}{m_1 + m_2 \cos \theta_1^*} \quad (\text{A})$$

- (3) 換算質量を $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ 、重心系での衝突係数を図 1[重心系] のように b としたとき、重心系での散乱角 θ_1^* は

$$\theta_1^* = \pi - 2 \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{b}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - b^2/r^2 - 2k/(\mu v^2 r)}} \quad (\text{B})$$

となることを示せ。ここで r は粒子間距離で r_{min} は r の最小値である。

- (4) 式 (B) より重心系での微分散乱断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{\text{重心系}} = \left(\frac{k}{2\mu v^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta_1^*}{2}} \quad (\text{C})$$

を導くことができる。ここで微小立体角は $d\Omega|_{\text{重心系}} \equiv \sin \theta_1^* d\theta_1^* d\phi_1^*$ と定義され、 ϕ_1^* は粒子 1 の無限遠からの進行方向を軸とした方位角 ($0 \leq \phi \leq 2\pi$) である。式 (C) をもとに $m_1 = m_2 (\equiv m)$ の場合の実験室系での微分散乱断面積が

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{\text{実験室系}} = \left(\frac{2k}{mv^2}\right)^2 \frac{\cos \theta_1}{\sin^4 \theta_1} \quad (\text{D})$$

となることを示しなさい。

- (5) 散乱後の粒子 2 の実験室系での運動エネルギーを m, v, θ_1 の関数として求めよ。この際に $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ の関係が成り立つことを使ってよい。
- (6) 粒子 2 の運動エネルギーが $\frac{1}{4}mv^2$ 以上になる場合の全断面積を求めよ。
- (7) これまで展開してきた計算をもとに、速度 v で宇宙に漂う未発見の質量 m の素粒子を原子核との散乱を使って検出する方法を考える。ここで簡単のためにこの未知の素粒子の質量と原子核の質量は同じとする。未知の素粒子の速度は原子核に対し、地球の公転の影響で夏に速度 $1.1v$ 、冬に速度 $0.9v$ になるとする。原子核の運動エネルギーが $\frac{1}{4}mv^2$ を超えた時に暗黒物質が検出できるとして、夏と冬での検出数の比を有効数字 2 桁で求めよ。参考までに、この検出率の季節変化を信号として暗黒物質の候補である未発見の素粒子を探索する手法がある。

III-2(電磁気：核磁気共鳴) (100点)

- (1) 図1に示すような無限に長い直線電流 I からの垂直距離 a の点に生ずる磁場の強さ H を表せ。
- (2) 図2のように、半径 a の円周を電流 I が流れるとき、中心軸上の円中心から x の距離の点Pに生ずる磁場の強さ H を求めよ。

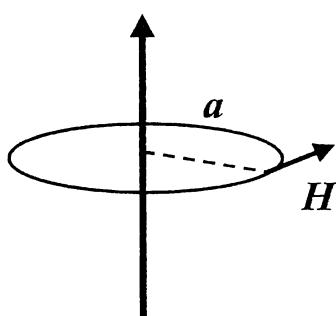


図1

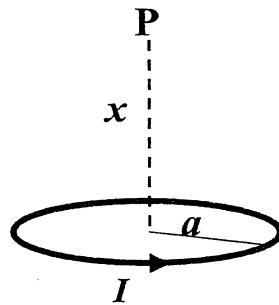
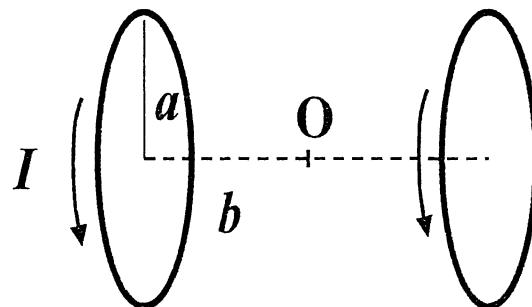


図2

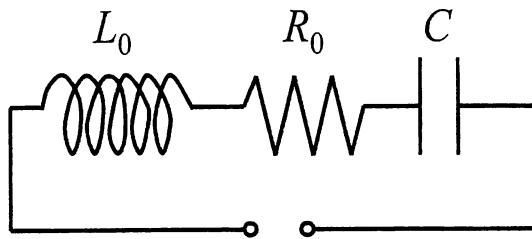
- (3) 上記の半径 a の等しい2つの円形コイルの中心軸を共通にして $2b$ の間隔で対置し、両コイルに同じ向きに同じ強さの電流を流す。中心軸上二つのコイルの中点Oの付近で中心軸に沿ってわずかに場所が変わってもなるべく磁場が一様であるようにするには、コイルの間隔 $2b$ と半径 a には $a = 2b$ の関係が必要である。これを示せ。



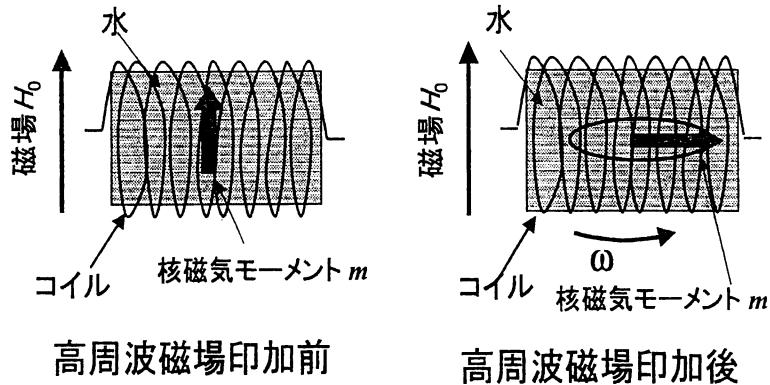
上記のような均一な磁場中で、プロトン(水素の原子核：核スピン $I = 1/2$)の核磁気共鳴(NMR)の実験を行うことを考える。NMRは磁場下で誘起されたプロトンの核磁気モーメントがコイル内で歳差運動をすることによって、コイルに誘起される電圧を測定する実験である。以下の設問を答えよ。

- (4) NMR実験では、コイルとコンデンサーからなる共鳴回路を用いる。今コイル(インダクタンス L_0 、抵抗 R_0)とコンデンサー(容量 C)が下図に示すように、直列につながれている。このときの角周波数 ω での合成インピーダン

ス $Z(\omega)$ 、共振周波数 ω_0 、共振の幅 $Q \equiv \omega_0/\Delta\omega$ (ただし $\Delta\omega$ は電流の最大値 I_{\max} に対し $I_{\max}/\sqrt{2}$ となるときの ω の幅) をそれぞれ求めよ。



- (5) 前問の共振回路を用いて NMR 実験を行う。磁場の不均一は無視できる微小なコイル(断面積:A、長さ:l、巻数:n)を磁場の中心に持っていく。コイルの軸は x 方向を向いており、均一な静磁場 H_0 は z 方向にかかっているものとする。コイルの中を水で満たし、水のプロトンの核磁気モーメントは熱平衡状態にあるものとする。 H_0 によって作られたコイル中のプロトンの核磁気モーメント m を単位体積あたりの核の静磁化率 χ_0 を用いて表せ。コイル内の核磁気モーメント m は、コイルに高周波磁場を加えることにより向きを変えることが出来る。今核磁気モーメント m が z 軸方向から 90 度向きを変え、 $x-y$ 平面に来るような条件の高周波磁場を加える。その後 m は $x-y$ 平面内で歳差運動(角周波数 ω)を行う。このときコイルに誘導される電圧 V_0 を求めよ。ただし核磁気モーメントの大きさ m は上記の過程で変化しないものとする。



- (6) 核磁化により、問(4)にある直列共振回路のコイルに誘起される電圧を $V_0 \exp(i\omega t)$ とする。このときコンデンサーの両端の電圧 V_c を求めよ。また歳差運動の角周波数 ω が回路の共振周波数 ω_0 と同じとき、 V_c を回路の共振の幅 Q を用いて表せ。
- (7) 実験室等では磁場は、実際どのような方法で測定されるか。そのとき用いられる物理現象に基づいて説明せよ。

III-3 (量子力学：角運動量の合成) (100 点)

以下では角運動量やスピンの演算子は Planck 定数 \hbar で割って、無次元量としてあつかうこととする。

(1) 大きさがそれぞれ j_1 と j_2 である角運動量 $\hat{\mathbf{j}}_1, \hat{\mathbf{j}}_2$ をもつ 2 つの系がある。

- (a) 合成角運動量 $\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}_1 + \hat{\mathbf{j}}_2$ はどのような大きさをとるか。結果だけ答えよ。
- (b) $c_1\hat{\mathbf{j}}_1 + c_2\hat{\mathbf{j}}_2$ であたえられる物理量を考える。合成角運動量の大きさが確定値 j をとるような空間上での行列要素を考えると、それはベクトルとして $\hat{\mathbf{j}}$ に平行である、すなわち、等式 $c_1\hat{\mathbf{j}}_1 + c_2\hat{\mathbf{j}}_2 = c^{(j)}\hat{\mathbf{j}}$ がなりたつとしてよい。ここで、係数 $c^{(j)}$ は j に依存して決まるが、

$$c^{(j)} = \frac{1}{2}(c_1 + c_2) + \frac{1}{2}(c_1 - c_2) \frac{j_1(j_1 + 1) - j_2(j_2 + 1)}{j(j + 1)}$$

であたえられることを示せ。(ヒント：上の等式の両辺と $\hat{\mathbf{j}}$ の内積をとり、 $2\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2 = \hat{\mathbf{j}}^2 - \hat{\mathbf{j}}_1^2 - \hat{\mathbf{j}}_2^2$ を使え。)

(2) スピンをもつ粒子は磁気能率をもっている。磁気能率の演算子 $\hat{\mu}$ はスピンの演算子 $\hat{\mathbf{s}}$ に比例しており、 $\hat{\mu} = \frac{\mu}{s}\hat{\mathbf{s}}$ であたえられる。ここで、 s はスピンの大きさであり、 μ は磁気能率の大きさである。一般に、スピン $1/2$ の粒子が Dirac 方程式に従う点粒子であるとすると、磁気能率の大きさは、質量 m と電荷 q をつかって $\mu = \frac{q\hbar}{2m}$ であたえられる。ところが、陽子の磁気能率は、陽子の電荷 e と質量 m_p からこの公式によって素朴に得られる値（これを核磁子とよぶ。） $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$ から大きくずれている。実際、陽子の磁気能率の測定値は、 $\mu_p = \mu_N \times (2.793..)$ である。また、中性子は電荷を持たないため、Dirac 方程式から素朴に得られる磁気能率の値はゼロであるが、測定値は、 $\mu_p = \mu_N \times (-1.913..)$ である。以下に見るように、陽子や中性子が点粒子ではなく、3 つのクォークからできているものとすると、これらの値を説明することができる。

- (a) u-クォークと d-クォークの電荷はそれぞれ、 $\frac{2e}{3}$ と $-\frac{e}{3}$ である。クォークの質量は u-クォークも d-クォークも陽子の質量 m_p の $1/3$ であるとし、クォークは Dirac 方程式にしたがう点粒子であるとする。上の公式を使うと、u-クォークと d-クォークの磁気能率はそれぞれ、 $\mu_u = 2\mu_N$, $\mu_d = -\mu_N$ となることを示せ。
- (b) 陽子は 2 つの u-クォークと 1 つの d-クォークからなっているが、3 つのクォークはどれも s 軌道に入っているとしてよい。3 つのクォークのスピン演算子を $\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_2, \hat{\mathbf{s}}_3$ とすると、陽子のスピンの演算子は $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2 + \hat{\mathbf{s}}_3$

で、磁気能率の演算子は $\hat{\mu} = 2\mu_u \hat{s}_1 + 2\mu_u \hat{s}_2 + 2\mu_d \hat{s}_3$ であたえられることを示せ。ただし、1番目と2番目はu-クォークであり、3番目がd-クォークとする。この2つの演算子を $\hat{\mu} = 2\mu \hat{s}$ と書いたときの比例係数 μ が陽子の磁気能率の大きさである。

- (3) 陽子の中で、3つのクォークの角運動量がどのように合成されているかを調べるために、陽子の波動関数を考える。クォークはスピン1/2のフェルミオンであるが、座標およびスピンの自由度のほかにカラーの自由度をもっている。3つのクォークの座標、スピン、カラーをそれぞれ、 $r_1, \alpha_1, i_1, r_2, \alpha_2, i_2, r_3, \alpha_3, i_3$ とすると、波動関数は $\psi_{\text{陽子}}(r_1, \alpha_1, i_1; r_2, \alpha_2, i_2; r_3, \alpha_3, i_3)$ のように書ける。ここで、はじめの2組はu-クォークの変数であり、3組目がd-クォークの変数である。また、カラーの自由度をあらわす変数 i_1, i_2, i_3 は1,2,3のいずれかの値をとるが、波動関数は完全反対称テンソル ϵ_{i_1, i_2, i_3} に比例することがわかっている。さらに簡単のため、陽子の中では3つのクォークはどれも同じs軌道 $\phi_0(r)$ に入っているとすると、 $\psi_{\text{陽子}} = \epsilon_{i_1, i_2, i_3} \chi_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \phi_0(r_1) \phi_0(r_2) \phi_0(r_3)$ と書ける。ここで、 $\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$ は波動関数のスピン部分である。
- (a) クォークがフェルミオンであることから $\chi_{\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3} = \chi_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$ が導かれることを示せ。
 - (b) 2つのu-クォークの合成スピンは1であることを示せ。
 - (c) さらにd-クォークも考えると、この系の全角運動量はどのような値をとりうるか。このうちで特に全角運動量が1/2のものが陽子である。
- (4) 以上の議論から、陽子の中では、2つのu-クォークの合成スピンは1であり、その合成系と、d-クォークのスピン1/2が合成されて陽子のスピン1/2になっていることがわかった。よって、まず、2つのu-クォークに対して(1)の結果を適用して、 $\hat{\mu}_{uu} = 2\mu_u \hat{s}_1 + 2\mu_u \hat{s}_2$ を2つのu-クォークの合成スピン $\hat{s}_{uu} = \hat{s}_1 + \hat{s}_2$ に比例するものとしてあらわし、次にその合成系とd-クォークに対してもう一度(1)の結果を適用することにより、陽子の磁気能率の大きさを求めることができる。
- (a) $j_1 = j_2 = 1/2, j = 1, c_1 = c_2 = 2\mu_u = 4\mu_N$ として、(1)の結果を使うことにより、 $\hat{\mu}_{uu} = 4\mu_N \hat{s}_{uu}$ となることを示せ。
 - (b) $j_1 = 1, j_2 = 1/2, j = 1/2, c_1 = 4\mu_N, c_2 = 2\mu_d = -2\mu_N$ として、(1)の結果を使うことにより、 $\mu = 3\mu_N$ となることを示せ。
 - (c) 中性子の場合はどうなるか。中性子は1個のu-クォークと2個のd-クォークからなり、u-クォークとd-クォークの役目が入れ替わっている以外はほとんど陽子と同じ系である。

III-4(統計力学：量子統計) (100点)

相互作用のない理想量子気体 ($\epsilon = p^2/2m$; ϵ 、 p はそれぞれ一粒子のエネルギー、運動量で m は粒子の質量) が体積 V の空間内で運動しているような開いた系を考える。Bose 粒子、Fermi 粒子の分配関数 (Q_{BE} 、 Q_{FD}) がそれぞれ

$$Q_{\text{BE}} = \sum_{n_i=0,1,2,\dots}^{\text{組 } \{n_i\} \text{ の和は } N} \exp(-\sum_i \beta n_i \epsilon_i) \quad (\text{A})$$

$$Q_{\text{FD}} = \sum_{n_i=0,1}^{\text{組 } \{n_i\} \text{ の和は } N} \exp(-\sum_i \beta n_i \epsilon_i) \quad (\text{B})$$

で与えられることを前提として ($\beta = 1/kT$ 、 k はボルツマン定数、 T は系の温度、 ϵ_i はエネルギー準位、 n_i は ϵ_i のエネルギーを持つ粒子の数、 N は系内の粒子数)、以下の問い合わせよ。

- (1) Bose 粒子系、Fermi 粒子系の大分配関数 $\Xi(V, \beta, \mu)$ がそれぞれ

$$\Xi = \prod_i [1 - \exp\{-\beta(\epsilon_i - \mu)\}]^{-1} \quad \text{BE 分布} \quad (\text{C})$$

$$\Xi = \prod_i [1 + \exp\{-\beta(\epsilon_i - \mu)\}] \quad \text{FD 分布} \quad (\text{D})$$

であることを示せ (μ は化学ポテンシャル)。但し Bose 粒子系に於ける化学ポテンシャルは負であることを前提としてよい。

- (2) (1) で求めた大分配関数の形を利用して、(1) のような開いた系に於ける、量子状態 i にある平均粒子数 $\langle n_i \rangle$ を Bose 粒子系、Fermi 粒子系についてそれぞれ求めよ。又、Fermi 粒子系について、縮退が強い(すなわち、充分低温である)場合の $\langle n_i \rangle$ の概形を ϵ_i の関数として図示せよ。但し系内の粒子数の期待値 $\langle N \rangle$ は充分大きいものとする。
- (3) 縮退の弱い極限に於ては Bose 分布、Fermi 分布は Maxwell-Boltzmann 分布に移行する。このことを (2) で求めた n_i の期待値 $\langle n_i \rangle$ を用いて説明せよ。尚、ここで縮退が弱い極限とは、全ての量子状態 i に於て $\langle n_i \rangle \ll 1$ が成り立つことを意味するものとする。
- (4) Maxwell-Boltzmann 分布の下での化学ポテンシャル μ を粒子数密度 n と β を用いて表せ。但し系内の粒子数の期待値 $\langle N \rangle$ は充分大きいとし、スピンは $1/2$ とする。
- (5) (3)、(4) の結果を用いて、Bose 分布、Fermi 分布が Maxwell-Boltzmann 分布に移行する条件を典型的なド・ブロイ波長 ($\lambda = h/p$; h はプランク定数) と平均的な粒子間距離の大小比較をすることから求めよ。但し基底状態 ϵ_1 に対して $\beta \epsilon_1 \ll 1$ が成り立っているものとする。

(6) (5) の結果を用いて、中性子内部に於ける中性子の縮退の程度を評価せよ（中性子星は一様密度で近似出来るものとし、また組成は近似的に陽子と中性子のみで構成されているものと仮定せよ）。評価は有効数字一桁で良いものとする。但し、中性子星の物理量について近似的に次の値を使用してよいものとする。中性子星の平均密度 $\rho_{\text{NS}} = 10^{14} \text{ g/cm}^3$ 、(今回考える) 中性子星の平均温度 $T_{\text{NS}} = 10^8 \text{ K}$ 、全核子数に於ける陽子数の割合 $Y_e = 0.1$ 。又、必要であれば次の数値を用いてよい。核子の質量 $m_u = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$ 、ボルツマン定数 $k = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg/K}$ 、プランク定数 $h = 6.63 \times 10^{-27} \text{ erg s}$ 、光速 $c = 2.9979 \times 10^{10} \text{ cm/s}$ 。1erg=10⁻⁷Jである。尚、縮退が弱くないと結論された場合には縮退が強いか否かを別途検討せよ。

III-5 (物理数学：微分方程式) (100 点)

- (1) ばね定数が時間とともに変化する調和振動子

$$\ddot{x}(t) = -\omega(t)^2 x(t)$$

を考え、振幅がどのように変化するかを議論する。

- (a) $\omega(t)^2$ は、 $t \leq t_1$ では一定値 ω_1^2 であり、 $t = t_1$ から $t = t_2$ にかけてゆっくり増加し、 $t \geq t_2$ で別の一定値 ω_2^2 になるとすると。 $t \leq t_1$ のときの振幅が A_1 であったとすると、 $t \geq t_2$ のときの振幅 A_2 はどれくらいか。(ヒント：ハミルトンニアんであらわし、断熱定理を使うと簡単である。)
- (b) 逆に、 $\omega(t)^2$ が $t = 0$ で瞬間に一定値 ω_1^2 から一定値 ω_2^2 まで増加するときはどうか。 A_2 の最大値と最小値はいくらか。(ヒント： $t < 0, t > 0$ でそれぞれ $x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1)$, $x(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2)$ とし、 $t = 0$ で解がなめらかにつながる条件から A_1 と A_2 の関係をもとめよ。)

- (2) 半無限領域 $x \geq 0$ で定義されている関数 $f(x)$ に対する微分方程式

$$\left(x \frac{d^2}{dx^2} + (a - x) \frac{d}{dx} + \lambda \right) f = 0.$$

を考える。この自明でない解（恒等的にはゼロでない解）が、 $x \sim 0$ で有限であり、 $x \rightarrow \infty$ で x の幕でおさえられるためには、 λ がどのような値であるべきか議論する。ただし、 a は実数で $a > 1$ とする。

- (a) $x \sim 0$ で $f(x) \sim x^b$ とすると、あたえられた微分方程式をみたすためには b はどのような値でなければならないか。さらに、 $f(x)$ が $x \sim 0$ で有限であるためには、 $b = 0$ でなければならないことを示せ。
 - (b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ と幕展開して係数に対する漸化式を導き、級数が有限で切れるために λ がみたすべき条件をもとめよ。
- (3) 次の偏微分方程式の解を求めよ。ただし、 Δ は 3 次元のラプラシアンであり、 $\delta^3(\mathbf{r})$ は 3 次元のデルタ関数である。解を知っている場合は、見つけ方を述べる必要はなく、それが確かに解であることを示すだけでよい。

- (a) $(-\Delta + m^2) \phi(\mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r})$ の無限遠でゼロになる球対称解。

- (b) $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi(t, \mathbf{r}) = \delta(t) \delta^3(\mathbf{r})$. ただし、 $t < 0$ で、 $\phi(t, \mathbf{r}) = 0$ とする。

III-6 (実験学 : 半導体) (100 点)

電場および磁場中での荷電粒子の運動を考えることで、半導体結晶の性質を知ることができる。図 1 に示すように、細長い板状の直方形試料の z 方向に一様な磁場 $B_z (> 0)$ を印加する。さらに x 方向に電場 $E_x (> 0)$ を印加し電流を流す。電流に寄与するキャリヤ (carrier) の種類はひとつであり、その電荷は q とする。 q は $+e$ または $-e$ である。以下の問題に答えなさい。

- (1) x 方向に電場印加直後、キャリヤが移動し始めると磁場により y 方向に力を受ける。キャリヤが電荷 $+e$ を持つ場合、キャリヤは磁場により $+y$ 方向または $-y$ 方向のどちらに曲げられるか答えよ。また、電荷 $-e$ のキャリヤは、磁場により $+y$ 方向または $-y$ 方向のどちらに曲げられるか答えよ。
- (2) y 方向から外へ電流が流れないようにする。磁場により y 方向に曲げられたキャリヤが試料の一方の側の面にたまり、その結果 y 方向に電場が発生するようになる。やがて発生した電場により、 y 方向へキャリヤの移動がなくなり、定常状態となる。キャリヤの電荷が $+e$ のとき、定常状態で y 方向に誘起される電場 E_y を求めよ。 x 方向に一定の速さ v でキャリヤは動いている。
- (3) ホール定数 R_H は、 $R_H = E_y / (J_x B_z)$ で定義される。ここで、定常状態での x 方向の電流密度を J_x とする。ホール定数を測定することによりキャリヤの密度とキャリヤの電荷の符号が分かることを示せ。ただし、キャリヤはすべて x 方向に同じ速さ v で移動するものとする。

半導体の電気伝導を担うキャリヤは、伝導帯の電子と価電子帯の正孔である。図 2 に示すように、伝導帯の下端のエネルギーを E_C 、価電子帯の上端のエネルギーを E_V とする。バンドギャップエネルギー E_g は、 $E_g = E_C - E_V$ で与えられ、 $E_g \gg k_B T$ である。伝導帯の電子密度 n は、

$$n = N_C \exp[-(E_C - E_F)/k_B T] \quad (A)$$

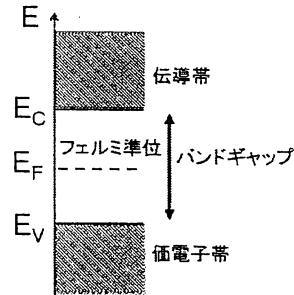


図 2 : 電子のエネルギーを縦軸にとって描いた半導体のエネルギー-band 図

で与えられる。 E_F は、フェルミ準位であり、 N_C は、伝導帯の有効状態密度である。また、伝導帯の電子密度 n と価電子帯の正孔密度 p の積 np は、

$$np = N_C N_V \exp(-E_g/k_B T) \quad (B)$$

で与えられる。 N_V は、価電子帯の有効状態密度である。 N_C と N_V は同程度の大きさである。

- (4) 不純物を添加していない純粋な結晶である真性半導体のフェルミ準位 E_F は、バンドギャップの中央付近に位置することを示せ。 $N_C = N_V$ の場合には、バンドギャップの真中にあることを示せ。
- (5) 真性半導体の伝導帯の電子密度 n の温度依存性を測定することにより、バンドギャップエネルギー E_g を決定できることを示せ。
- (6) 一種類の不純物（ドナー）が添加されている半導体を考える。ドナー準位のエネルギーを E_D およびドナー密度を N_D とする。ドナー準位に存在する電子の密度 n_D は、占有確率関数を f として、 $n_D = N_D f$ で与えられる。一つのドナー準位に一個の電子のみを収容できるとき、 f は以下の式で与えられる。

$$f = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{E_D - E_F}{k_B T}\right)} \quad (\text{C})$$

プラスにイオン化しているドナーの密度は $N_D - n_D$ である。正孔の密度が無視できるほど小さく、さらに伝導帯の電子密度 n がドナー密度 N_D にくらべ小さい時、 n は以下の式で与えられることを示せ。

$$n \cong \sqrt{\frac{N_C N_D}{2}} \exp\left(-\frac{\Delta E_D}{2k_B T}\right) \quad (\text{D})$$

ここで、ドナーのイオン化工エネルギー ΔE_D は、 $\Delta E_D = E_C - E_D$ である。

- (7) ホール効果の測定により求めたゲルマニウム結晶のキャリヤ密度の温度依存性を図3に示す。一種類の不純物（ドナー）が添加されている。ただし、 $E_g \gg \Delta E_D$ であり、 N_C は、 10^{18} cm^{-3} 程度である。キャリヤ密度の温度依存性は、大きく3つの領域（図のI,II,III）に分けることができる。ゲルマニウム結晶のバンドギャップエネルギー E_g とドナーのイオン化工エネルギー ΔE_D は、どの領域からどのようにして求めることができるか述べよ。また、ドナー密度 N_D は、どの程度であるか。

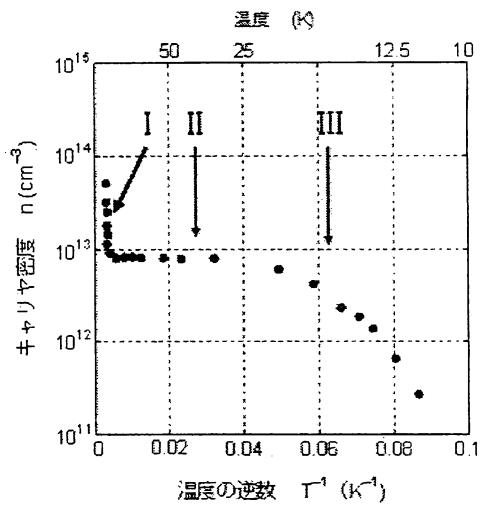
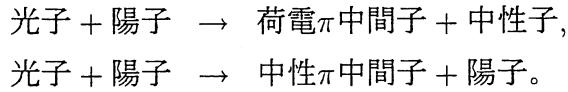


図3：不純物が添加されたゲルマニウムのキャリヤ密度 n の温度依存性

- (8) 上記で述べた電気測定以外の方法で半導体のバンドギャップエネルギーを求める方法をあげよ。

III-7 (実験学：荷電粒子の検出) (100 点)

図 1 のように高エネルギーの光子を陽子標的に照射し、その反応で生成される荷電粒子を検出する実験を考える。光子のエネルギーを適切に選んだ場合、次のような反応が起こることが期待される。



光子のエネルギーを k 、陽子と中性子の質量を $m_1 (= 1\text{GeV}/c^2)$ 、荷電 π 中間子と中性 π 中間子の質量を $m_2 (= 0.1\text{GeV}/c^2)$ として以下の間に答えよ。必要ならば、エネルギー (E)、運動量 (p) と静止質量 (m_0)、粒子の光速を基準とした速度 (β)、 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 、光速 ($c = 3 \times 10^8 \text{m/sec}$) の間の関係 $E = m_0\gamma c^2$ 、 $p = m_0\gamma\beta c$ を用いてよい。また、本問題の計算において計算途中及び答えに対して、有効数字は 2 術でよい。

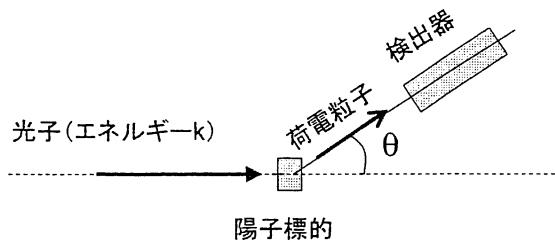


図 1: 高エネルギーの光子を陽子標的に照射し、散乱角 θ に放出される荷電粒子を観測する実験。

- (1) 図 1 の検出器で、荷電粒子の入射位置測定に多線式比例計数箱を用いた。比例計数管では荷電粒子が計数管中のガスを電離したことで生じた電子を信号として読み出した。この電子の微弱な信号を電気信号として計測できるよう増幅する比例計数管の原理を簡潔に説明しなさい。
- (2) 散乱角 θ に出てくる陽子の 4 元運動量を $(E_1/c, \vec{p}_1)$ 、荷電 π 中間子の 4 元運動量を $(E_2/c, \vec{p}_2)$ とする時、次の関係式が成り立つことを示しなさい。

$$\begin{aligned} 2(k + m_1 c^2) E_1 &= 2k m_1 c^2 + 2k p_1 c \cos \theta + 2m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4 \\ 2(k + m_1 c^2) E_2 &= 2k m_1 c^2 + 2k p_2 c \cos \theta + m_2^2 c^4 \end{aligned}$$

- (3) 検出器で観測される陽子と荷電 π 中間子を識別することを考える。問題 (2) よりそれぞれの粒子の運動量は決まっているので、その速度を測れば荷電粒子を識別することができる。速度は粒子が距離 L を通過するのにかかる時間

を精密に測定することで測れる。この方法を TOF (Time of Flight) 法といふ。TOF 法には一般にプラスチックシンチレータを光電子増倍管で読み出す検出器が使用される。この検出器で荷電粒子通過の信号が電気信号としてどのように得られるか、その動作原理を簡潔に説明しなさい。

- (4) TOF 法では通常 γ 線測定に使用される NaI(Tl) シンチレータは用いない。この理由を NaI(Tl) シンチレータとプラスチックシンチレータの特性を比較して簡潔に答えなさい。
- (5) TOF 法で $1\text{GeV}/c$ の運動量を持った 荷電 π 中間子と陽子を識別する。飛行距離 $L = 3\text{ m}$ の場合、荷電 π 中間子と陽子の飛行時間差は何ナノ秒となるか ($1\text{ ナノ秒} = 10^{-9}\text{ 秒}$)。また、この間に荷電 π 中間子が崩壊してしまっては測定ができなくなる。寿命 26 ナノ秒の荷電 π 中間子の飛行距離はいくらか？
- (6) TOF 法以外にも粒子を識別する方法はいくつかある。その一つは単位長さ当たりに荷電粒子が落とすエネルギーを測定することで、粒子識別を行う方法である (dE/dx 法)。荷電粒子の単位長さあたりのエネルギー損失は本問題の仮定するエネルギー領域においてはベーテ・ブロッホの式を使って近似的に

$$-\frac{dE}{dx} \propto \frac{1}{\beta^2}$$

と表せる。このエネルギー損失はどのような過程によって起こるか。簡潔に答えなさい。

- (7) 入射光子のエネルギーが 1GeV 、検出器の設置角度 $\theta = 30^\circ$ とする。検出器で観測される陽子と荷電 π 中間子の運動量を求めよ。また、 dE/dx 法により大きなエネルギー損失が観測される粒子はどちらかを答えなさい。

III-8 (天文学：輻射輸送) (100点)

ガス中の光によるエネルギーの伝達を輻射輸送という。ここでは、単一の遷移のみを持つガスにおける輻射輸送に関して、基礎的な考察を行う。

ガス中に単位面積を底面とする長さ ds の微少体積を考え、両端面での単位振動数あたりの表面輝度を I_ν , $I_\nu + dI_\nu$ ($\text{erg sec}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{Hz}^{-1}\text{sr}^{-1}$, sr:ステラジアン) とする(図1)。この微少体積で新たに発生するエネルギーによる輻射を Emissivity といい、 j_ν ($\text{erg sec}^{-1}\text{cm}^{-3}\text{Hz}^{-1}\text{sr}^{-1}$) で表す。また、この体積内での輻射の吸収率を吸収係数 α_ν (cm^{-1}) で表すと、 I_ν について以下の式が成り立つ。

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu \quad (\text{A})$$

これを輻射輸送の基礎方程式という。

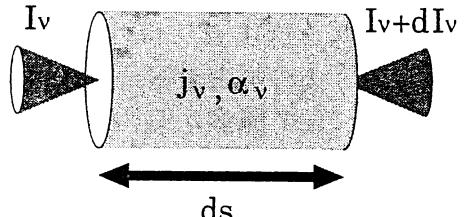


図1

(1) 光学的厚さ (Optical depth) τ_ν

$$\tau_\nu \equiv \int_0^s \alpha_\nu(s') ds'$$

源泉関数 (Source function) S_ν

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}$$

を用いて式(A)を書き換え、それを解くことにより I_ν を τ_ν の関数として表せ(ヒント: 変数を s から τ_ν に変換し、 $0 \sim \tau_\nu$ の区間で積分)。また、 S_ν が τ_ν によらず一定である場合について解を整理して書き直し、 $\tau_\nu \rightarrow 0$, $\tau_\nu \rightarrow \infty$ の場合について解の物理的意味を説明せよ。

次に、このガスに含まれる原子の準位1,2間の遷移(エネルギー差 $h\nu_0$)について考える。

原子周辺での輻射の平均強度 J_ν は I_ν の立体角平均で与えられる。

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega$$

このうち、準位1,2間の遷移に関与する部分を \bar{J} とすると、

$$\bar{J} = \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu$$

ここで、 $\phi(\nu)$ は ν_0 を中心とする δ 関数に近い形状を持つ規格化された関数で、輝線や吸収線の形を与えるものである(図2)。

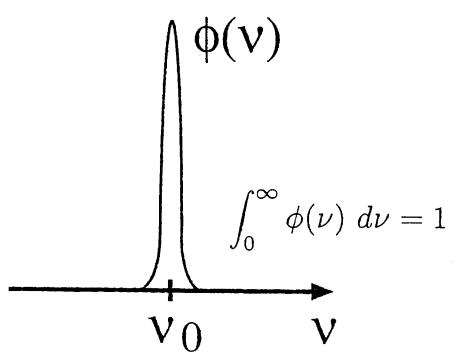


図2

準位 1,2 間の遷移には、確率 A_{21} で起る自発的な放射と、 \bar{J} により確率 $B_{12}\bar{J}$, $B_{21}\bar{J}$ で引き起こされる誘導吸収および誘導放射がある(図 3)。また、準位 1,2 にある原子の個数密度を n_1 , n_2 とすると、温度 T の熱力学平衡状態にあるガスでは、

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu_0}{kT}\right) \quad (\text{B})$$

(g_1 , g_2 はそれぞれの準位の状態総数)
の関係がある。

- (2) 放射と吸収が平衡状態にあることから \bar{J} を求め、それが振動数 ν_0 における温度 T の黒体輻射 B_{ν_0} ($\text{erg sec}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{Hz}^{-1}\text{sr}^{-1}$)

$$B_{\nu_0} = \frac{2h\nu_0^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu_0/kT) - 1} \quad (\text{C})$$

と一致すると考えて、 B_{12}, B_{21} 間の関係及び A_{21}, B_{21} 間の関係を導け。また、前文下線部のように考えて良い理由を定性的に述べよ。

j_ν , α_ν は A_{21}, B_{12}, B_{21} を用いて以下のように表される。

$$j_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_2 A_{21} \phi(\nu) \quad (\text{D})$$

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \phi(\nu) \quad (\text{E})$$

- (3) (2) の結果および式 (B)(D)(E) を用いて、熱力学平衡状態にあるガスの α_ν , S_ν を温度 T を含む形で表せ。また、 $\nu \sim \nu_0$ 付近でのそれらの振る舞い及びその物理的意味を、簡潔に説明せよ。

- (4) 温度 T_2 のガスに囲まれた温度 T_1 の星を考える(図 4)。ガスは振動数 ν_0 のみに遷移を持ち、この振動数においてガスは光学的に十分厚いものとする。振動数 ν_0 とそれに近い異なる振動数での天体を観測した場合、それぞれの振動数での天体の見え方を、簡単な説明とともに図示せよ。

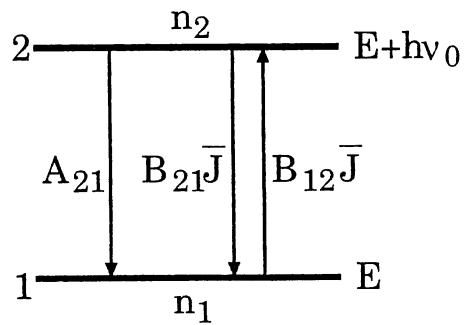


図 3

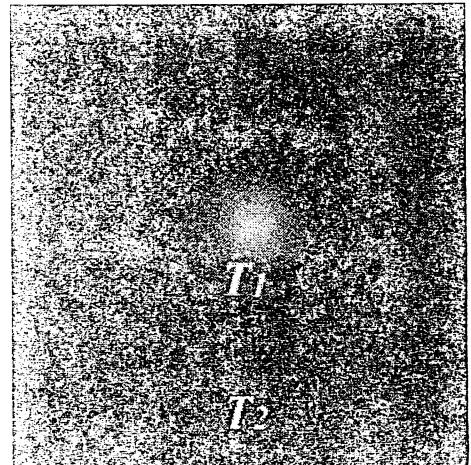
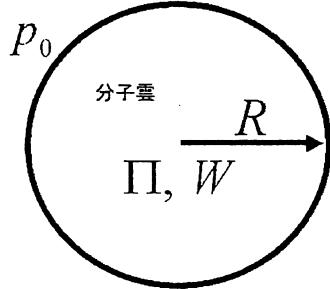


図 4

III-9 (天文学：力学平衡) (100 点)

恒星は分子雲¹の自己重力による収縮の結果として誕生する。一方、実際の分子雲は孤立して存在しておらず、外周の星間ガスから圧力を受けている。本問では、星形成に先立つ分子雲の力学を、分子雲全体での力のバランスを考えることにより議論する。

外圧を被る分子雲の概念図



さて、分子雲全体の収縮や膨張といった形状の変化は、慣性能率 (I) の時間の 2 階微分を調べることにより分かることが知られている²。 I を用いて基本となる方程式を書き下すと以下となる。

$$\frac{1}{2} \frac{dI^2}{dt^2} = 3\Pi + W - \int_{\text{分子雲の全表面}} p_0 \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{A})$$

ここで、 p_0 は分子雲が受ける外圧であり、分子雲の全表面に対して面積分されている。分子雲の表面ベクトル \mathbf{S} は外向きを正とした。 \mathbf{r} は位置ベクトルである。球対称を仮定すると分子雲の総内部圧力 Π と総重力 W は

$$\Pi = \int_0^R p \times 4\pi r^2 dr \quad (\text{B})$$

$$W = \int_0^R \rho \times r F(r) \times 4\pi r^2 dr \quad (\text{C})$$

である。ここで、 p は分子雲内部の圧力、 $F(r)$ は分子雲中心から距離 r における単位質量当たりの重力で、外向きを正とする。分子雲の半径は R としている。以下、密度 ρ 及び温度 T は空間的に一様と近似し、分子雲の半径 R の変化は許すが質量は常に M と固定する。まず、方程式 (A) の右辺を分子雲の半径 R を用いて整理しよう。

¹分子雲とは、主に水素分子から成る星間雲である。CO 分子輝線の検出によりその存在が認識されている

²分子雲を構成するガス粒子の運動方程式に位置ベクトル \mathbf{r} を乗じ、分子雲の体積全体にわたり積分することから分かる

- (1) 分子気体の平均分子量を $\mu(g)$ 、ボルツマン定数を $k_B(\text{erg}/\text{K})$ とし、気体の状態方程式から分子雲の圧力 p を温度と密度で表せ。
- (2) 半径 r 内の質量 $M(r)$ を用いて、半径 r での重力 $F(r)$ を書け。重力定数は G とする。
- (3) 式(A)の右辺を R の関数として、 M 、 T 、 μ 、 k_B 、 G 、 p_0 を用いて書き下せ。

以上より、 M と T が与えられた場合、分子雲の大域的力学状態は外圧 p_0 と分子雲の半径 R で特徴づけられることが分かる。次に、分子雲がビリアル平衡(力学平衡： $\frac{d^2I}{dt^2} = 0$)にあるとする。

- (4) 分子雲がビリアル平衡となるためには、 p_0 がある上限値 p_m 以下でなければならぬ。ある温度 T 及び質量 M が与えられたとする。 T と M を用いてこの p_m を求めよ。 G 、 k_B 、 μ はそのまま用いて良い。
- (5) $p_m > p_0$ の場合を考える。このとき(ある p_0 が定まった場合)、2つの平衡解が許されることを、横軸が分子雲のサイズ R 、縦軸を $\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2}$ として、大まかなグラフを描いて示せ。

次に、ビリアル平衡にある分子雲の安定性を考察しよう。平衡となる半径で、小さい方を R_s 、大きい方を R_l とする。 p_m より小さいある p_0 のもと、分子雲のサイズ R が一様に少し揺らいだとする。簡単のため T は常に一定と仮定する。

- (6) 縦軸が $\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2}$ 、横軸が R であるグラフから、 $\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2}$ の符号が R に応じて変わることが分かる。(イ)正の場合、(ロ)負の場合、それぞれ分子雲の形状はどのように変化するか、簡単な理由とともに述べよ。
- (7) 2つのビリアル平衡状態の安定性をそれぞれ定性的に論ぜよ。

最後に、ビリアル平衡にある分子雲を具体的に考察する。物理定数の値は、 $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{g}\cdot\text{s}^2$ 、 $k_B = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg}/\text{K}$ であり、 $\mu = 3.0 \times 10^{-24} \text{ g}$ とする。

- (8) 温度が 30 K、質量が $4.0 \times 10^{34} \text{ g}$ である小型の分子雲の p_m を具体的に求めよ。有効数字は 2 桁とし、単位は erg cm^{-3} とせよ。
- (9) 非常に強い衝撃波が通過し、小型の分子雲が受ける外圧が $10^{-10} \text{ erg cm}^{-3}$ となったと仮定する。この外圧と小問(8)で求めた p_m との大小を比較し、この外圧が十分な時間保たれた場合に分子雲がどの様に進化するか簡単に述べよ。