

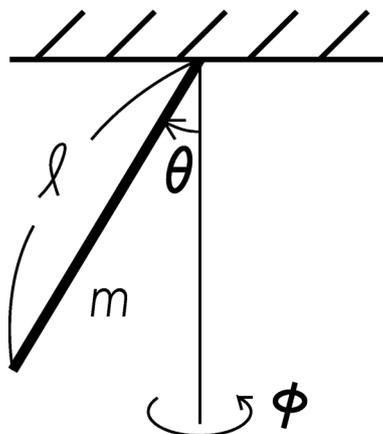
## 平成 15 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
  - (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。
- 

### I-1 (力学・振り子) (100 点)

図のような、質量  $m$  と長さ  $l$  を持つ、太さの無視できる一様な剛体の棒が天井からぶら下がっているとする。天井との接点を支点にして、棒は自由に運動できる。鉛直下向きからの棒の向きを  $\theta$  とし、鉛直軸の周りに回転運動するときの回転角度を  $\phi$  とする。重力加速度を  $g$  とする。以下の問に答えよ。



- (1) まず鉛直軸周りの回転運動が無い場合 ( $\dot{\phi} = 0$ ,  $\cdot$  は時間微分) を考える。
  - (a) 変数  $\theta$  について、Lagrangian と運動方程式を求めよ。  
(ヒント：一つの解き方として、棒の微小部分についての Lagrangian を積分することにより、全体の Lagrangian を求めることもできる。)
  - (b) 棒が鉛直軸 ( $\theta = 0$ ) 付近を微小振動をしている場合に、固有振動数を求めよ。  
微小振動であるので、運動方程式において、振動の振幅について 2 次以上の項は無視して考えよ。
- (2) 次に鉛直軸周りの回転運動もあるとする。
  - (a) 変数  $\theta$  と  $\phi$  について、Lagrangian と運動方程式を求めよ。
  - (b) 問 (a) において、変数  $\phi$  の変分により導かれた運動方程式が意味する運動の保存量は何か。
  - (c) 鉛直軸周りの回転運動が一様 ( $\dot{\phi}$  が定数) であるときは、等速円運動 ( $\theta$  が定数) であることを示し、 $\dot{\phi}$  と  $\theta$  の間の関係を求めよ。
  - (d) 上記のような等速円運動で、鉛直軸からの角度が  $\theta = \theta_0$  のものを考える。この等速円運動から微小量だけずれた運動を考えたときに、その微小量のずれの運

動を記述する運動方程式を求めよ。微小量の振幅についての2次以上の項は無視して考えよ。力学変数としては、微小量  $h, f$  を以下のように定義したものを  
使うこと。

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 + h \\ \phi &= \omega_0 t + f\end{aligned}$$

ここで、 $\omega_0$  は問(c)で求めたもので、 $\theta_0$  により表される。(変数  $t$  は時間を表す。)

- (e) 問(d)の運動方程式を解き、微小なずれの時間変化を求めよ。ただし、ずれの時間平均が0となるような解を求めること。(ずれの時間平均値がある場合、それが0となるように元の等速円運動を取り直すことができるので、時間平均を0と仮定しても、一般性を失わない。)

I-2(量子力学・静電磁場中の原子のエネルギー) (100点)

全角運動量  $J = 1$  の原子に、静電場  $\mathbf{E}_0$  及び静磁場  $\mathbf{B}_0$  を印加した。原子は静電場  $\mathbf{E}_0$  とシュタルク相互作用

$$\hat{H}_S = -\frac{1}{2}\alpha_0\mathbf{E}_0^2 - \frac{1}{2}\alpha_2(3(\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{E}_0)^2 - 2\mathbf{E}_0^2)$$

を、また静磁場  $\mathbf{B}_0$  とはゼーマン相互作用

$$\hat{H}_Z = -g\mu_B\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{B}_0$$

をする。ここで、 $\alpha_0$  及び  $\alpha_2$  はスカラー及びテンソル分極率をあらわし、 $\alpha_0 > 0, \alpha_2 > 0$  とする。また、 $g$  は  $g$  因子、 $\mu_B$  はボーア磁子をあらわす。また、 $h\hat{\mathbf{J}}$  は原子の角運動量演算子である。

ここでは特に、大きさ  $E_0$  の静電場が  $z$  方向に印加され、大きさ  $B_0$  の静磁場が  $x$  方向に印加されている場合を考える。

- (1)  $\hat{J}_z$  の固有状態  $|m_z\rangle (m_z = -1, 0, 1)$  について、 $\hat{J}_z|m_z\rangle = m_z|m_z\rangle$  および、 $\hat{J}_\pm|m_z\rangle = \sqrt{(1 \mp m_z)(1 \pm m_z + 1)}|m_z \pm 1\rangle$  が成り立つ。ただし、 $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$  である。 $|m_z\rangle$  を基底ベクトルとした  $\hat{J}_x$ 、 $\hat{J}_y$ 、および  $\hat{J}_z$  の行列表示を求めよ。

まず、原子が静止している場合を考える。

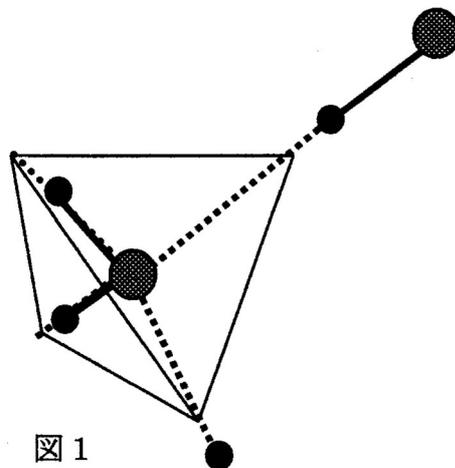
- (2) 原子の3つのエネルギー固有値を求めよ。そして、それを静磁場の大きさ  $B_0$  の関数として図示せよ。

次に、原子が一定速度  $\mathbf{v} (|\mathbf{v}| \ll c)$  で運動している場合を考える。このときには相対論的効果から、原子は付加的な磁場  $\mathbf{B}_m = (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_0)/c^2$  を感じるようになる。ただし、 $c$  は光速である。

- (3) 原子が  $+y$  方向に運動しているとして、原子の3つのエネルギー固有値  $\varepsilon_1, \varepsilon_0, \varepsilon_{-1}$  を求めよ。ただし、 $|\mathbf{B}_m| \ll B_0$  および  $|\alpha_2|E_0^2 \ll g\mu_B B_0$  であり、 $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_0 \geq \varepsilon_{-1}$  とする。これから、 $\varepsilon_{\pm 1}$  には、原子の運動に起因する項  $\pm\varepsilon_m$  が加わることがわかる。

- (4) この原子の運動によって誘起された波動関数の位相変化  $\phi_{AC} \equiv \varepsilon_m t/h$  はアハラノフキャッシャー位相と呼ばれ、系の幾何学的配置にのみ依存する。ここで、 $t$  は相互作用時間である。電場の大きさ  $E_0 = 10 \text{ kV/cm}$ 、電場の印加されている距離  $L = 25 \text{ mm}$  のときにアハラノフキャッシャー位相の大きさを求めよ。ただし、 $h = 1.1 \times 10^{-34} \text{ Js}$ 、 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ 、 $g = 1.0$ 、 $\mu_B = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J/T}$  として計算せよ。

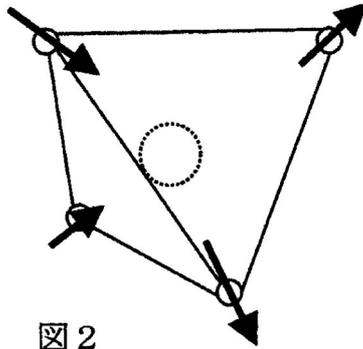
I-3 (統計力学・氷のエントロピー) (100 点)



- (1) 図 1 はある温度・圧力領域における氷の結晶構造の一部を示したものである。正四面体の重心に位置する各酸素（大きな丸印）の周りの水素原子核，すなわち陽子（小さな丸印）は，正四面体の頂点に近い位置を占め，それら正四面体が互いにつながった構造をしている。酸素 - 酸素の各結合軸上に 1 個の陽子があるが， $\text{H}_2\text{O}$  分子を構成するように，各酸素原子の周りの 4 個の陽子のうち，2 個だけがその酸素に近接しており，残りの 2 個は注目する酸素に隣接する酸素の方に近接している。各酸素の周りに陽子 2 個だけが近接している規則をアイス・ルールと呼ぶことにする。

氷を極低温に冷やすと，多くの可能な構造の中の一つの構造をとるが， $\text{H}_2\text{O}$  分子の向きが全く規則的な一義的に決まった原子配置を相当長時間に渡ってとっているわけではない。従って，残留エントロピー  $S_0 = k_B \ln W_0$  が存在する。ここで  $k_B$  はボルツマン定数， $W_0$  は極低温で結晶の取りうる原子配置の数である。この残留エントロピーについて，以下で述べる Pauling の方法に基づいて答えよ。なお氷では実際に，この方法で求めた  $S_0$  に極めて近いエントロピーが確認されている。

- (a) 氷  $\text{H}_2\text{O}$  に含まれる陽子が，酸素 - 酸素の結合軸上の二つの可能な位置（第一の酸素に近い位置と第二の酸素に近い位置）のいずれかをアイス・ルールの制約を受けずに任意に取りうるるとすると，氷 1 モルあたり可能な原子配置はいくつあるか，アボガドロ数  $N_A$  を用いて表せ。
- (b) ひとつの  $\text{OH}_4$  四面体について，酸素の周りの 4 つの陽子の可能な原子配置のうち，アイス・ルールを満たすものの割合を求めよ。
- (c) 低温における氷 1 モルあたりの残留エントロピー  $S_0$  を見積もるため，アイス・ルールの制約のもとで実現可能な陽子の配置の数  $W_0$  を考える。Pauling はアイス・ルールを無視した全配置に対し，独立な  $N_A$  個の四面体がすべてアイスルールを満たす割合を乗じて  $W_0$  を求めた。この方法で  $S_0$  を求めよ。
- (d) 陽子の配置がアイスルールの制約を受けずに完全に乱雑になった場合のエントロピーを  $S_1$  とする。比  $S_0/S_1$  を求めよ。またその数値を有効数字 2 桁で答えよ。ただし近似値  $\ln 2 = 0.693$ ,  $\ln 3 = 1.099$  を用いよ。



- (2) 図 2 はある磁性体の結晶構造の一部である。頂点を共有してつながった正四面体の各頂点には矢印で示したように磁気モーメント  $\vec{m}$  をもつイオン (小さな丸印) がある。また、この磁気モーメントの方向は、正四面体の頂点から重心にある磁性を示さない別のイオン (大きな丸印) に向かう軸方向に限られ、その向きは重心向き (内向き) とその反対 (外向き) のいずれかをとる。重心の座標を原点にとると、辺の長さが  $r$  の正四面体の頂点の座標は

$$(x, y, z) = \left( \pm \frac{r}{2}, 0, -\frac{r}{2\sqrt{2}} \right), \left( 0, \pm \frac{r}{2}, \frac{r}{2\sqrt{2}} \right) \quad (1)$$

と表せる。

さて隣同士の磁気モーメント  $\vec{m}_1$  と  $\vec{m}_2$  の間にもみ、式 (2) のエネルギーで与えられる磁気双極子相互作用が働くものと仮定する。

$$E = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left\{ \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{m}_1)(\vec{r} \cdot \vec{m}_2)}{r^2} \right\} \quad (2)$$

ここで  $\mu_0$  は真空透磁率、 $\vec{r}$  は磁気イオン  $\vec{m}_1$  の位置から  $\vec{m}_2$  の位置へ向かうベクトルであり、磁気モーメントの大きさは  $|\vec{m}_1| = |\vec{m}_2| = m$  である。

- $\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2$  と  $\vec{r} \cdot \vec{m}_1$  をそれぞれ求めよ。
- 隣接する磁気モーメントに対して、内外同じ向き同士と反対向きとでのエネルギー差を  $2J$  としたとき、 $J (J > 0)$  を求めよ。
- あるひとつの正四面体の頂点を占める 4 個の磁気モーメントの可能なスピン配列 (内 3 個・外 1 個 や 内 4 個・外 0 個 など) に対して、それぞれのエネルギー準位と縮重度について述べよ。
- 氷の性質とこの磁性体の性質との類似性を論ぜよ。

## 平成 15 年度大学院入学試験問題 II (3 時間 30 分)

注意

- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
  - (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。
- 

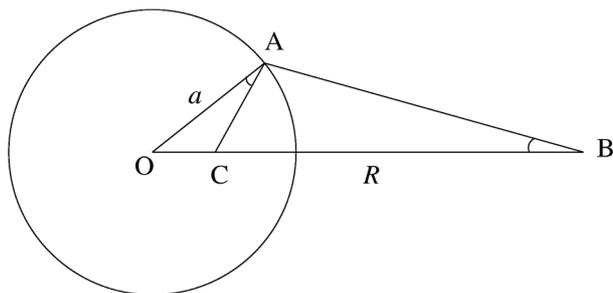
### II-1 (電磁気学・鏡像法) (100 点)

半径  $a$  の導体球が固定されており、その中心を原点  $O$  とする。この導体球の中心から距離  $R$  だけ離れた点  $B$  に点電荷  $Q$  をおいたとき ( $R > a$ )、この点電荷が導体球から受ける Coulomb 力  $F(R)$  を求めたい。ただし、真空の誘電率を  $\epsilon_0$  とする。

- (1) まず、導体球が接地されている場合を考える。距離  $R$  の関数として点電荷にはたらく力  $F$  はどのように変化するか、鏡像法を用いて決定せよ。さらに、 $F(R)$  の定性的なグラフを書け。

(ヒント) 下図において、三角形  $OAB$  と三角形  $OCA$  は相似である。

点  $C$  に鏡像を置くとよい。



- (2) 次に、導体球が接地されておらず、電荷  $Q$  を帯びているとする。
  - (a) 球と点電荷の距離  $R$  が球の半径  $a$  よりも非常に大きいときの  $F(R)$  の漸近形を予想せよ。
  - (b) 鏡像法を用いて、 $F(R)$  を求めよ。
  - (c)  $F(R)$  のグラフを書け。
  - (d) 点電荷が球表面に近づいたとき ( $0 < R - a \ll a$ ) の  $F(R)$  の漸近形を答え、その結果を解釈せよ。

## II-2(量子力学・可解系) (100点)

実数値をとる一自由度  $x$  を持つ量子力学系を考える。以下のような特殊なポテンシャルを持つ場合、幾つかの状態について、エネルギー固有値とその対応する固有波動関数をあらわに求めることができる。以下においては、 $\hbar = c = 1$ 、 $p = -i\frac{d}{dx}$  であり、 $\dagger$  はエルミート共役を表し、特に  $x^\dagger = x$ 、 $p^\dagger = p$  である。以下の問いに答えよ。

(1) ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2}p^2 + V(x)$$

におけるポテンシャル  $V(x)$  が

$$V(x) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{dW(x)}{dx} \right)^2 + \frac{d^2W(x)}{dx^2} \right)$$

のように、実数値の関数  $W(x)$  を使って上記のような形で与えられるとき、このハミルトニアンは、ある演算子  $Q$  を使って

$$H = \frac{1}{2}Q^\dagger Q \quad (\text{A})$$

の形に表すことができる。 $Q$  が

$$Q = p + if(x)$$

のように、運動量  $p$  と座標  $x$  の実数値関数  $f(x)$  により表されると仮定して、 $f(x)$  を  $W(x)$  を用いて表せ。但し、ある  $f(x)$  を求めれば十分とし、唯一であるかどうかの議論は不要とする。

(2) ハミルトニアンが (A) のような形を持つと、エネルギー固有値  $E$  を持つ固有状態  $|\psi\rangle$  について、

$$E = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\langle Q\psi | Q\psi \rangle}{2\langle \psi | \psi \rangle}$$

が成り立つので、エネルギー固有値  $E$  はゼロまたは正である。基底状態のエネルギー固有値がゼロであると仮定した場合の基底状態の波動関数  $\psi_0(x)$  を求めよ。 $(W(x)$  を使って表せ。)

(3) 基底状態のエネルギーがゼロでないのはどのような場合か、 $W(x)$  に対する条件を答えよ。特に  $W(x) = -x^3$  の時は、基底状態のエネルギーはゼロか正か。

(4) ポテンシャル  $V(x)$  が

$$V(x) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{3}{2}x^2$$

のとき、これが問 (1) のように  $W(x)$  を用いて表されることを使って、基底状態の波動関数  $\psi_0(x)$  を求めよ。但し、波動関数の規格化定数は求めなくて良い。(ヒント:  $W(x)$  が単項式であると仮定して考えよ。)

(5) 以下では、ポテンシャルが、 $N$  を実数として

$$V_N(x) = \frac{1}{2}x^6 - \left(\frac{3}{2} + 2N\right)x^2$$

で与えられる場合を考える。この場合、 $V_N(x)$  を実数値の関数  $W(x)$  を使って、問 (1) にあるような形で表すことができないので、エネルギー固有値と波動関数を求めるには工夫が必要である。

(a) 問 (4) で求めた  $\psi_0(x)$  を使って、波動関数  $\psi_k(x)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) を

$$\psi_k(x) \equiv x^{2k}\psi_0(x)$$

で定義するとき、ハミルトニアン  $H = \frac{1}{2}p^2 + V_N(x)$  について、 $H\psi_k(x)$  を計算し、ハミルトニアンの行列表示の成分  $h_{kl}$

$$H\psi_k(x) = \sum_{l=0}^{\infty} h_{kl}\psi_l(x)$$

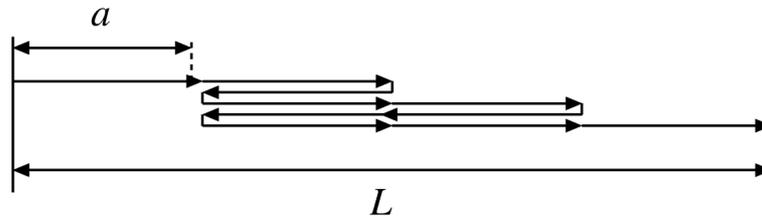
を求めよ。

(b)  $N$  が自然数のとき、波動関数  $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_N(x)$  の線形結合で得られる波動関数全体の線形空間を  $\mathcal{H}_N$  と書くことにする。 $\mathcal{H}_N$  の任意の波動関数  $\psi(x) \in \mathcal{H}_N$  について、 $H\psi(x)$  もその元となること ( $H\psi(x) \in \mathcal{H}_N$ ) を、問 (a) の結果から示せ。

(c) 問 (b) の結果から、ハミルトニアン  $H$  は、線形空間  $\mathcal{H}_N$  内にその作用を限れば、有限行列で表され、エネルギー固有値と波動関数を求める問題は、その有限行列の固有値と固有ベクトルを求める問題となる。 $N = 2$  の場合に、 $H$  の  $\mathcal{H}_{N=2}$  内の波動関数に対するエネルギー固有値と固有波動関数を求めよ。固有波動関数の規格化定数は求めなくて良い。

### II-3 (統計熱力学・ゴム弾性) (100 点)

ゴムの性質を統計力学を用いて理解しよう。最も簡単なモデルとして、質量と体積を無視できる長さ  $a$  の剛体棒分子  $N$  個が一直線につながった高分子鎖を考える。分子と分子の接合角は  $0$  度か  $180$  度しかとらないものとし、どちらの状態も等しいエネルギーを持つとして以下の問いに答えよ。ボルツマン定数を  $k_B$  とする。



- (1) 上図のように剛体棒分子に矢印をつけ（必ず先端と根元で接合する），右向きの矢印のついた分子の数を  $n_+$ ，左向きの数を  $n_-$  とする。  $N$  個の分子で作られる高分子鎖の始端から終端までの長さ  $L$  を求めよ。ただし  $n_+ \geq n_-$  とする。
- (2) さらにこのときの分子配置の総数  $W$  を求めよ。
- (3)  $n_+, n_-$  を  $L, N, a$  を使って表せ。(以降の問題では解答に  $n_+, n_-$  を用いてはいけない)
- (4) 始端から終端までの長さを  $L$  にした場合の鎖のエントロピー  $S(L)$  を求めよ。ただし無次元パラメータ  $\frac{L}{Na}$  のみの関数となるように答えを整理すること。  $N, n_+, n_- \gg 1$  として Stirling の公式 ( $\log N! \simeq N \log N - N$ ) を用いよ。
- (5) この高分子鎖が温度  $T$  の熱浴に接している。 Helmholtz の自由エネルギー  $F(T, L)$  を求めよ。
- (6) 両端距離を  $L$  に保持した時の張力  $P(T, L) = \left( \frac{\partial F(T, L)}{\partial L} \right)_T$  を求めよ。
- (7) 張力  $P(T, L)$  の等温線の概略図を描け。
- (8)  $L$  を固定して熱浴温度  $T$  を上げると，張力  $P$  は増加するか，それとも減少するか。またその理由を簡潔に述べよ。

現実のゴムの性質をより正確に説明するためには高分子鎖の内部エネルギー  $E$  を考慮する必要がある。上のモデルで 1 分子当たり  $k_B T$  の内部エネルギーを持つとすれば  $E = N k_B T$  となり，内部エネルギーは温度だけの関数になる（したがって張力  $P(T, L)$  については問題 (6) と同じになる）。

- (9) 上のような内部エネルギー  $E = N k_B T$  を持つ高分子鎖が温度  $T_0$  の熱浴に接し，  $L = L_0$  の状態にある。この高分子鎖を熱浴から切り離し，  $L = L_1$  まで断熱伸張させた。このとき高分子鎖の温度  $T_1$  を求めよ。ただし  $L_0 < L_1 \ll Na$  である。必要なら Maxwell の関係式  $\left( \frac{\partial S}{\partial L} \right)_T = - \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_L$  を用いてよい。

## 平成 15 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

(1) 問題は III-1 から III-7 まで 7 問ある。これから 3 問 選択せよ。

なお、各問題は以下の通りである。

III-1(電子回路)

III-2( $\gamma$ 線の測定)

III-3(核スピンの偏極)

III-4(粒子の収束)

III-5(電磁放射)

III-6(物理数学)

III-7(量子力学・光と原子の相互作用)

(2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。

(3) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

### III-1 (電子回路) (100 点)

- (1) p 型と n 型の 2 つの半導体を接合した一般的な pn 接合ダイオードについて、図 1 のように電圧  $V$  と電流  $I$  を設定した場合の  $V - I$  特性 (横軸  $V$ 、縦軸  $I$ ) の概形を描け。

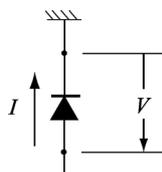


図 1

- (2) pnp 型のトランジスタは 2 つの p 型半導体の間に薄い n 型半導体を接合したものである。トランジスタの重要な特徴として電流の増幅作用がある。以下、図 2 のようなトランジスタ回路について考察してみよう。

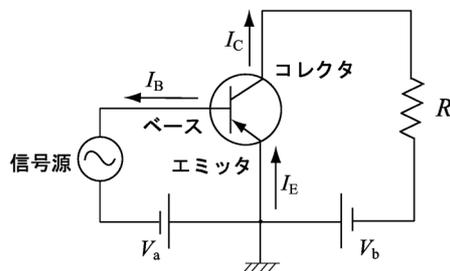


図 2

- (a) 今、エミッタ電流  $I_E$  に対するコレクタ電流  $I_C$  の利得を  $\alpha = I_C/I_E$  として、

$\beta = I_C/I_B$  を  $\alpha$  で表せ。また、 $\alpha$  の値が 1 に近い場合に対して、トランジスタの増幅作用について簡単に記せ。

- (b) コレクタ電流  $I_C$  がベース電流  $I_B$  に比例するようなある動作点で、トランジスタの特性を図 3 のような四端子回路と見なして考えてみよう。

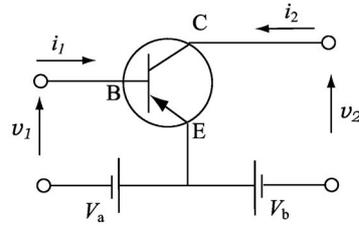


図 3

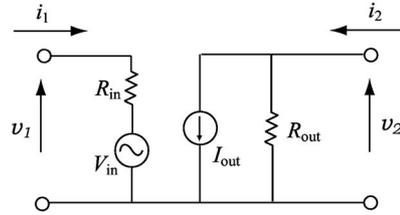


図 4

微小な電流変化  $i_1$  と微小な電圧変化  $v_2$  をパラメータとすると微小な電流変化  $i_2$  と微小な電圧変化  $v_1$  は、

$$v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2,$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2$$

と表すことができる。図 4 のような等価回路を考えたとき、抵抗  $R_{in}$ 、電圧  $V_{in}$ 、電流  $I_{out}$ 、抵抗  $R_{out}$ 、を  $h_{11}$ 、 $h_{12}$ 、 $h_{21}$ 、 $h_{22}$ 、 $i_1$ 、 $v_2$  で表せ。

- (c) ここで、(b) で考えた四端子回路の入力側に信号源  $v_1$  と出力側に抵抗  $R$  を接続した場合を考えよう。これは図 2 の回路に相当するものである。このとき、電流利得  $i_2/i_1$  および電圧利得  $v_2/v_1$  を  $h_{11}$ 、 $h_{12}$ 、 $h_{21}$ 、 $h_{22}$  および  $R$  を用いて表せ。
- (d) (c) において最大電力利得を与える抵抗  $R$  を  $h_{11}$ 、 $h_{12}$ 、 $h_{21}$ 、 $h_{22}$  を用いて表せ。
- (e) ここで、トランジスタの特性が、  
 $h_{11} = 4 \times 10^3(\Omega)$ 、 $h_{12} = 3 \times 10^{-4}$ 、 $h_{21} = 5 \times 10^2$ 、 $h_{22} = 5 \times 10^{-5}(\Omega^{-1})$ 、  
 で与えられた場合、最大電力利得を与える抵抗  $R$  の値を求め、そのときの電圧利得と電流利得を求めよ。

- (3) 下図は、電流、電圧の方向だけが逆で他の特性が等しい PNP と NPN のトランジスタを用いた B 級プッシュプル回路の原理を示したものである。正弦波入力信号に対しての増幅動作を定性的に説明せよ。

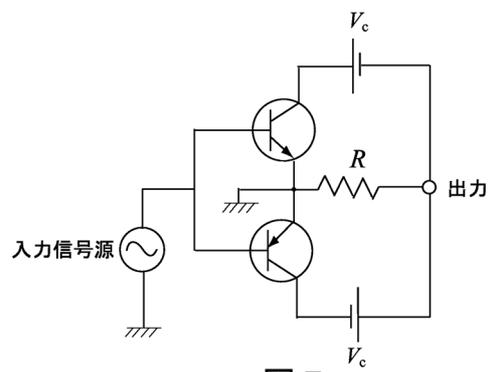


图 5

### III-2 ( $\gamma$ 線の測定) (100点)

(1) (a)  $\gamma$ 線のエネルギースペクトル測定または時間スペクトル測定をするために必要な検出器を1つ挙げ、その検出器内で起こる $\gamma$ 線と物質との相互作用について説明せよ。なお、測定対象とする $\gamma$ 線のエネルギーは数keVから10MeV程度までの範囲で選んでよいが、解答には選んだエネルギー領域と選んだスペクトルの種類(エネルギースペクトルか時間スペクトルか)を記し、エネルギースペクトルの場合にはエネルギー分解能のオーダーを、時間スペクトルの場合には時間分解能のオーダーについても記せ。

(b) 以下の、放射線測定に用いられる装置のうちから2つを選び、使用する測定例を挙げてその機能について説明せよ。なお、測定例については2つの装置に対して同じでも違っていてもどちらでもよい。

- 前置増幅器 (Preamplifier)
- 波高弁別器 (Discriminator)
- TAC(Time-to-Amplitude Converter)
- TDC(Time-to-Digital Converter)
- ADC(Amplitude-to-Digital Converter)
- MCS(Multi Channel Scaler)

(2)  $\gamma$ 線のエネルギーを微小変化させる方法について考察してみよう。今、真空中の点Aにおいた小型線源から放射される $\gamma$ 線を考えよう。この地点から距離 $x$ だけ離れたB点の時刻 $t$ における $\gamma$ 線の電場成分は、振幅を $E_0$ 、角振動数を $\omega$ とすると、 $E = E_0 \exp(i\omega(t - x/c))$ であったとしよう。ここで、光速を $c$ とした。

(a) このA点とB点の間に長さ $L(< x)$ 、屈折率 $n$ の物質を置いてみよう。このときのB点における電場成分は $E = E_0 \exp(i\omega(t - x/c) + i\phi)$ となる。このときの $\phi$ を求めよ。

(b) この $\phi$ を時間変化させることが出来たとしよう。いま、 $\phi = \omega' t$  ( $\omega' = d\phi/dt = \text{constant}$ ) とおくと、B点で観測される $\gamma$ 線のエネルギーはどれだけか。

(c)  $^{181}\text{Ta}$ の第1励起準位(6.238keV)の半減期は $6.05\mu\text{s}$ である。この準位の自然幅のオーダーを求めよ。

(d) 6.238 keVの $\gamma$ 線のエネルギーを $1.0 \times 10^{-10}\text{eV}$ だけ変化させたい。これを実験的に実行するために、上述の位相変化をどのように実現すればよいか述べよ。なお、 $(1 - n) \sim 1 \times 10^{-6}$ であるとせよ。

(e) (d)で論じた以外の方法で $^{57}\text{Co}$ 線源からの14.4 keVの $\gamma$ 線のエネルギーを100 neVだけ変化させる実行可能な方法について述べよ。

### III-3 (核スピンの偏極) (100点)

固体中の高偏極した原子核スピンを用いて興味深い研究が行われてきている。しかし、核スピンを高偏極させるには工夫を要する。以降においては簡単のため核スピンは $1/2$ とする。ここで、磁気回転比を $\gamma$ とすると、ゼーマン相互作用は $E_Z = -\gamma\hbar m_z B$ とあらわされる。ただし $B$ は $z$ 方向に印加された磁場の大きさをあらわし、 $m_z = \pm 1/2$ はスピン磁気量子数をあらわす。

- (1) 磁場 $B$ 中の核スピンの温度 $T_n$ で熱平衡しているときのスピン偏極率

$$P = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}$$

を求めよ。ここで、 $N_+$ および $N_-$ はスピン磁気量子数 $m_z$ がそれぞれ $+1/2$ および $-1/2$ の状態の存在確率である。ただし、ボルツマン定数を $k_B$ とする。

- (2) 陽子核スピンの場合、磁気回転比 $\gamma_p = 2\pi \times 42\text{MHz/T}$ である。 $B = 10\text{T}$ 、 $T_n = 2\text{K}$ のときの核スピン偏極率を求めよ。また、磁気回転比 $\gamma_e = -2\pi \times 28\text{GHz/T}$ の場合にはどうなるか答えよ。この場合は電子スピンの場合と相当する。ただし $k_B = 1.4 \times 10^{-23}\text{J/K}$ およびプランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34}\text{Js}$ として計算せよ。
- (3) (a) 固体の試料を $4\text{K}$ 以下の温度に冷却するには、具体的にどのような方法があるか、またその温度はどのようにして測定することができるか、それぞれ例を挙げよ。
- (b)  $5\text{T}$ 以上の磁場を生成するには、具体的にどのような方法があるか、またその磁場の値はどのようにして測定することができるか、それぞれ例を挙げよ。
- (4) 偏極した核スピンの信号を観測するには、核磁気共鳴法 (NMR)、放射線の非等方性の測定、メスバウアー分光法など様々な方法がある。1例をとり挙げ、その原理を説明せよ。

このように、上記のような極低温、高磁場中において電子スピンはほぼ完全に偏極しているが、陽子核スピンはほとんど偏極していない。そこで、この電子スピン偏極を陽子核スピンの移行させることを考える。

- (5) 電子スピン1つと陽子核スピン1つの系を考える。高磁場 $B$ においては4つのエネルギー準位に分裂し、磁気双極子相互作用により状態はわずかに混合する(ただし、エネルギーシフトは小さく無視できるとする)。このような状況では電子スピン共鳴(電子スピン間に遷移を起こさせること)のスペクトルが3本観測される。この3本の共鳴周波数を電子の磁気回転比 $\gamma_e$ 、陽子核の磁気回転比 $\gamma_p$ 、および磁場 $B$ を用いて答えよ。
- (6) 3本の電子スピン共鳴線のうち、特定の共鳴線のみを励起して飽和させる(上準位と下準位の存在確率を等しくさせる)ことにより電子スピン偏極を陽子核スピンの移行させることができる。電子スピン系は緩和時間が短く常に熱平衡しているとし、また陽子核スピン系の緩和時間は非常に長いとして、これを説明せよ。これは「固体効果」と呼ばれている。

### III-4 (力学・粒子の収束)(100点)

空間の一点で生成され、ばらばらな方向に運動する荷電粒子(電荷  $e$ )を、一つの方向( $+z$ 軸)に出来るだけ揃えたい。その方法の一つにソレノイド電磁石を利用する方法が考えられている。(ソレノイド磁石とは、円筒の円の周りに電流を流し、軸方向に一様な磁場を作る電磁石である。) (下図参照)

荷電粒子(電荷  $e$ , 質量  $m$ )の電磁場中での非相対論的運動のラグランジアンは、 $\vec{v}$ を粒子の速度、 $\vec{H}$ を磁場、 $\vec{E}$ を電場、 $c$ を光速とすると、

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{e}{c}\vec{A} \cdot \vec{v} - e\phi, (\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$$

で与えられる。

- (1) ラグランジュ方程式をポテンシャル  $\vec{A}, \phi$  を使って書き下せ。(必要ならベクトル解析の公式  $\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b})$  を使って良い)

- (2) 粒子の運動方程式は、

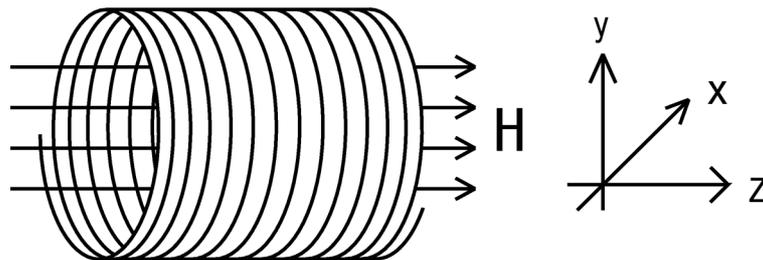
$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{H}$$

で与えられることを示せ。

- (3) 以下ソレノイド磁石の半径は十分大きいと仮定する。いま電場は零、磁場は一様であるとし  $\vec{H}$  の方向を  $z$  軸として、 $(v_{0x}, 0, v_{0z})$  の速度成分を持って生成された粒子は、らせん運動をすることを示せ。

- (4) 運動の条件がゆっくり変化するとき、断熱不変量として知られる量は不変である。いま磁場が  $z$  軸の関数として、ゆるやかに(断熱的に)減少するソレノイド磁石を考える。らせん運動において、磁場と垂直な  $x-y$  面での粒子の運動は周期的であるから一つの断熱不変量は、円周にわたってとった積分  $\oint \vec{P}_t \cdot d\vec{r}_t$  ( $\vec{P}_t$  は一般化運動量の  $x-y$  面への射影) である。断熱不変量を  $v_{0x}$  と  $|\vec{H}|$  の関数として求めよ。

- (5)  $z$  軸に垂直な運動量成分 ( $m\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ) は、 $+z$  に進むに従い、 $\sqrt{|\vec{H}|}$  に比例して減少することを示せ。また十分強い磁場の領域には粒子が進入できないことを示せ。



### III-5 (電磁放射) (100 点)

ポテンシャル  $U(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\omega_0^2|\mathbf{x}|^2$  に束縛されて原点付近を運動する電子 (質量  $m$ 、電荷  $e$ ) からの電磁波の放射について考える。

- (1) 電子が軌道  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  に沿って運動しているとき、時空点  $(\mathbf{r}, t) = (x, y, z, t)$  における電磁場は、次式の Liénard-Wiechert のポテンシャルから求められる。

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t_0)| - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{x}}(t_0) \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{x}(t_0)]}, \quad (\text{A})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{x}}(t_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t_0)| - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{x}}(t_0) \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{x}(t_0)]}. \quad (\text{B})$$

ここで、 $\epsilon_0$  は真空の誘電率、 $\mu_0$  は真空の透磁率、 $c$  は光速 ( $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ )、 $\dot{\mathbf{x}}(t_0) = d\mathbf{x}(t_0)/dt_0$  であり、 $t_0$  は

$$t_0 = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t_0)|}{c} \quad (\text{C})$$

の解として定まる。以下では、原点から十分離れた点  $\mathbf{r}$  における電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  と磁場  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  を、定義式

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{D})$$

から求めたい。ただし、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$  である。また、以下では、電子の速度は光速よりも十分に小さいと仮定する。

- (a) 条件  $|\mathbf{x}(t)| \ll |\mathbf{r}|$  及び  $|\dot{\mathbf{x}}(t)| \ll c$  の下では、 $t_0$  の  $\mathbf{r}$  と  $t$  に関する偏微分を

$$\nabla t_0 = -\frac{\mathbf{n}}{c}, \quad \frac{\partial t_0}{\partial t} = 1 \quad (\text{E})$$

と近似してよいことを示せ。ここで、 $\mathbf{n} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$  である。

- (b) 上式 (E) の近似を用いて、電場と磁場の無限遠での漸近形

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{x}})}{|\mathbf{r}|}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{F})$$

を導け。ここで、 $\ddot{\mathbf{x}} = d^2\mathbf{x}(t)/dt^2$  である。

- (c) Poynting ベクトル  $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  を用いて、電磁波の放射により電子が単位時間あたりに失うエネルギーが

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} |\ddot{\mathbf{x}}|^2 \quad (\text{G})$$

となることを示せ。

- (2) 上の (1) で計算したように、加速度をもって運動する電子は電磁波を放射することによって力学的エネルギーを失っていく。この電磁波の放射の反作用は、電子の運動方程式に減衰力として取り入れることができる。電子が周期的な運動をしており、

ある時刻  $t_1$  と  $t_2$  において  $\dot{\boldsymbol{x}}(t_1) = \dot{\boldsymbol{x}}(t_2) = \mathbf{0}$  をみたすとしよう ( $t_1 < t_2$ )。このとき、時刻  $t = t_1$  から  $t = t_2$  までに減衰力  $\boldsymbol{F}$  が電子になす仕事と電磁波の放射エネルギーを等しいとおくことにより、減衰力が

$$\boldsymbol{F} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^3 \boldsymbol{x}}{dt^3} \quad (\text{H})$$

と書けることを示せ。

(3) (2) で求めた減衰力を含めると、電子の運動方程式は

$$m \frac{d^2 \boldsymbol{x}}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} U(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{F} \quad (\text{I})$$

となる。電子が時刻  $t = 0$  に  $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$  にあり、 $t > 0$  で減衰振動するとき、運動方程式 (I) の解は

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t) \quad (t > 0) \quad (\text{J})$$

とおける。 $\gamma \ll \omega_0$  を仮定して、 $\gamma$  を求めよ。

(4) 式 (J) の運動をする電子は電磁波を放射する。放射されるエネルギーの時間依存性の概形を  $t > 0$  の領域で図示せよ。

### III-6 (物理数学) (100 点)

温度分布関数  $T(x, t)$  は、熱伝導方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

に従って時間発展する ( $\kappa > 0$ ,  $-\infty < x < \infty$ )。

- (1) 時刻  $t = 0$  において温度分布が  $T(x, 0) = \delta(x)$  のとき、熱伝導方程式を Fourier 変換

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{T}(k, t) e^{ikx}$$

を用いて解け。但し、デルタ関数の Fourier 変換

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}$$

及びガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

を用いてよい。

- (2) 初期条件が

$$T(x, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$$

で与えられたとき、 $T(x, t)$  を以下の 2 通りの方法で求めよう。

- (a) 熱伝導方程式は線形であることから、(1) の解を用いて  $T(x, t)$  を書き下せ。  
(b)  $T(x, t)$  は周期 1 の  $x$  の周期関数である。したがって、

$$T(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_k(t) e^{2\pi i k x}$$

と Fourier 級数に展開できる。 $T(x, 0)$  も同様に Fourier 展開することにより、 $T(x, t)$  を求めよ。

- (c) 次の恒等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-n)^2}{\tau}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x - \pi^2 k^2 \tau}$$

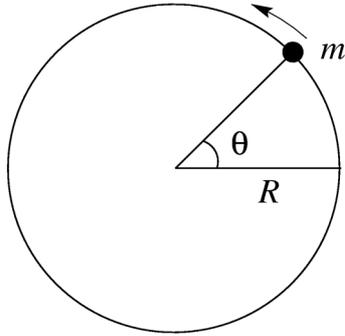
- (3) 半径  $R$  の円周上を運動する質量  $m$  の粒子 (下図参照) は、Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \psi(\theta) = E\psi(\theta), \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

に従う。波動関数  $\psi$  は角度変数  $\theta$  の一価関数とする:  $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$ 。

- (a) この粒子のエネルギー固有値  $E_n$  をすべて求めよ ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )。

- (b) このような粒子の集団が温度  $T$  の熱平衡状態にあるとき、(a) で求めたエネルギー固有値  $E_n$  から分配関数  $Z(T) = \sum_n e^{-E_n/k_B T}$  と自由エネルギー  $F(T) = -k_B T \ln Z(T)$  が定義できる。このとき、この系の比熱  $C(T)$  は、 $C = -T d^2 F / dT^2$  で与えられる。低温極限 ( $k_B T \ll h^2/mR^2$ ) での比熱の温度依存性と、高温極限 ( $k_B T \gg h^2/mR^2$ ) での比熱の漸近値を求めよ。



### III-7 (量子力学・光と原子の相互作用) (100点)

単一モードの光 (角周波数  $\omega$ ) と 2 準位原子 (励起状態  $|e\rangle$  及び基底状態  $|g\rangle$ ) との相互作用を量子力学的に取り扱う。ただし、励起状態  $|e\rangle$  のエネルギーを  $+h\omega_0/2$ 、基底状態  $|g\rangle$  のエネルギーを  $-h\omega_0/2$  とし、 $\omega \cong \omega_0$  とする。

まず、単一モードの光について考察する。光のハミルトニアン  $\hat{H}_F$  は  $\hat{H}_F = h\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$  であらわされる。ここで  $\hat{a}^\dagger$  および  $\hat{a}$  は光子の生成および消滅演算子で、交換関係  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$  を満たす。

- (1) 光子数状態  $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) がエネルギー固有状態であることを示し、そのエネルギー固有値を求めよ。ただし、 $|0\rangle$  は  $\hat{a}|0\rangle = 0$  で定義される基底状態 (真空) をあらわす。

次に原子との相互作用を考える。原子系のハミルトニアン  $\hat{H}_A$  は  $\hat{H}_A = h\omega_0\hat{S}_z$  であらわされ、また相互作用ハミルトニアン  $\hat{H}_I$  は回転波近似のもとでは、 $\hat{H}_I = h\chi(\hat{S}_+\hat{a} + \hat{S}_-\hat{a}^\dagger)$  とあらわされる。ここで  $\hat{S}_z = \frac{1}{2}(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)$ 、 $\hat{S}_+ = |e\rangle\langle g|$ 、 $\hat{S}_- = |g\rangle\langle e|$  であり、 $\chi$  は実定数で、 $0 \leq \chi \ll \omega$  とする。

- (2) 相互作用のないとき ( $\chi = 0$ )、全系の固有状態は、 $\hat{H}_A$  の固有状態  $|e\rangle$  及び  $|g\rangle$  と  $\hat{H}_F$  の固有状態  $|n\rangle$  の直積  $|e, n\rangle \equiv |e\rangle \otimes |n\rangle$  および  $|g, n\rangle \equiv |g\rangle \otimes |n\rangle$  となる。このときのエネルギー固有値をもとめよ。
- (3) 相互作用のあるとき ( $\chi > 0$ ) を考える。
- (a) 相互作用ハミルトニアン  $\hat{H}_I$  は  $|e, n\rangle$  と  $|g, n+1\rangle$  の間にのみ遷移振幅をもち、他の状態間ではゼロである。遷移振幅  $\langle e, n | \hat{H}_I | g, n+1 \rangle$  を求めよ。
- (b) 全系のエネルギー固有値を求めよ。そして、特に  $\omega_0 = \omega$  のときの固有状態を求め、エネルギー構造を図示せよ。

ここで求めた状態は、原子と光の相互作用をすでに取り入れた状態で、光子の衣を着た状態「ドレスド状態」と呼ばれている。時刻  $t$  での全系の波動関数  $|\Psi(t)\rangle$  はこのドレスド状態の線形結合であらわされる。

- (4)  $\omega_0 = \omega$  の場合を考える。系の初期状態は、 $|\Psi(t=0)\rangle = |e, n\rangle$  とする。この場合の波動関数  $|\Psi(t)\rangle$  を求めよ。特に、 $n = 0$  (真空) の場合について励起状態  $|e\rangle$  の存在確率  $P_e(t) = |\langle e | \Psi(t) \rangle|^2$  を求めよ。