平成14年度大学院入学試験問題　I　(3時間)

注意
(1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の用紙1枚に記入せよ（裏面を用いてもよい)。
(2) 各用紙ごとに，左上に問題番号，右上に受験番号と氏名を記入せよ。

I-1 (力学) (100 点)

２つの星の運動を考えよう。この系を２重星系と呼ぼう。２重星系の運動は万有引力に従って運動する２つの質点の運動と同じとみなすことができる。それぞれの星を星１ (質量 m_1, 座標 $\mathbf{r}_1$)，星２ (質量 m_2, 座標 $\mathbf{r}_2$) と呼ぶ。

(1) 万有引力定数を G として，両星間の重力ポテンシャルエネルギー ψ を書け。

(2) ２重星系のラグランジアン L を書け。

(3) 慣性中心座標 $\mathbf{R}$ と相対座標 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ を用いてラグランジアンを書け。

(4) 慣性中心の運動方程式を導いて解け。

(5) 相対座標の運動方程式を求めよ。

(6) 相対運動の軌道は，楕円，放物線または双曲線になることが知られている。今，特別な場合として半径 a の円軌道のとき，角速度 Ω を求めよ。また，相対運動の全エネルギーを求めよ。

(7) 今，相対運動が円軌道である２重星の片方（星１）が急に爆発して，星の一部が吹っ飛び，質量が m_1 から $m_1'(< m_1)$ になったとしよう。この後の両星の運動は一般には複雑であるが，次のような簡単化をして考えよう。爆発は，極めて等方で，ほとんど瞬間的に起こったので，星１と星２の位置と速度は変わらず，星２の質量も変わらず，星１の質量が減っただけと見なせるとする。また，爆発で飛び散った物質は急速に遠方に遠去かったので，両星に影響をおよぼさない。従って両星の爆発後の運動は万有引力に従って運動する２つの質点の運動とみなすことが再び成り立つとする。
　このとき，

(a) 爆発後の両星の慣性中心の速度を求めよ。
(b) 爆発後の星１，星２の慣性中心に対する相対速度をそれぞれ求めよ。
(c) 相対運動のエネルギーを求めて，爆発後に両星が束縛されない条件を求めよ。

I-2 (量子力学 [電子間相互作用]) (100 点)

結晶中の隣接する 2 格子点 $\mathbf{R}_1$，$\mathbf{R}_2$ を考える。今，簡単化して，これらの 2 格子点 $\mathbf{R}_1$，$\mathbf{R}_2$ にある同一原子 (水素原子とする) 1 と 2 のみを考える。2 つの原子それぞれの最低エネルギーの原子軌道（1s 軌道）$\phi_1(\mathbf{r}) = \phi_s(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1)$， $\phi_2(\mathbf{r}) = \phi_s(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2)$ を考え，この 2 つの軌道の間の重なり積分は無視できるとする。各原子が孤立している時のハミルトニアンを $\mathcal{H}_0$ として

$$\mathcal{H}_0\phi_s(\mathbf{r}) = E_0\phi_s(\mathbf{r})$$

であり，E_0 は 1 原子の最低電子軌道 (1s 軌道）のエネルギーである。ハミルトニアンの遷移行列要素 $\mathcal{H}_{12}$，$\mathcal{H}_{21}$ は

$$\mathcal{H}_{21}\phi_1(\mathbf{r}) = -t\phi_2(\mathbf{r}) \tag{A}$$

$$\mathcal{H}_{12}\phi_2(\mathbf{r}) = -t\phi_1(\mathbf{r}) \tag{B}$$

とし，電子がこの行列要素 $-t(t > 0)$ で格子点を移動する。以下の問に答えよ。

ただし，2 電子を詰めたときは常にスピン一重項状態 (singlet 状態) にあるとする。そのスピン波動関数は $\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)]$ と表される。ここで，α，β はそれぞれ上向き，下向きのスピン状態，1，2 は電子を表す。

(1) (a) 原子軌道 ϕ_1 と ϕ_2 の間に式 (A)，(B) の遷移行列 $-t$ が働いた時の 2 つの 1 電子軌道とその固有エネルギーを求めよ。この 1 電子軌道は H_2^+ の 1 電子軌道に対応する。

(b) 2 原子の系に 2 電子 $\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$ が存在するとする。前問 (a) で得られた低い方の 1 電子状態に，上向きと下向きのスピンを持つ 2 電子を独立に詰めたスピン一重項状態の軌道部分の波動関数を問 (a) の結果を利用して書け。この状態は原子が正負に分極した状態と中性の状態が等確率で現れることを示していることを説明せよ。

(2) 現実には問 (1) で考えた場合とは異なり，電子は互いに独立ではなく，同じ格子点の原子に 2 個の電子が来るとクーロン反発のエネルギー U だけエネルギーが上がる。今，$U \neq 0$ とし，しかし，簡単のために $t = 0$ として次の (a)，(b) の場合のスピン一重項の 2 電子波動関数とそのエネルギーを示せ。ただし，異なる格子点上にある電子間のクーロン斥力は無視できるとする。

(a) 2 個の電子 $\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$ がそれぞれ異なる原子の軌道に 1 個ずつ分かれて詰まり，原子が中性である時。

(b) 2 個の電子 $\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$ がどちらかの同じ原子の軌道に詰まり，原子が正と負に分極している時。

(3) 問 (2) の状態に $-t$ がゼロでないとして電子の移動を許し，しかも電子間のクーロン相互作用 U が働いた時の基底状態であるスピン一重項の固有関数とエネルギーを求めよ。
ヒント：問 (2)(a) と問 (2)(b) の状態の波動関数の線形結合を考えエネルギーを最小にする。

I-3 (熱力学) (100 点)

磁化 M を持つ磁性体が磁場 H の中にある。一般に磁性体の内部エネルギーの微小変化は，温度を T，エントロピーを S，圧力を P，体積を V として，$dU = TdS + HdM - PdV$ と書ける。ここでは固体を考え，体積変化は小さいとして無視する。この場合，内部エネルギーの微小変化は $dU = TdS + HdM$ となる。以下の問に答えよ。

(1) (a) $F = U - TS$ で定義される Helmholtz の自由エネルギーの微小変化を求めよ。

(b) 独立変数が T と M の場合，Maxwell の関係式 $(\partial H/\partial T)_M = -(\partial S/\partial M)_T$ が成り立つことを示せ。

(2) 一般に常磁性体は高温でキュリー則を満たす。$M = (a/T)H$ (a：$a > 0$ である定数) とし，キュリー則を満たす磁性体の内部エネルギー U と M 一定での熱容量 C_M が M に依存しないことを示せ。(独立変数として T と M を用いよ)

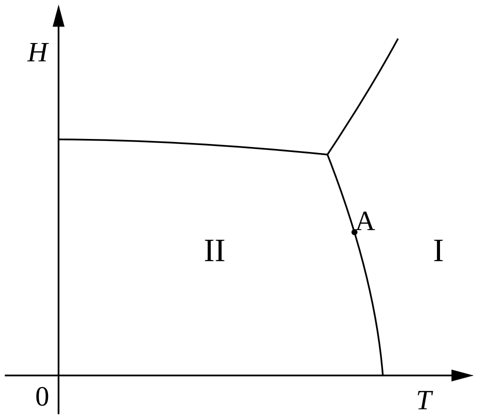
(3) 簡単のため $C_M = b/T^2$ (b：$b > 0$ である定数) と仮定しよう。系のエントロピー，Helmholtz の自由エネルギー F，H 一定での熱容量 C_H， 断熱帯磁率 χ_S を求めよ。ただし，$T = T_0$ で $S = S_0$，$F = F_0$ とする。

(4) いま，上記の系が外部磁場 H_0 の中にあり，$T = T_0$ であるとする。断熱的に外部磁場をゼロにした時，温度はいくらになるか。

(5) 通常，常磁性体は低温でスピンが整列した秩序相に転移する。下図のような相図が得られているものとする。いま点 A は 2 相の共存曲線上にあるとする。

(a) Gibbs の自由エネルギーを $G = U - TS - HM$ と定義する。共存曲線上を動く限り 2 相の Gibbs の自由エネルギーの微小変化 dG は一致していなければならない。いま点 A の近傍で相 I，相 II がそれぞれエントロピー S_I，S_{II}，磁化 M_I，M_{II} を持っているとする。dH/dT を S_I, S_{II}, M_I, M_{II} を用いて表せ。(Clausius-Clapeyron の式)

(b) 図中の点 A において 1 次の相転移をするとし，$S_I > S_{II}$ であるとする。M_I と M_{II} はどのような関係にあるかを示せ。



平成 14 年度大学院入学試験問題　II　(3 時間 30 分)

注意

(1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ（裏面を用いてもよい）。

(2) 各用紙ごとに，左上に問題番号，右上に受験番号と氏名を記入せよ。

II-1 (電磁波) (100 点)

一様な電離層および導体内における電磁波の伝播について考えよう。
まず始めに空気分子がイオンと電子に分離している電離層での電磁波の振る舞いについて考える。いま電子の密度を N，電荷を $-e$，質量を m として高周波電場 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ によって電子だけが動きうるとする。また，電子とイオンの衝突は考えない。

(1) 電磁場内での電子の運動方程式を書け。この時電子の速度が光速 c にくらべて充分小さい時は，電磁波の高周波磁場 $\mathbf{B}$ による項が無視できることを示せ。

(2) 電子の運動によって生ずる電流密度を $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ で表したときの電気伝導率 σ を求めよ。

(3) 空間電荷密度はゼロとしたとき，Maxwell 方程式

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\ \ \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\mathbf{B} = \epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

から $\mathbf{E}$ にたいして次の方程式が成立することを示せ。

$$\nabla^2\mathbf{E} - \sigma\mu_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

(4) 電離層内を z 方向に伝播する電磁波を $E_x(z,t) = E_0 e^{i(kz-\omega t)}$ として，この電磁波の分散関係式

$$k^2 = (\omega^2/c^2)\gamma \qquad \text{(A)}$$

を導き，γ を求めよ。γ が 0 となる周波数 ω_{p}（プラズマ周波数）を導き，電離層に対して電磁波はこの周波数の前後でどう振舞うか述べよ。

次に電子密度 n の導体内での電磁波の伝播について考えよう。導体内の電子は物質中の欠陥と衝突することによって速度に比例する抵抗を受ける。電子が散乱されることなく自由運動できる時間（緩和時間）を τ とすると，電子の速度を $\mathbf{v}$ として，外力 $\mathbf{F}$ のもとでの電子の運動方程式は

$$\mathbf{F} = m(d/dt + 1/\tau)\mathbf{v} \qquad \text{(B)}$$

で与えられる。

(5) $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ の電場によって電子が駆動され，電流密度 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 e^{-i\omega t}$ が得られたとしてこのときの電気伝導率 σ ($\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$) を求めよ。

(6) 導体に対して式 (A) を適用し，$\omega\tau \gg 1$ のとき，この導体のプラズマ周波数 ω_p より高い周波数の電磁波は導体中を伝播することを示せ。ただし，$\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$ とする。

次にこの導体に強い静磁場 $\mathbf{B}_0$ $(\omega_c\tau \gg 1\ ,\ \omega_c = eB_0/m)$ が z 方向にかけられている場合を考えよう。

(7) 式 (B) をもとに，円偏光した電磁波の高周波電場 $(E_x = E_0 e^{-i\omega t}\ ,\ E_y = iE_x)$ における電流密度 J_x を ω_c を使って表し，電気伝導率 $\sigma_x = J_x/E_x$ を導け。

(8) z 方向に伝播する円偏光電磁波 $(E_x = E_0 e^{i(kz-\omega t)},\ E_y = iE_x)$ について式 (A) を適用すると，$\omega \ll \omega_c$ のとき電磁波が導体内を伝わることを示せ。また，$\omega_c < \omega_p$ のとき，その位相速度を求めよ。この電磁波はヘリコン波と呼ばれる。

II-2 (統計力学) (100 点)

(1) 非常に多くの N 個の相互作用の無視できる粒子からなる系を考える。各粒子は，独立に基底状態 (エネルギー 0)，または励起状態 (エネルギー ε) のいずれかの状態をとることができる。この粒子系が熱源 (温度 T) と接触し，熱平衡状態にあるものとする。この粒子系について，粒子数一定として以下の問いに答えよ。

(a) 分配関数 Z を求めよ。

(b) 内部エネルギー U を求めよ。

(c) 熱容量 C を求めよ。また，高温の極限 ($T \gg \varepsilon/k_B$) と低温の極限 ($T \ll \varepsilon/k_B$) における熱容量を求めよ。ここで，k_B はボルツマン定数である。この結果をもとに，熱容量の温度に対する変化の概略をグラフに示せ。

(d) エントロピーを温度 T の関数として求めよ。

(2) 非常に多くの総数 N 個の相互作用の無視できる粒子からなる系を考える。個々の粒子の運動として許される量子状態をエネルギーの等しいグループに分け，j 番目のグループに含まれる状態の数を $c_j(\gg 1)$，その状態にある粒子数を $n_j(\gg 1)$，エネルギーを ε_j，全系のエネルギーを E とする。粒子系がフェルミ粒子，ボース粒子の場合について，それぞれ以下の問いに答えよ。

(a) j 番目のグループに含まれる状態の数 c_j，その状態にある粒子数 n_j，を用いて，このグループにおいて統計的に許される場合の数 W_j を求めよ。また，それぞれのグループが独立した系と見なせることから，全粒子系の統計的に許される場合の数 W を求めよ。

(b) スターリングの近似式 ($N \gg 1$ のとき $\log_e N! \approx N \log_e N - N$) を用いて，問 (2)(a) の結果から全粒子系のエントロピー S を求めよ。

(c) j 番目のグループに含まれる状態にある粒子の平均数 $\langle n_j \rangle = n_j/c_j$ を導入して，問 (2)(b) で求めた全粒子系のエントロピー S を c_j と $\langle n_j \rangle$ の関数として表した上で，全粒子系にある粒子の総数 N と全系のエネルギー E が一定であるという条件の下で，エントロピー S が極大値をとるような $\langle n_j \rangle$ を求めよ。ただし，ラグランジェの未定定数法を用いよ。その際，未定定数は体積一定のもとでの熱力学的恒等式 $TdS = dE - \mu dN$ から定めよ。ここで T は温度，μ は化学ポテンシャルである。

II-3 (量子力学) (100 点)

磁場中にある水素原子を考えよう。水素原子は陽子 1 個と電子 1 個からなる。陽子，電子共に大きさ 1/2 のスピンを持っている。そのため磁場中にある場合，そのエネルギー準位は磁場の大きさや陽子，電子のスピン状態に依存する。以下，水素原子の波動関数のスピン部分のみについて考えることとし，$\mathbf{S}$，$\mathbf{I}$ をそれぞれ電子と陽子のスピン演算子としよう。$\hat{S}_x$，$\hat{I}_x$ 等は各演算子の x 方向成分等を表すものとする。以下の問いに答えよ。

(1) (a) $\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y$，$\hat{S}_- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y$ と定義する。これらと $\hat{S}_z$ との交換関係から $\hat{S}_+$ と $\hat{S}_-$ が昇降演算子であることを示せ。

(b) $\hat{S}_+|S, S_z\rangle$，$\hat{S}_-|S, S_z\rangle$ の演算結果を示せ。ただし $|S, S_z\rangle$ は $\mathbf{S}^2|S, S_z\rangle = S(S+1)|S, S_z\rangle$，$\hat{S}_z|S, S_z\rangle = S_z|S, S_z\rangle$ を満たす状態である。

(2) 水素原子の状態を電子スピンの z 成分 S_z と陽子スピンの z 成分 I_z を用いて $|S_z, I_z\rangle$ と表そう。S_z，I_z はそれぞれ $\pm 1/2$ をとりうるので，合計 4 つの状態が存在する。$S_z = \pm 1/2$ のそれぞれについて $\hat{S}_x|S_z, I_z\rangle$，$\hat{S}_y|S_z, I_z\rangle$ を求めよ。

(3) 磁場 $\mathbf{B}$ 中にある水素原子のスピン部分のハミルトニアンは $\mathcal{H} = -(-g_e\mu_B\mathbf{S} + g_p\mu_N\mathbf{I})\cdot\mathbf{B} + \alpha\mathbf{S}\cdot\mathbf{I}$ と書ける。ここに g_e，g_p はそれぞれ電子，陽子の g 因子を，μ_B，μ_N はボーア磁子と核磁子を，α は微細構造定数を表す。簡略化のために $|1\rangle = |1/2, 1/2\rangle$，$|2\rangle = |1/2, -1/2\rangle$，$|3\rangle = |-1/2, 1/2\rangle$，$|4\rangle = |-1/2, -1/2\rangle$ とおこう。また，以下の解答では $\mu_\pm = g_e\mu_B \pm g_p\mu_N$ を用いて表せ。

(a) $|i\rangle (i = 1, 2, 3, 4)$ に対して，$\mathcal{H}|i\rangle$ を計算せよ。

(b) (a) より $|1\rangle$，$|4\rangle$ は $\mathcal{H}$ の固有状態であり，残りの 2 個はそれらの線形結合が固有状態となる。エネルギーの固有値を求めよ。

(c) 各エネルギー固有値に対応する固有状態を求めよ。
(線形結合のものは $\sin\theta|2\rangle + \cos\theta|3\rangle$ と表し，θ に関する条件を示せばよい)

(4) 問 (3)(b) で求めたエネルギー固有値を磁場 B の関数としてその概略を図示せよ。ただし，$g_e\mu_B \gg g_p\mu_N$ である。

平成 14 年度大学院入学試験問題　III（3 時間）

注意

(1) 問題は III-1 から III-6 まで 6 問ある。これから 3 問選択せよ。

なお，各問題は以下の通りである。

III-1(電磁気・電子回路)
III-2(統計力学 [Bose 凝縮])
III-3(超伝導 [磁場侵入])
III-4(特殊相対論)
III-5(不安定核)
III-6(原子核の検出)

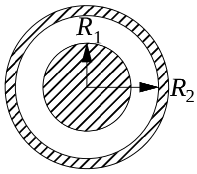
(2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ（裏面を用いてもよい）。

(3) 各用紙ごとに，左上に問題番号，右上に受験番号と氏名を記入せよ。

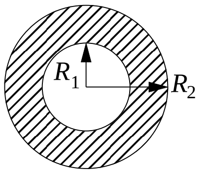
III-1 (電磁気・電子回路) (100 点)

以下の電磁気・電子回路に関する基本的な問題に回答せよ。

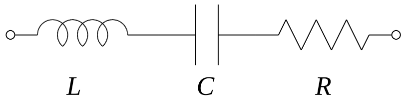
(1) 電荷が導体表面に一様に分布するとし，Gauss の法則を利用して無限長の同軸型コンデンサーの単位長さ当たりの容量を求めよ。ただし，内導体の半径を R_1， 円筒の中心より外導体の内表面までの距離を R_2 ($R_1 < R_2$) とする。絶縁体部の誘電率は ϵ とする。



(2) 内半径 R_1，外半径 R_2 ($R_1 < R_2$) の無限長の円筒パイプ状導線に一様な密度 i で電流が流れているとする。円筒パイプ状導線の中心からの距離を r としたとき，$0 \leq r < R_1$，$R_1 \leq r < R_2$，$R_2 \leq r$ での磁場を導け。



(3) 下図のような自己インダクタンス L，コンデンサー C，抵抗 R を直列につないだ回路があり，電流 I が流れているとする。但し，変位電流は無視できるものとする。

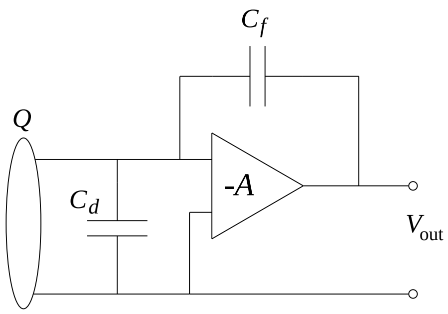


(a) L，C，R の各素子の端子間に現れる電圧 V_L，V_C，V_R を示せ。

(b) 時刻 t において，LCR 回路の両端を短絡し，$V_L + V_C + V_R = 0$ としたときに成り立つ電荷 $Q(t)$ に関する 2 階の微分方程式を導き，その一般解を求めよ。

(c) LCR 回路の両端を短絡したとき，電荷 Q が有限値であったとして，Q が振動的に変化するための条件を導け。

(4) 下図のような演算増幅器（オペアンプ）を用いた電荷増幅器で，検出器に発生した微弱な電荷 Q を測定したい。Q と出力電圧 V_{out} の関係式をオペアンプの増幅度 $-A$，検出器を含むオペアンプの入力容量 C_d，帰還容量 C_f を使って求め，さらに A が十分大きいとき $(A \gg (C_d + C_f)/C_f)$ の近似式を求めよ。時刻 t_1，t_2 にそれぞれ Q_1，Q_2 の電荷が発生したときの出力電圧波形を図示せよ。



III-2 (統計力学 [Bose 凝縮]) (100 点)

(1) Bose 統計に従う気体を考える。$a_{\mathbf{p}}^\dagger$，$a_{\mathbf{p}}$ を運動量 $\mathbf{p}$ を持つ状態の生成・消滅演算子とし，次のように場の演算子を定義する。ここに V は系の体積である。

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{p}}, \ \ \psi^\dagger(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{p}}^\dagger$$

場の演算子の交換関係，$\left[\psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')\right]$ を求めよ。ただし，$[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}$ であり，有限サイズの空間では $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$ である。

(2) 数演算子は $\hat{N} = \sum\limits_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ と定義される。

(a) $\hat{N}$ を場の演算子を用いて表せ。また $[\hat{N}, \psi(\mathbf{r})]$ を求めよ。

(b) $|N\rangle$ を粒子数 N の状態とする。($\hat{N}|N_0\rangle = N_0|N_0\rangle$)
$\psi(\mathbf{r})|N_0\rangle$ が粒子数 $N_0 - 1$ の状態となることを示せ。またそのノルムを求めよ。

(3) Bose 気体は低温で Bose-Einstein 凝縮をおこす。そこではマクロな数の原子が同じ位相を持つコヒーレント状態 (凝縮相) を形成し，残りは熱的に励起された状態で記述される。そこでは通常ゼロである場の演算子 $\psi(\mathbf{r})$ の平均 $\langle\psi(\mathbf{r})\rangle = \langle N|\psi(\mathbf{r})|N\rangle$ が，有限の値をもつようになる。この $\Psi(\mathbf{r}) = \langle\psi(\mathbf{r})\rangle$ はコヒーレント状態を特徴づける秩序変数と考えられる。いまコヒーレント状態を粒子数 N_0，位相 φ の状態とし，$|N_0, \varphi\rangle$ と書く。$|N_0, \varphi\rangle$ を，粒子数 $|N_0 + \nu\rangle$ の状態を位相 φ で重ね合わせたもので表す。

$$|N_0, \varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\Delta N_0 + 1}} \sum_{\nu=-\Delta N_0}^{\Delta N_0} e^{i\varphi\nu} |N_0 + \nu\rangle$$

この状態は平均値のまわりに $2\Delta N_0$ の幅を持ってゆらいでいる。

この状態 $|N_0, \varphi\rangle$ を用いると，$\Psi(\mathbf{r}) = \langle N_0, \varphi|\psi(\mathbf{r})|N_0, \varphi\rangle \simeq \sqrt{n_0} e^{i\varphi}$ となることを示せ。ただし $n_0 = N_0/V$ であり $N_0 \gg \Delta N_0, \nu$ とせよ。

(4) (3) で与えられる凝縮相は決まった位相 φ を持っている。2 つの異なる位相を持つ状態 $|N_0, \varphi\rangle$ と $|N_0, \varphi'\rangle$ は直交していることを示せ。ただし $\Delta N_0 \simeq \sqrt{N_0} \sim \infty$ と考えてよい。

(5) n_0 と φ が緩やかに空間変化していると考え，凝縮体の運動量密度を以下のように定義する。

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i}\left(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*\right)$$

$\mathbf{j}$ は位相の空間変化で表せることを示せ。また凝縮相はある速度 $\mathbf{v}_s$ をもって流れている。凝縮相を形成している粒子の質量を m として $\mathbf{v}_s$ を求めよ。

(6) 流体が単連結領域にある時，$\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$ であり $\mathbf{v}_s$ の閉じた経路に沿った循環はゼロある。しかし，非凝縮相に渦などの多重連結領域がある場合は有限の値を取る。秩序変数の一価性より，渦周りの $\mathbf{v}_s$ の循環 $\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{s}$ が量子化されていることを示せ。また $m = 6.63 \times 10^{-27}$[kg] としたときの渦量子の大きさを計算せよ。ただし $h = 6.62 \times 10^{-34}$[J·s] とせよ。

III-3 (超伝導 [磁場侵入]) (100 点)

散乱されない電子が超伝導を担うと考えると，有効質量，有効電荷，速度をそれぞれ m^*，e^*，$\mathbf{v}_s$ とする超伝導電子は，電場 $\mathbf{E}$ の下で抵抗なしに加速されるので，

$$m^* \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = e^* \mathbf{E}$$

なる関係を満たすことが期待される。このとき超伝導電子密度を n_s とすると，超伝導電流 $\mathbf{J}_s = e^* n_s \mathbf{v}_s$ について，$\Lambda_{\mathrm{L}} = m^*/n_s e^{*2}$ として次の式が成り立つ，

$$\frac{\partial(\Lambda_L \mathbf{J}_s)}{\partial t} = \mathbf{E} \quad 。 \tag{A}$$

磁束密度 $\mathbf{B}$ についての Maxwell の式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

と式 (A) より

$$\frac{\partial}{\partial t}[\nabla \times (\Lambda_{\mathrm{L}} \mathbf{J}_{\mathrm{s}}) + \mathbf{B}] = 0 \tag{B}$$

となるが，超伝導体は磁束を排斥するので内部では $\mathbf{B} = 0$ になるという Meissner 効果を考慮して， 式 (B) にかかわる積分定数は 0 と考え

$$\Lambda_{\mathrm{L}} \nabla \times \mathbf{J}_{\mathrm{s}} + \mathbf{B} = 0 \tag{C}$$

としよう。この式をもとに以下の問に答えよ。

(1) μ_0 を透磁率，$\mathbf{J}$ を物質中の全電流密度としたとき

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

なる関係が成り立つが，$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s$ (物質中に流れる電流は超伝導電流 $\mathbf{J}_s$ だけである) とし，式 (C) が成り立つときの $\mathbf{B}$ の位置座標に関する 2 階の偏微分方程式を導け。

(2) z 軸方向を向く一様な外部磁場 H_e 中に，yz 面に平行な無限に広い面を持つ厚さ $2a$ の板状超伝導体があるとき，板の両面が $x = \pm a$ にあるとして問 (1) で導いた偏微分方程式を基に $\mathbf{B}$ と $\mathbf{J}_s$ を求めよ。さらに $\lambda_{\mathrm{L}} = \sqrt{\Lambda_{\mathrm{L}}/\mu_0}$ がほぼ板の厚さに等しいとき，その x 依存性を略図で示せ。

(3) 超伝導体は外部磁場 H_e が臨界磁場 H_c に達したとき，常伝導に転移する。$a \gg \lambda_{\mathrm{L}}$ ならびに $a \ll \lambda_{\mathrm{L}}$ の 2 つの場合について $H_e = H_c$ のときの板の表面における電流密度を求めよ。

(4) λ_{L} は超伝導体への磁場侵入長と呼ばれる。その測定法を一つあげて，その考え方を説明せよ。

III-4 (特殊相対論) (100 点)

静止質量 m_1 と m_2 の 2 つの小球 1 と小球 2 がある。原点にこの小球をいろいろな速度で射出する装置があるとする。射出されたとき，小球の内部エネルギーはゼロとみなして良いとする。さて，時刻 $t = t_1$ に射出装置が小球 1 を x 軸の正の方向に速度 $v_1 > 0$ で射出した。次に時刻 $t = t_2 > t_1$ に小球 2 をやはり x 軸の正の方向に今度は速度 $v_2 > v_1$ で射出した。小球 2 は，小球 1 に追いついて衝突する。一般には衝突は複雑だが，簡単のため，衝突後，2 つの小球は合体して，x 軸の正の方向に進みはじめたとしよう。

まず，非相対論近似（ニュートン力学）で以下の問いに答えなさい。

(1) 合体した小球の速度 v_m と内部エネルギー ϵ を求めよ。

(2) 運動エネルギーの最高何%が内部エネルギーに変換され得るかを $m_1 = m_2 = m$ の時に求めよ。

さて，これからは v_1, v_2 が極めて光速に近くて，相対論を考慮に入れなければならない場合を考えよう。

(3) 速度の代りに，速度を光速 c で割った $\beta = v/c$ を使うのが慣習である。さらに β が極めて 1 に近い場合には γ- factor ($\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$) を使った方が便利である。$\gamma \gg 1$ の場合，β を γ^{-2} のオーダーまでで近似的に表せ。

(4) 合体後の 2 つの小球の速度 v_m で動く系では，合体した小球のエネルギーは $m_1c^2 + m_2c^2 + \epsilon$ である。ここで，ϵ は衝突で発生した内部エネルギーである。ローレンツ変換をして，実験室系でのエネルギーと運動量を求めよ。ここで $\beta_m = v_m/c$, また，合体した小球の γ- factor を γ_m とせよ。

(5) 小球 1 と 2 の γ- factor を $\gamma_1 \gg 1$, $\gamma_2 \gg 1$ として，γ_m と ϵ を求めよ。ただし，簡単のため $m_1 = m_2 = m$ とし，問 (3) で求めた β の近似式を使うこと。

(6) 相対論的な場合，運動エネルギーの最高何%が内部エネルギーに変換され得るかを $m_1 = m_2 = m$ の時に求めよ。

(7) さて，合体した小球は，温度が上昇したので，速度 v_m で動く系では等方に 1keV の X 線を放射し始めた。$\gamma_m = 10^3$ として，速度 v_m で動く系で x' 軸の正の方向から

  (a) $\pi/2$,

  (b) $3\pi/4$

  の角度で放射された X 線はそれぞれ実験室系で，どのような方向，エネルギーを持った放射として観測されるか有効数字 2 桁で答えなさい。

III-5 (不安定核) (100 点)

加速器または原子炉を用いて未知の不安定核種を製造し，その核種を同定する実験を行った。生成された放射性試料を同位体分離法により，質量別に集めて質量数を決定し，$\beta-\gamma$ 核分光法により，核種を決定したい。以下の問いに答えよ。

(1) ある不安定核種の生成断面積を σ [barn]，その半減期を τ [s] とする。中性子束 ϕ[n/cm^2/s] で質量数 A の試料を重さ M [g]，時間 t [s] だけ照射した直後のその不安定核種の生成量はどれだけか。

(2) 同位体分離法では，イオン源によりイオン化した後，静電加速し，分析電磁石により質量分離を行う。正 1 価のイオンを $E = 50$keV に加速した後，セクタ型均一磁場で曲率半径 $\rho = 1$m の軌道上を偏向させ，スリットで選んで取出したところ，$B = 0.3$T の磁場の強さのところで放射能が観測された。この核種の質量数を求める式とその数値を求めよ。ただし，1 原子質量単位 $Mu = 930$ MeV/c^2，光速度 $c = 3 \times 10^8$ m/s とする。

(3) 集められた不安定核（親核）は β 崩壊し，多くの場合娘核は励起状態になり γ 崩壊する。その特性 X 線及び γ 線のエネルギー・スペクトルを精度よく測定して娘核を同定し，未知核種（親核）の原子番号を決定する。このためにはどのような検出器がよいか。例を 1 つあげて，その動作原理と予想されるエネルギー・スペクトルの概略を図示せよ。ただし，γ 線のエネルギーは 1 MeV 以下とする。

(4) この不安定核（親核）からの β 線のエネルギースペクトルを β 線検出器で測定し，娘核の質量が精密に知られているとして親核の質量を精密に決定したい。 但しニュートリノの質量はゼロとし，娘核の基底状態への β^- 崩壊が許されているとする。

  (a) β^- 崩壊において β^- 線のエネルギーが最大となる時の β^- 線，娘核およびニュートリノのそれぞれの状態を説明せよ。

  (b) 娘核の質量を M_d としたとき，β^- 線の最大運動エネルギー E_β^{max} を用いて親核の質量を求める式を導け。

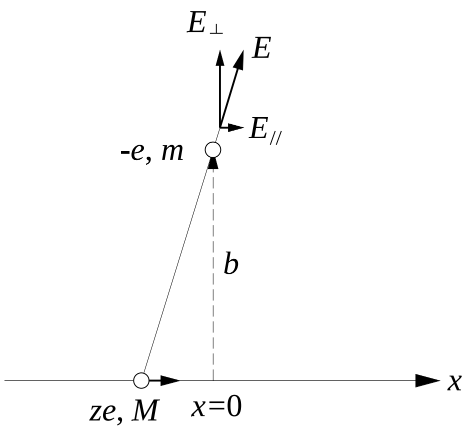
  (c) 1 種類の β^- 線が含まれる場合のエネルギー・スペクトルの概略を図示し，なぜそのようになるかその理由を説明せよ。

(5) 未知核種の半減期を測定したい。放射性崩壊を表す式を導き，半減期の測定方法について説明せよ。

III-6 (原子核の検出) (100 点)

素粒子原子核反応で放出される高速の原子核 (非相対論的取り扱いでよい) の検出を考える。この原子核の原子番号を z，質量を M，速度を v とする。電子の電荷は $-e$，質量は m とする。 高速の原子核が物質に入射すると，入射原子核が物質原子と衝突し，原子の励起や電離を起こすことによりエネルギーを失う。
ここでは原子の電子励起によるエネルギーの移行を古典的に考える。

まず，下図のように荷電粒子が x 軸上に入射され，x 軸から b の距離 $(x = 0)$ に電子が 1 個あるとする。 電子は最初停止していて，クーロン力による衝撃を短時間受けた直後も位置を変えないとし，電子へのエネルギー移行は小さくて非相対論的取り扱いでよいとする。また入射原子核の軌道は衝突によって変わらないで直進すると考える。b が非常に大きくなると衝撃が短時間とは言えなくなるのでその最大値を b_{max} とする。b が 0 付近では反跳等を無視できないので最小値を b_{min} と定義する。以下では b_{min} と b_{max} との間で考える。



(1) この衝突において原子核の位置を x とした時に電子が受ける電場の x 軸と垂直方向の成分 $E_\perp$ を示せ。

(2) この衝突により電子が受けとる運動量 (変化分) $\Delta p(b)$ を z，v，b を用いて表せ。

(3) この衝突により電子が受けとるエネルギー $\Delta T(b)$ を示せ。

ここで，物質中でのエネルギー移行を評価する。物質の原子番号を Z，原子量を A，質量密度を ρ とし，b_{min} から b_{max} のみがエネルギー移行に寄与するとする。アボガドロ定数は N_A とする。

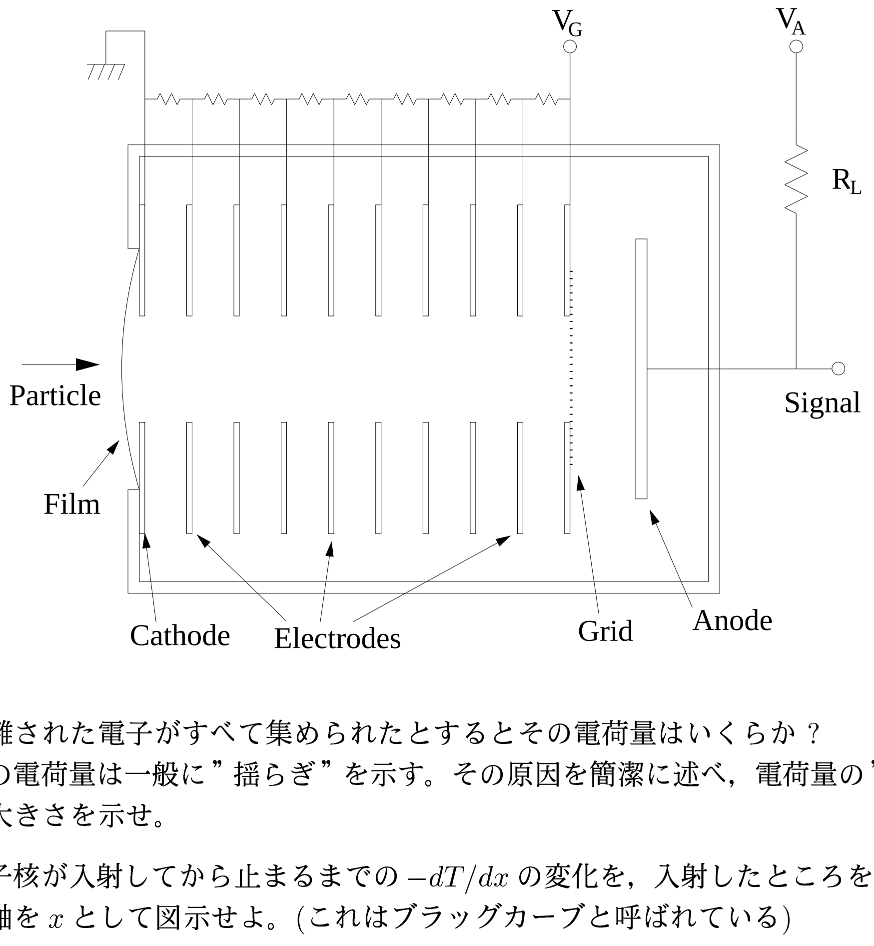
(4) 入射原子核の単位長さあたりのエネルギー損失 $-dT/dx$ を z，v を用いて表せ。

(5) 原子核の入射時の運動エネルギーを T として，物質中で停止するまでの距離 R は T のどのような関数になるかを示せ。ただし問 (4) で求めた $-dT/dx$ は極く低いエネルギーでは成り立たないが，距離 R に与える効果は小さいので，これを近似的に用いて良い。

次に高速の原子核がガス中を通過すると原子の励起や電離を起こし，飛跡に沿って陽イオンと自由電子を生成する。これらイオンと電子を一様な電場で集め，初期のイオンと電子の分布を得て，原子核を検出することを考える。

検出器はアルゴン・メタン混合ガスを充填した電離箱の一種で，その構造を下図に示す。入口の薄膜 (Film) を通して原子核は入射される。入口の陰極 (Cathode) は接地され，正の高電圧 (V_G) がかかった格子 (Grid) により，生成された電子を集める。陰極と格子の間が有感領域となっていて，対象となる入射原子核は有効領域で止まるとする。陰極と格子の間には電圧分割された中間電極 (Electrodes) があり，有感領域の電場は一様とされている。陽極 (Anode) には，負荷抵抗 (R_L) を通して，格子より少し高い正の高電圧 (V_A) がかかり，格子に向かう電子はすべて格子を通過し，陽極に到達するとする。この陽極の電圧変化を信号とする。

入射する原子核の運動エネルギーを T， 平均の電離エネルギーを w とする。電離箱の中の電場は十分に強くて電離された電子は全て集められ，2 次的な電離は起こさないとする。電子のドリフト速度は v_D とし，一定と考える。



(6) 電離された電子がすべて集められたとするとその電荷量はいくらか？
この電荷量は一般に”揺らぎ”を示す。その原因を簡潔に述べ，電荷量の”揺らぎ”の大きさを示せ。

(7) 原子核が入射してから止まるまでの $-dT/dx$ の変化を，入射したところを原点とし，横軸を x として図示せよ。(これはブラッグカーブと呼ばれている)

(8) その信号の大きさの時間変化の特徴を，信号の出始める時間を原点とし，横軸を時間として図示し，信号の出ている時間の長さを v_D を用いて表せ。この信号の測定が原子核の識別に有効であることを簡潔に示せ。