

## 令和6年度大学院入学試験問題 I (3時間)

### 注意

- (1) 問題I-1 から I-4 の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ.
- (2) 問題I-1 から I-3 の解答には裏面を用いてもよい.
- (3) 問題I-4 は独立した2つの小問I-4A, I-4B からなる. それぞれの小問の解答は解答用紙の指定された場所に記入せよ.
- (4) 各解答用紙は横長に使用して, 表側の左上部(線より上)に受験番号, 氏名を記入せよ. 解答用紙の他の部分に受験番号, 氏名を書いてはいけない. 解答用紙上部の線より上の欄には表, 裏とも解答を書いてはいけない.
- (3) 解答用紙は4問(計4枚)すべて提出すること. なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない.
- (4) 問題冊子は表紙や白紙を含めて10ページまでである.

## I-1 (量子力学) (150点)

スピン  $1/2$  の粒子が一つある系を考えよう. スピンの  $x, y, z$  成分を表す演算子はそれぞれ  $s^x = \frac{\hbar}{2}\sigma^x$ ,  $s^y = \frac{\hbar}{2}\sigma^y$ ,  $s^z = \frac{\hbar}{2}\sigma^z$  である. ただし  $\hbar$  は Planck 定数を  $2\pi$  で割ったものであり,  $\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$  は Pauli 演算子

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である.

- (1)  $\sigma^y$  を  $\sigma^x, \sigma^z$  を使って表せ.
- (2)  $\{\sigma^x, \sigma^z\}$  を求めよ. (ただし  $\{A, B\} = AB + BA$  は反交換子である.)
- (3)  $\sigma^z$  の固有値  $+1, -1$  の規格化された固有状態をそれぞれ

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする. また,  $\sigma^x$  の固有値  $+1, -1$  の規格化された固有状態をそれぞれ  $|+\rangle, |-\rangle$  とする.  $|+\rangle, |-\rangle$  をそれぞれ  $|0\rangle, |1\rangle$  の線形結合で表せ.

スピン  $1/2$  の自由度は量子情報処理の基本要素である「量子ビット」として使われる. 量子情報処理においては量子ビットを操作することにより様々な情報処理を行う. 量子系の時間発展はユニタリ演算子を状態ベクトルに作用させることにより記述されるため, 量子ビットの操作もユニタリ演算子で表される. 例えば,  $\sigma^x$  を  $|0\rangle, |1\rangle$  に作用させると  $\sigma^x|0\rangle = |1\rangle, \sigma^x|1\rangle = |0\rangle$  になるため,  $\sigma^x$  は量子ビットを「フリップ」する操作 (量子ゲート) として使われる.

- (4)  $e^{i\frac{\pi}{4}\sigma^y}$  を  $|0\rangle, |1\rangle$  に作用させるとそれぞれ  $e^{i\frac{\pi}{4}\sigma^y}|0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, e^{i\frac{\pi}{4}\sigma^y}|1\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$  となる.  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  をそれぞれ求めよ.

未知の量子状態  $|\psi\rangle = \cos\frac{\xi}{2}|0\rangle + e^{i\eta}\sin\frac{\xi}{2}|1\rangle$  に対しスピンの各成分の平均値を測定したところ,  $\langle\psi|\sigma^x|\psi\rangle = 0, \langle\psi|\sigma^y|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}, \langle\psi|\sigma^z|\psi\rangle = \frac{1}{2}$  となった. (ただし  $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$  である.)

- (5)  $\xi, \eta$  を求めよ. このように未知の状態に対していろいろな物理量を測定しその値から状態の形を求める方法は量子トモグラフィと呼ばれる.

(次ページに続く)

$N$ 個のスピン1/2粒子（あるいは量子ビット）が一次元に周期境界条件で並んだ系を考えよう。（ただし  $N \geq 6$  とする。）系のハミルトニアンとして  $H = -\sum_{j=1}^N h_j$  を考える。ただし  $h_j = \sigma_{j-1}^z \sigma_j^x \sigma_{j+1}^z$  は三粒子間の相互作用であり、周期境界条件より  $\sigma_0^z = \sigma_N^z, \sigma_{N+1}^z = \sigma_1^z$  である。ここで、 $\sigma_j^x (\sigma_j^z)$  は  $\sigma^x (\sigma^z)$  が  $j$  番目の粒子に作用することを意味する。また、異なる粒子に作用するスピン演算子は交換する。（つまり、任意の  $i \neq j \in \{1, 2, \dots, N\}$  および任意の  $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$  に対し  $[\sigma_i^\alpha, \sigma_j^\beta] = 0$ 。）

- (6)  $i \neq j$  に対し、 $h_i$  と  $h_j$  は交換するか反交換するか、どちらであるか述べよ。またその理由を式で書いて示せ。

量子系は外部からのノイズ等に非常に弱いため、量子状態を使って情報処理を行う場合、状態がノイズ等により変化してしまったかどうかを判定する方法（量子誤り検出）が必要である。上記の三体ハミルトニアン  $H$  は基底エネルギーが  $-N$  の、縮退のない基底状態  $|E_0\rangle$  を持つ。 $|E_0\rangle$  における量子誤り検出を考えてみよう。

- (7)  $|E_0\rangle$  がノイズにより  $\sigma_k^z |E_0\rangle$  という状態に変わってしまった。（つまり  $k$  番目の粒子（量子ビット）に  $\sigma^z$  が作用してしまった。） $\sigma_k^z |E_0\rangle$  は  $H$  の固有状態である。固有値（固有エネルギー）を求めよ。（[ヒント] $h_j$  と  $\sigma_k^z$  の交換関係に注目するとよい。）このように固有エネルギーの値が  $|E_0\rangle$  と  $\sigma_k^z |E_0\rangle$  で異なるためエネルギーを測定することによりエラーが生じたか否か判定できるのである。
- (8)  $\sigma_k^x \sigma_{k+1}^x |E_0\rangle$  は  $H$  の固有状態かそうでないか？理由をつけて答えよ。また、固有状態の場合は固有エネルギーを計算せよ。
- (9)  $N$  を偶数とする。 $(\prod_{j=1}^{N/2} \sigma_{2j-1}^x) |E_0\rangle$  は  $H$  の固有状態かそうでないか？理由をつけて答えよ。また、固有状態の場合は固有エネルギーを計算せよ。

## I-2 (電磁気学) (150 点)

電荷密度と電流密度がゼロである場合の物質中の Maxwell 方程式は電場  $\vec{E}$ , 電束密度  $\vec{D}$ , 磁場  $\vec{H}$ , 磁束密度  $\vec{B}$  を用いて, 以下のように表される.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (\text{A})$$

ここで  $t$  は時間座標で,  $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  は空間座標  $\vec{x} = (x, y, z)$  に関する偏微分を成分とするベクトルである. 以下では,  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  の間にはさらに次のような関係があるとする.

$$\vec{D} = \varepsilon(z)\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\vec{H}. \quad (\text{B})$$

ここで  $\varepsilon(z)$ ,  $\mu$  はそれぞれ物質中の誘電率, 透磁率である. 透磁率  $\mu$  は, 時間座標  $t$  や空間座標  $\vec{x} = (x, y, z)$  に依存しない定数であるが, 誘電率  $\varepsilon(z)$  は  $z$  座標にのみ依存しうとする. この系で, 電場と磁場がそれぞれ  $\vec{E} = (e^{i\omega t}a(z), 0, 0)$  と  $\vec{H} = (0, e^{i\omega t}b(z), 0)$  (の実部) の形で表される平面波を考える. ここで  $\omega$  は実定数,  $a(z)$  と  $b(z)$  は  $z$  にのみ依存する関数である. このとき, 以下の設問に答えよ. なお, 解答は SI 単位系で述べよ.

- (1) 次の  $\boxed{\text{あ}}$  ~  $\boxed{\text{え}}$  に当てはまる式を  $\omega$ ,  $\varepsilon(z)$ ,  $\mu$  を用いて表せ.

$$\frac{da}{dz} = \boxed{\text{あ}} b, \quad \frac{db}{dz} = \boxed{\text{い}} a, \quad \frac{d^2a}{dz^2} = \boxed{\text{う}} a, \quad \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{db}{dz} \right) = \boxed{\text{え}} b.$$

$\varepsilon(z)$  が,  $z \geq 0$  の領域と  $z < 0$  の領域で, それぞれ正の定数  $\varepsilon_+$  と  $\varepsilon_-$  で与えられる場合に, 以下の小問 (2), (3) に答えよ.

- (2) 関数  $a(z)$ ,  $b(z)$  が  $z = 0$  で連続的であること (つまり,  $z \rightarrow -0$  での値と  $z \rightarrow +0$  での値が一致すること) を Maxwell 方程式に基づき, 数式を用いて説明せよ. (小問 (1) の結果を用いても良い.)
- (3)  $z < 0$  の領域から  $z$  軸の正の方向に電磁波を入射し,  $z = 0$  のところで反射する成分と  $z \geq 0$  の領域へ透過する成分がどのくらいの割合で生じるのかを調べよう. 関数  $b(z)$  が  $z < 0$  の領域では入射波と反射波からなる

$$b(z) = \exp(-ik_-z)I + \exp(ik_-z)R \quad (\text{C})$$

の形であるとし,  $z \geq 0$  の領域では透過波からなる

$$b(z) = \exp(-ik_+z)T \quad (\text{D})$$

の形であるとする. ここで波数  $k_+$ ,  $k_-$  は正の定数で,  $I$ ,  $R$ ,  $T$  はそれぞれ入射波, 反射波, 透過波の振幅に対応した複素数の定数である. ただし  $I \neq 0$  とする. この時,  $k_+^2$ ,  $k_-^2$ ,  $R/I$ ,  $T/I$  を  $\omega$ ,  $\mu$ ,  $\varepsilon_+$ ,  $\varepsilon_-$  のうち必要なものを用いて表せ.

(次ページに続く)

次に誘電率が  $\varepsilon(z + L) = \varepsilon(z)$  という周期性を持つなめらかな関数の場合を考える。この場合、関数  $b(z)$  は、 $-\pi/L \leq k < \pi/L$  を満たす  $k$  の関数  $\varphi_m(k)$  ( $m \in \mathbf{Z}$ 、ここで  $\mathbf{Z}$  は整数全体の集合を表す。) を用いて、

$$\psi_k(z) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} e^{i(k+2\pi m/L)z} \varphi_m(k) \quad (\text{E})$$

で与えられる関数  $\psi_k(z)$  の重ね合わせで書かれることが知られている。以下の設問では、関数  $b(z)$  が  $b(z) = \psi_k(z)$  で与えられるとして答えよ。

(4)  $b(z) = \psi_k(z)$  が小問 (1) の方程式を満たすことから、 $\varphi_m(k)$  は

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} A_{m,n}(k) \varphi_n(k) = \omega^2 \varphi_m(k) \quad (\text{F})$$

の形の式を満たすことが示される。この式は  $\varphi_m(k)$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ) を固有ベクトル、 $\omega^2$  を固有値とする固有方程式とみなせる。式 (F) の  $A_{m,n}(k)$  を  $\mu$ 、 $k$ 、 $L$ 、 $m$ 、 $n$  と  $1/\varepsilon(z)$  の Fourier 級数展開  $1/\varepsilon(z) = \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} e^{i2\pi\ell z/L} c_\ell$  に現れる Fourier 係数  $c_\ell$  ( $\ell \in \mathbf{Z}$ ) を用いて表わせ。

特に、誘電率が正の定数  $\varepsilon_0$  と微小なパラメータ  $\lambda$  ( $0 \leq \lambda \ll 1$ ) を用いて

$$\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon_0}{1 + 2\lambda \cos(2\pi z/L)} \quad (\text{G})$$

と書かれる場合を考え、以下の小問 (5)、(6) に答えよ。

(5) まず、 $\lambda = 0$  の場合を考える。各  $k$  に対して、式 (F) を満たす  $\omega^2$  を小さい順に 3 つ求め、 $-\pi/L \leq k < \pi/L$  の範囲でこの 3 つの  $\omega^2$  の値の  $k$  依存性を図示せよ。ただし、式 (F) の固有値に縮退がある場合には、縮退しているものを重複して数えて 3 つ求めれば良い。

(6)  $\lambda = 0$  で  $k = -\pi/L$  のとき、 $\varphi_m = \delta_{m,0}$  と  $\varphi_m = \delta_{m,1}$  ( $\delta_{m,n}$  は Kronecker delta で、 $m$  と  $n$  が等しいときに 1、等しくないときに 0 を表す。) はどちらも式 (F) を満たす固有ベクトルで、その固有値  $\omega^2$  の値が等しい。 $\lambda$  が十分小さな正の定数である場合に、この縮退が解けるかどうかを  $\lambda$  の一次までの近似を用いて議論せよ。([ヒント]  $\varphi_0 = v_0$ 、 $\varphi_1 = v_1$ 、 $\varphi_m = \lambda v_m$  ( $m \neq 0, 1$ ) と置いて、式 (F) に代入し、 $\lambda$  の二次以上の項を無視する近似の範囲で縮退が解けるかどうかを議論すれば良い。)

### I-3 (統計力学) (75点)

超流動体中の励起として音を量子化したフォノンを考える。フォノンは電磁波における光子に対応しており、光子と同じく Bose 粒子であるが、電磁波が横波なのに対して音波は縦波という点が異なっている。フォノンはエネルギー  $\varepsilon_p$  と運動量の大きさ  $p$  の間に  $\varepsilon_p = vp$  という分散関係を持つ。ここで  $v$  は超流動体中の音速であり、温度や  $p$  に依存しない定数とする。また、フォノン間の相互作用は考えない。いま、体積  $V$  の立方体内に超流動体があるとしよう。温度  $T$  のとき、エネルギー  $\varepsilon$  の状態にある Bose 粒子の分布は一般に  $n(\varepsilon) = (e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1)^{-1}$  と表される。ここで  $\mu$  は化学ポテンシャル、 $\beta = (k_B T)^{-1}$  ( $k_B$  は Boltzmann 定数) である。フォノンのとりうる状態は離散的であり、物理量  $F(\varepsilon_p)$  の期待値の計算の際には運動量  $\vec{p}$  の状態での和をとらなければならないが、熱力学極限では式 (A) のように和を積分に置き換えることができる。ここで  $\hbar$  は Planck 定数を  $2\pi$  で割ったものである。

$$\sum_{\vec{p}} F(\varepsilon_p) n(\varepsilon_p) \rightarrow \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3\vec{p} F(\varepsilon_p) n(\varepsilon_p). \quad (\text{A})$$

以下の問に答えよ。

- (1) フォノン系では、光子の場合と同様に  $\mu = 0$  とした Bose 分布を用いる。その理由について述べよ。
- (2) フォノン系における状態密度  $D(\varepsilon)$  の具体的な表式を示せ。ただし、状態密度は  $D(\varepsilon) d\varepsilon$  がエネルギー  $\varepsilon$  と  $\varepsilon + d\varepsilon$  の間にある状態数を表し、物理量  $G(\varepsilon_p)$  の  $\vec{p}$  の状態での和は式 (B) のように  $\varepsilon$  の積分に置き換えられる。

$$\sum_{\vec{p}} G(\varepsilon_p) \rightarrow \int_0^\infty d\varepsilon D(\varepsilon) G(\varepsilon). \quad (\text{B})$$

- (3) フォノン系のエネルギー期待値を  $E$  とし、フォノン数の期待値を  $N$  とおく。フォノン1個当たりのエネルギーの期待値  $E/N$  を求めよ。必要なら以下の定積分の値を使ってもよい。ここで  $\zeta(z)$  はゼータ関数である。

$$\int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x - 1} = 2\zeta(3), \quad \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}. \quad (\text{C})$$

- (4) フォノン1個当たりの定積熱容量を求めよ。
- (5) フォノン系全体の定積熱容量から系のエントロピー  $S$  を求めよ。
- (6) 次に、分散関係が  $\varepsilon = Ap^m$  となっている系を考えよう。ここで  $A, m$  は正の実定数とする。系の化学ポテンシャル  $\mu = 0$  として、この系全体の定積熱容量が温度の何乗に比例するかを求めよ。

(このページは白紙である)

I-4A (力学) (40点)

図1のように、左端が固定されたばね定数  $k (> 0)$  のばねがあり、これにつながった質量  $m$  のおもりが速さに比例した抵抗力 (比例定数  $\alpha (> 0)$ ) を受けて、水平でなめらかな台の上を運動する場合を考える。ばねの自然長の位置を  $x = 0$  として水平右向きに  $x$  座標を取る。ばねの質量は無視できるものとする。

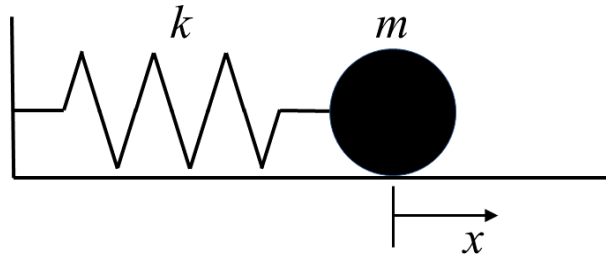


図1

- (1) おもりは  $x$  方向のみ運動するとして、運動方程式を書き下せ.
- (2) おもりを右に引っ張り、時刻  $t = 0$  に  $x = x_0 (> 0)$  の位置で初速ゼロで静かに手を放す.  $\beta = \alpha/(2m)$ ,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  として,  $\beta < \omega_0$  の場合にはおもりは振動する. このときの運動方程式の解を求めよ. なお, 必要であれば  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  を使ってもよい.
- (3) 手を放した後, 1回目に  $x = 0$  を通過するときの運動エネルギーを  $E_1$  とし, 2回目に  $x = 0$  を通過するときの運動エネルギーを  $E_2$  とする. このとき, エネルギーの比  $E_2/E_1$  を求めよ.



**I-4B (物理数学) (35点)**

- (1)  $\vec{r}$  を 3次元空間上のベクトル,  $b$  を正の実数とする. 関数  $f(\vec{r}) = e^{-b|\vec{r}|}$  の Fourier 変換

$$F(\vec{q}) = \int f(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r}$$

を計算せよ.

- (2) 次の積分を考える. ここで  $x, a$  は実数, かつ  $a > 0$  とする.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6 + a^6} dx$$

- (2-1) 被積分関数における実数  $x$  を複素数に拡張し, 複素平面上的極をすべて求めよ.
- (2-2) 積分値  $I$  を求めよ.

(このページは白紙である)

## 令和6年度大学院入学試験問題 II (3時間)

### 注意

- (1) 問題II-1からII-5の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ。
- (2) 問題II-1からII-4の解答には裏面を用いてもよい。
- (3) 問題II-5は独立した2つの小問II-5A, II-5Bからなる。それぞれの小問の解答は解答用紙の指定された場所に記入せよ。
- (4) 各解答用紙は横長に使用して、表側の左上部(線より上)に受験番号、氏名を記入せよ。解答用紙の他の部分に受験番号、氏名を書いてはいけない。解答用紙上部の線より上の欄には表、裏とも解答を書いてはいけない。
- (5) 解答用紙は5問(計5枚)すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (6) 問題冊子は表紙や白紙を含めて10ページまでである。

## II-1 (力学) (150 点)

太さが無視でき, 変形しない一様な細線でできた半径  $b$ , 質量  $M$  の円環と, 円環に沿ってなめらかに動ける質量  $m$  の質点, とから構成された複合体の回転運動について調べる. 質点は円環から離れることはないとする. 鉛直上向きに  $z$  軸の正の方向をとり, 重力加速度の大きさを  $g$  とする.

まず, 図 1 のように円環がその中心を静止座標  $(x-y-z)$  系の原点  $O$  に一致させたまま,  $z$  軸のまわりに一定の角速度  $\omega$  で回転する場合を考える.

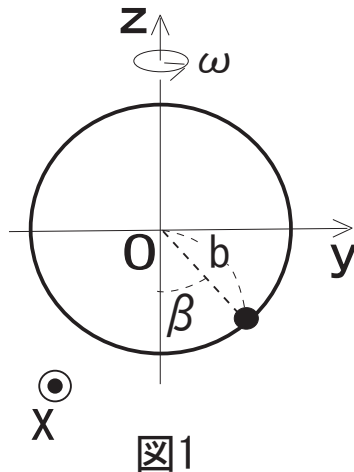
- (1) 回転する円環が描く軌跡は, 原点  $O$  を中心とする半径  $b$  の球面である. この球面上での質点の座標は, 静止座標系の単位ベクトル  $\vec{e}_j$  ( $j = x, y, z$ ) を用いて,

$$\vec{r} = b [-\sin\beta \sin(\omega t) \vec{e}_x + \sin\beta \cos(\omega t) \vec{e}_y - \cos\beta \vec{e}_z]$$

と表される. 質点の速さを  $b, \omega, \beta, \dot{\beta}$  ( $= d\beta/dt$ ) を用いて表せ (結果のみ答えればよい).

- (2) 図 1 の質点に関する Lagrangian  $L_1$  を書き,  $\beta$  が従う微分方程式を導出せよ.

- (3) 質点がとり得る定常状態は, 小問 (2) で得られた微分方程式の時間に依らない解に相当する. 定常解を表す  $\cos\beta$  の値を,  $\omega$  について場合分けをして答えよ. ただし, 質点の位置は  $0 \leq \beta < \pi/2$  の範囲に限られているとする.



(次ページに続く)

- (4) 小問(3)で得た定常解のいずれかの  $\beta$  値を  $\beta_e$  とする. 小問(2)で得た方程式の非定常解を  $\beta_e + \varepsilon(t)$  ( $|\varepsilon| \ll 1$ ) と表し,  $\varepsilon(t)$  が満たす微分方程式において  $\varepsilon$  の1次のオーダーまで考慮すると, この定常解の安定性がわかる. この手続きを小問(3)で得た各定常解に対して行い, 各解の安定性を判定せよ.

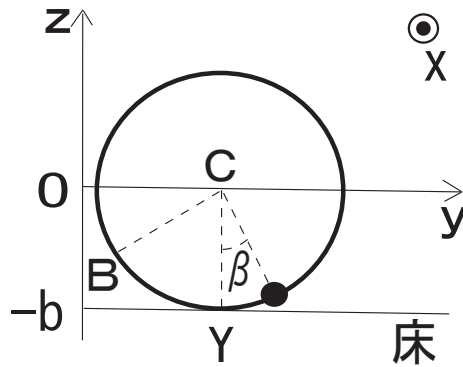


図2

次に, 図1の円環が常に  $y-z$  平面内にあり, 図2のように床 ( $z = -b$  平面) の上を常に  $x$  軸方向を回転軸にしなが,  $y$  軸に沿ってすべることなく転がる場合を考える. 複合体の配置は, 円環中心  $C$  の  $y$  座標  $Y$  と鉛直軸からの質点の傾き角度  $\beta$  ( $-\pi < \beta < \pi$ ) により表される. 角度の正の方向は常に反時計回りにとるため, 図2の場合質点は,  $0 < \beta < \pi/2$  にあることになる. 今, 点  $C$  を原点  $O$  に一致させ,  $\beta = \beta_0 (\neq 0)$  にして静止させていた複合体から  $t = 0$  にそっと手を離し, その後の運動を調べる. なお, 点  $B$  は  $t = 0$  での円環の最下点を表す.

- (5) 図2の複合体に関する Lagrangian  $L_2$  を書き,  $Y$  を  $\beta$  の関数として求めよ.

- (6)  $\dot{\beta}^2 [= (d\beta/dt)^2]$  を  $\beta$  の関数として表せ.

- (7) 複合体は  $y$  軸に沿って周期運動する. 複合体の重心運動に着目することにより, 床が円環に及ぼす静止摩擦力  $F$  を円環中心  $C$  の加速度  $\ddot{Y}$  に比例する形,  $F = K\ddot{Y}$ , に表すことができる. 比例係数  $K$  を求めよ. ただし, 力の正の向きは  $y$  軸の正の方向にとり, 床から質点に摩擦力は働かないものとする.

以下では  $m \ll M$ , つまり円環は十分に重く,  $\cos\beta_0 = -3/4$  であるとする.

- (8) 円環が十分に重い極限で,  $F = 0$  となる  $\beta$  の数値を全て答えよ. また, これらの  $\beta$  値での  $Y$  の値を,  $m/M$  の1次のオーダーまでで, それぞれ求めよ.

## II-2 (統計力学) (75点)

3次元格子を構成する各分子のスピンが、次の Hamiltonian で相互作用している。

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$

ここで、 $i$  や  $j$  は各格子の通し番号であり、 $\langle i, j \rangle$  は、隣接する格子のペアをとることを意味する。全格子数は  $N (\gg 1)$  であり、1つの格子に隣接する格子数は  $z$  である。各格子のスピン  $\sigma_i$  は離散的な値  $\sigma_i = 1, -1, 0$  をとり、状態は、 $\sigma_i = 1$  をとる状態1個、 $\sigma_i = -1$  をとる状態1個、さらに、 $\sigma_i = 0$  をとる異なる状態  $g$  個 ( $g > 0$ ) の、合計  $(2 + g)$  個で構成される。逆温度  $\beta = (k_B T)^{-1}$  ( $k_B$  は Boltzmann 定数) での熱力学的諸性質に関して、以下の問に答えよ。

[A]:  $J = 0$  の系、つまり相互作用しない  $N$  個のスピン系を考える。

- (1)  $h > 0$  のとき、全スピン  $\sum_{i=1}^N \sigma_i$  の平均値を求めよ。
- (2)  $h > 0$  で、エネルギーを  $-h(N - 2)$  に固定したときのエントロピーを求めよ。

[B]:  $J > 0$ ,  $g = 2$  の系が示す2次相転移を、平均場近似を用いて解析する。平均場近似をするための有効 Hamiltonian は、単位格子あたりのスピンの平均値を  $m$  として以下のようなになる。

$$\tilde{H} = \frac{JzN}{2} m^2 - Jzm \sum_i \sigma_i - h \sum_i \sigma_i$$

- (3) 自発磁化  $m$  を求める自己無撞着方程式を導出せよ。また、 $h = 0$  での相転移温度  $T_c$  を求め、 $T_c$  近傍での自発磁化の値を求めよ。ただし、 $x \ll 1$  に対して、 $\cosh x \simeq 1 + \frac{x^2}{2}$ ,  $\sinh x \simeq x + \frac{x^3}{6}$ ,  $\tanh x \simeq x - \frac{x^3}{3}$  などを使ってもよい。
- (4)  $\tilde{H}$  を使って得られる自由エネルギー  $G(T, h)$  を求めよ。ただし、自己無撞着方程式を解いて得られる  $(T, h)$  に依存する自発磁化は  $m$  のままでよい。

また、 $G(T, h)$  から Legendre 変換によって得られる、 $T$  と  $m$  に関する自由エネルギー  $F(T, m)$  は、4次までの展開で、 $\frac{F(T, m)}{N} = -2\beta^{-1} \ln 4 + [a_2(\beta) + \beta^{-1}] m^2 + a_4(\beta) m^4$  となる。小問(3)の自発磁化の結果から、 $a_2$  および  $a_4$  を求め、 $T < T_c$  と  $T > T_c$  における  $F(T, m)$  の  $m$  依存性の概形を図示せよ。

[C]:  $J > 0$ ,  $g = 10$  の系を考える。平均場近似による自由エネルギー  $F(T, m)$  は、6次までの展開で、 $\frac{F(T, m)}{N} = -\beta^{-1} \ln 12 + (3\beta^{-1} - \frac{Jz}{2}) m^2 - \frac{9\beta^{-1}}{2} m^4 + \frac{171\beta^{-1}}{5} m^6$  となる。これから、この系は1次相転移を示すことが分かる。

- (5) 相転移温度で、 $F(T, m)$  の  $m$  依存性の概形を特徴が分かるように図示し、相転移が1次相転移である理由を説明せよ。

### II-3 (物理数学) (75 点)

Hermite 多項式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (\text{A})$$

について以下の問いに答えよ.

- (1)  $H_0(x), H_1(x), H_2(x), H_3(x)$  を求め, それぞれ 0 次, 1 次, 2 次, 3 次の多項式であることを確かめよ.
- (2) 一般に  $H_n(x)$  は  $n$  次の多項式である.  $H_n(x)$  について最高次の項  $x^n$  の係数を求めよ.
- (3)  $H_n(x)$  が内積

$$(\phi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \phi(x) \psi(x), \quad (\text{B})$$

について直交多項式

$$(H_n, H_m) = c_n \delta_{n,m}, \quad (\text{C})$$

であることを示せ. また  $c_n$  を求めよ. [ヒント] 小問 (2) の結果を用いると良い. ここで  $\delta_{n,m}$  は Kronecker delta である.

- (4) 2 階の微分演算子  $\hat{O}$

$$\hat{O}H_n(x) = \frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_n(x)}{dx} = e^{x^2} \frac{d}{dx} \left( e^{-x^2} \frac{dH_n(x)}{dx} \right) \quad (\text{D})$$

が内積 (B) について Hermite 演算子である, つまり任意の  $\phi, \psi$  について  $(\phi, \hat{O}\psi) = (\hat{O}\phi, \psi)$  を満たすことを示せ.

- (5)  $H_n(x)$  が  $\lambda_n$  を固有値とする固有方程式  $\hat{O}H_n(x) = \lambda_n H_n(x)$  を満たすことを示し, 固有値  $\lambda_n$  を求めよ. [ヒント] 任意の  $n$  次の多項式  $F_n(x)$  は  $H_m(x)$  を用いて  $F_n(x) = \sum_{m=0}^n a_{nm} H_m(x)$  のように展開できる.
- (6)  $H_n(x)$  の母関数  $G(x, t)$

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (\text{E})$$

を初等関数を用いた形で求めよ. 必要なら複素積分を用いた Goursat の公式

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \oint_{C_x} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} \quad (\text{F})$$

を用いても良い. 積分経路  $C_x$  は  $x$  の周りを反時計回りに回る円周である.

## II-4 (実験) (75点)

19世紀末, 光の伝搬に媒質(エーテル)が必要かどうか論争となっていた. Michelson と Morley らがエーテルの検出のために用いた干渉計の模式図を図1に示す. エーテルが存在し, 光速はエーテルに対して一定であると仮定すると, 観測者がエーテルに対して運動したとき, 観測者に対して光速が変化すると予想される. Michelson らは干渉計を図1の様に水平な  $x-y$  平面に設置し,  $z$  軸周りに回転させることで, 光速の変化の検出を試みた. 以下では相対論的な効果を考慮せず, エーテルが存在すると仮定して考察せよ.

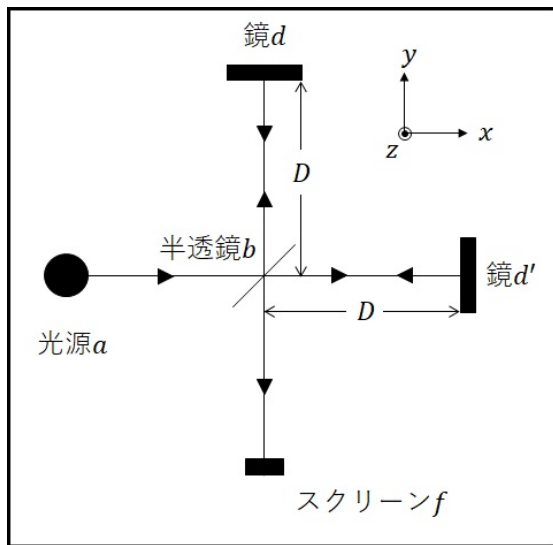


図 1: 干渉計の模式図

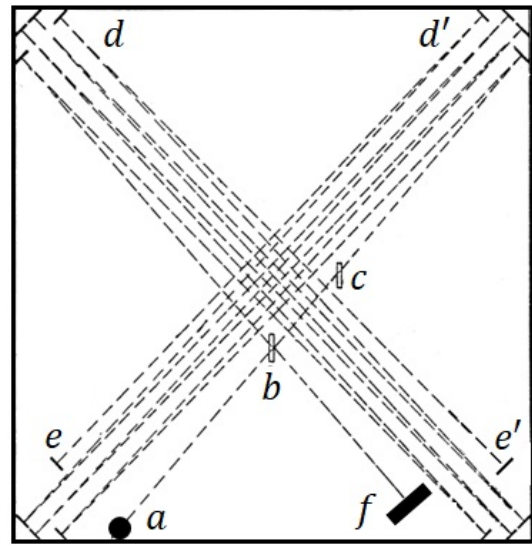


図 2: 論文に掲載された図 (一部改変)

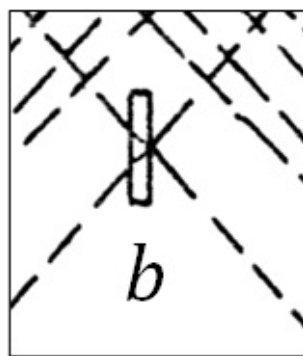


図 3:  $b$  付近の拡大図

図1の光源  $a$  から出た光は光路に対して45度で設置された半透鏡  $b$  で強度が2分割され, それぞれ鏡  $d$  と鏡  $d'$  で反射し, スクリーン  $f$  上で合成され干渉する.

(次ページに続く)



半透鏡からそれぞれの鏡までの距離は等しく  $D$  であり，簡単のため半透鏡の厚さを無視し，エーテルの静止系における光速を  $V$  とする．

まず，干渉計が静止したエーテルの中を  $x$  方向に速度  $v$  で移動し，光源から鏡  $d'$  に向かう光線は  $x$  軸と平行で，2 光波が干渉する状況を考えよう．

- (1) 光が半透鏡  $b$  から鏡  $d$  で反射し，半透鏡に戻ってくるまでの時間  $T_0$  を求めよ．
- (2) 光が半透鏡から鏡  $d'$  で反射し，再び半透鏡に戻ってくるまでの時間を  $T_0$  と  $v/V$  を用いて答えよ．ただし， $v \ll V$  であるとし， $v/V$  の 2 次までの近似を用いて答えよ．
- (3) 小問 (1) と小問 (2) で求めた時間の差は光路長の差に換算して何波長分に相当するか．ただし， $V = 3.0 \times 10^8$  m/s,  $v = 3.0 \times 10^4$  m/s,  $D = 1.0$  m, 波長は  $5.0 \times 10^2$  nm とする．
- (4) 続いて，干渉計を  $z$  軸周りに 90 度回すと，干渉縞は何波長分だけ移動するか．ただし，小問 (3) で求めた答えを  $\delta$  とする．

図 2 は Michelson & Morley (1887) の論文に掲載された干渉計の模式図である．図 1 と同様に光源  $a$  から出た光は半透鏡  $b$  で強度が 2 分割され，一方は透明な板  $c$  を通り，対称に配置された鏡  $d, d', e, e'$  によって反射し，スクリーン  $f$  上で合成され干渉する．それぞれの記号が示すものは図 1 のものに対応するが，複数の鏡が加えられた．光源には白色光（複数の波長の光の集合）が用いられ，点線は光路を示す．

- (5) 複数の鏡を加えた理由を簡潔に述べよ．
- (6) この装置に半透鏡  $b$  と同じ厚さで同じ材質の透明な板  $c$  が一方の光路に挿入されている理由を「屈折率」を用いて簡潔に説明せよ．[ヒント] 図 3 に注目せよ．
- (7) 光源の前面にスリットが配置されると，干渉縞が現れた．光路長が等しい位置の輝度は周囲に比べて高いか低いかわかり，理由とともに答えよ．
- (8) 光源として単一波長の光ではなく白色光が用いられた理由を簡潔に述べよ．
- (9) 光学系は回転する台座ではなく，大きな質量の石のテーブル上に設置され，全体が水銀のプールに浮かされた．こうすることで滑らかな水平回転を実現できるが，それ以外の利点を簡潔に述べよ．

## II-5A (量子力学) (40点)

1次元系において、幅  $2a$ 、深さ  $V_0$  ( $V_0 > 0$ ) の井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < -a) \\ -V_0 & (-a \leq x \leq a) \\ 0 & (a < x) \end{cases} \quad (\text{A})$$

におかれた質量  $m$  の粒子が以下の Schrödinger 方程式に従う。

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \varphi(x) = E\varphi(x). \quad (\text{B})$$

ここで  $\hbar$  は Planck 定数を  $2\pi$  で割ったものである。以下では最低エネルギーの束縛状態を考える。

- (1) 3つの領域  $x < -a$ ,  $-a \leq x \leq a$ ,  $a < x$  における波動関数  $\varphi(x)$  を

$$\rho = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}, \quad k = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar} \quad (\text{C})$$

を用いて表せ。ただし、位相は  $\varphi(x)$  が実数となるように選び、規格化因子の大きさはそれぞれの領域について独立に任意に選んでよい。

- (2)  $|x| = a$  での接続条件より、 $\rho a$  の満たすべき条件を  $ka$  を用いて表せ。

次に、与えられた  $V_0$  について最低エネルギー状態のエネルギーが  $E = -V_0/2$  となるように  $a$  を調整した場合を考える。以下の問に答えよ。ただし、結果は  $\rho$  や  $k$  を用いずに表すこと。

- (3)  $a$  を求めよ。
- (4) 粒子が井戸の外の領域  $|x| > a$  に存在する確率を求めよ。また、その結果を有効数字2桁の数値で表せ。

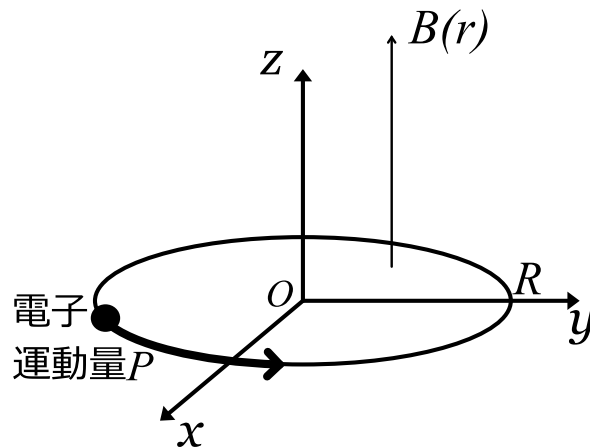
## II-5B (電磁気学) (35点)

下図に示すように、真空中で軸対称な平行磁場のもと運動する電子（電荷  $-e$ ,  $e > 0$ ）を考える．磁場の方向を  $z$  軸に取り（磁束密度  $\vec{B} = (0, 0, B(r))$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ），電子は  $x$ - $y$  平面上を原点  $O$  を中心として円運動する．なお，解答は SI 単位系で述べよ．

- (1) 定常磁場中において、電子の運動量の大きさ  $P$  と回転半径  $R$ ，円軌道上の磁束密度  $B(R)$  との関係を答えよ．

磁束密度  $B(r)$  を時間変化させることで電子を加速させる．加速された電子は一般に元の軌道から外れるが，以下では特定の条件のもと軌道を一定に保っているとする．

- (2) 電場  $\vec{E}$  と磁束密度  $\vec{B}$  の間に成り立つ式  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  を用いて，電子が誘導電場から受ける力を円内部の磁束  $\Phi = \int B \, dx dy$  で表せ．
- (3) このとき軌道上の磁束密度  $B(R)$  と  $\Phi$  が満たす、軌道を一定に保つための条件を求めよ． $t=0$  の時  $B=B_0(r)$ ,  $\Phi=\Phi_0$  とする．



(このページは白紙である)