

平成8年度大学院入学試験問題 I (3時間)

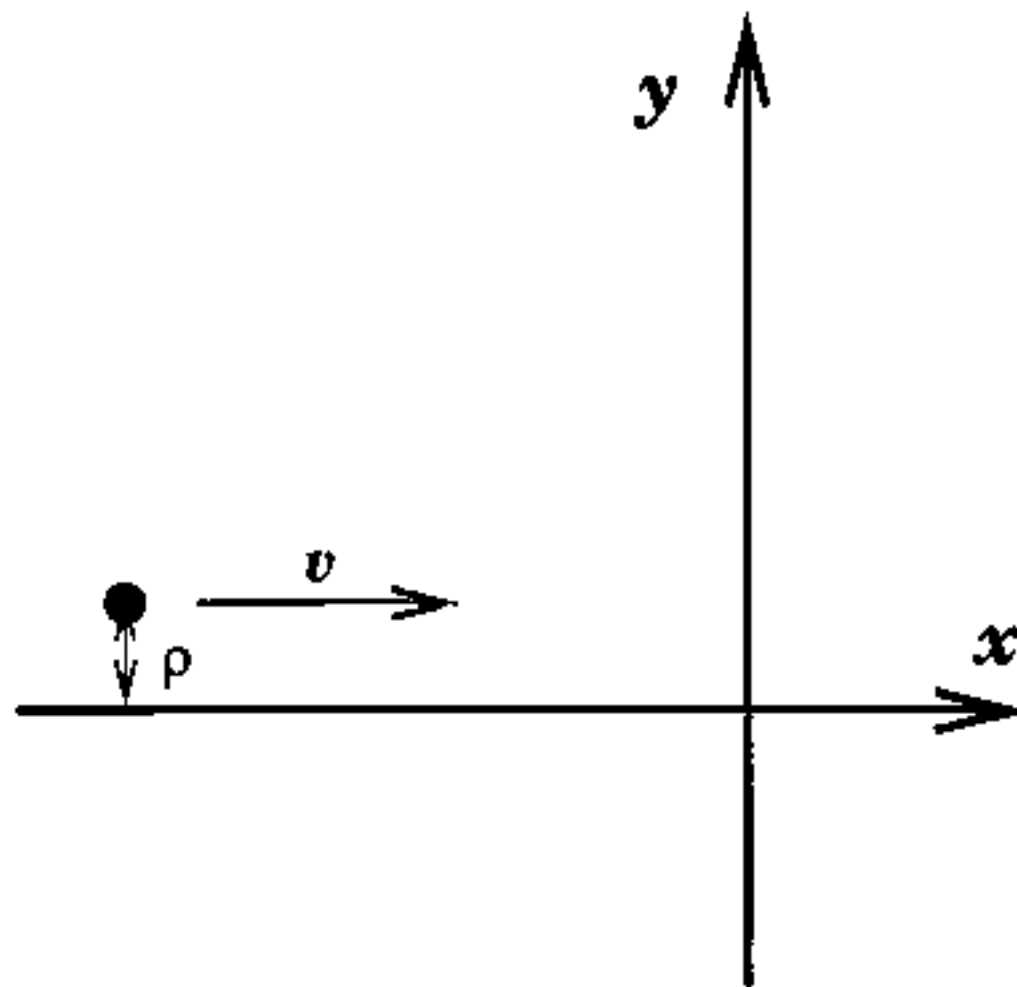
注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の用紙1枚に記入せよ。(裏面を用いてもよい。)
- (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

I-1 (100点)

x - y 平面上に拘束された質量 m の質点に中心力 $V(r) = -ar^{-s}$ ($a > 0, s > 0$) が働いているとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 系のラグランジアンを平面極座標 (r, θ) を用いて書き表し運動方程式を書き下せ。また角運動量 $M = mr^2\dot{\theta}$ の保存を用い角度変数 θ を運動方程式より消去せよ。[ドットは時間微分をあらわす。すなわち $\dot{\theta} \equiv d\theta/dt$]
- (2) 質点が円運動をしている場合、その半径と角運動量の関係を導け。その円軌道が動径方向の微小なずれに対して安定であるために s が満たすべき条件は何か。
- (3) 円軌道が安定な場合、円軌道からの微小なずれに対して動径方向の振動の周期を求めよ。それを用いて角度方向に1回回転した時に軌道が閉じるための条件を求めよ。
- (4) 設問(3)とは逆に円軌道が安定ではないような s の領域で考える。この場合質点が (x, y) 座標で無限遠点 $(-L, \rho)$ (ただし $L \rightarrow \infty$) より速度 $(v, 0)$ で原点に向かったとして(下図参照)、質点が原点からの中心力に吸収されるためには ρ はどの範囲になければならないか。



I-2 (100 点)

- (1) 調和振動子ポテンシャル $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ の下にある質量 m の粒子の基底状態は、ガウス型の波動関数で表される。この状態の固有エネルギー E_0 および規格化された固有関数を求めよ。必要ならば、 $\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2) = \sqrt{\pi}$ を用いよ。

次に、ポテンシャル $V_1(x)$ および $V_2(x)$ を次のように定義する。但し、 $a > 0$ とする。

$$V_1(x) = \frac{1}{2}k(x+a)^2 + V_0,$$

$$V_2(x) = \frac{1}{2}k(x-a)^2 - V_0.$$

また、ポテンシャル $V_1(x)$ の下での基底状態を $|1\rangle$ 、 $V_2(x)$ の下での基底状態を $|2\rangle$ としよう。但し、 $\langle 1|1\rangle = 1$ 、 $\langle 2|2\rangle = 1$ である。

さて、この $V_1(x)$ 、 $V_2(x)$ を用いて表される二重調和振動子ポテンシャル (下図参照)

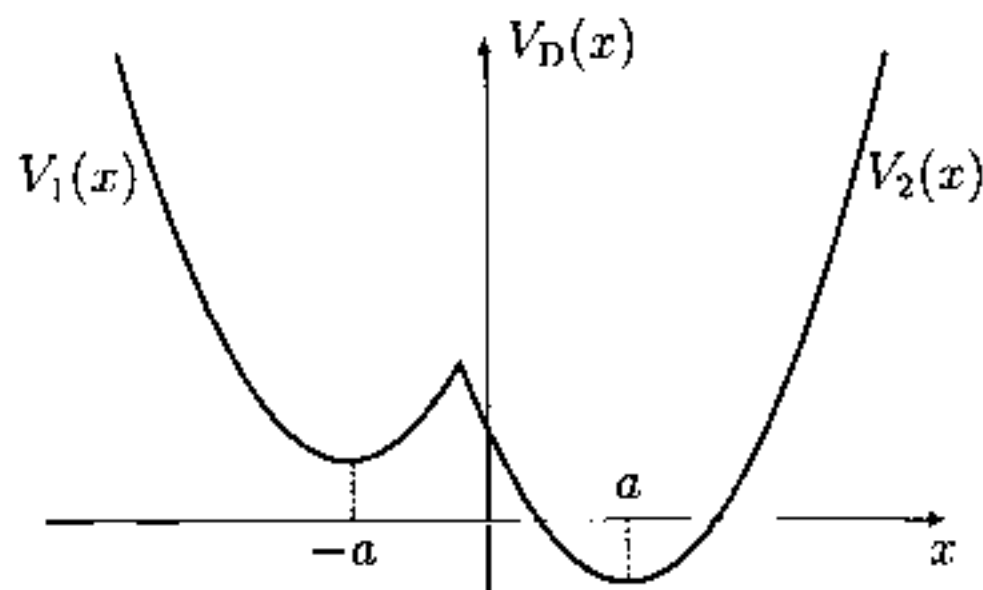
$$V_D(x) = \begin{cases} V_1(x) & (x < -V_0/ka) \\ V_2(x) & (x \geq -V_0/ka) \end{cases}$$

における質量 m の粒子の運動を考える。ハミルトニアンを $H = \frac{p^2}{2m} + V_D(x)$ とし、以下の問いに答えよ。

- (2) まず、 $V_0 = 0$ として $\langle 2|H|1\rangle$ を計算せよ。また、このとき $\langle 1|(V_D - V_1)|1\rangle < 0$ であること、 a が十分大きいとき $|\langle 1|(V_D - V_1)|1\rangle| \ll E_0$ であることを示せ。
- (3) 次に、 $V_0 > 0$ とする。 $|1\rangle$ および $|2\rangle$ を基底に取り、 H の行列要素を求めると、 a が十分大きいとき

$$\begin{pmatrix} E_0 + V_0 & -\Delta \\ -\Delta & E_0 - V_0 \end{pmatrix}$$

で与えられる。但し、 $\Delta = -\langle 2|H|1\rangle$ とおいた。これを用いて H の固有値を求め、固有関数を $|1\rangle$ と $|2\rangle$ の線形結合で表せ。但し、固有関数の規格化は不要である。さらに、この固有関数の概形を図示せよ。



I-3 (100 点)

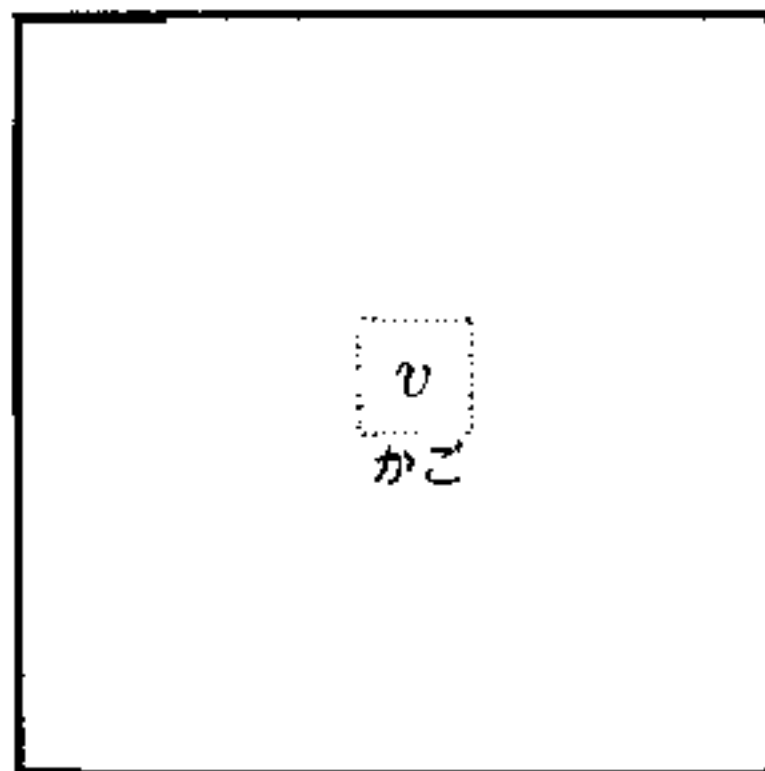
容積 V^{tot} の密閉容器の中に、総数 N ($\gg 1$) 個の古典理想気体粒子と、マクロな大きさの「かご」がある (下図参照)。系全体は均一の温度 T にあるとする。気体粒子はかごに自由に入出入りすることができ、1 粒子あたりのポテンシャルエネルギーはかごに囲まれた領域で $-\epsilon$ (ϵ は正定数)、それ以外では 0 とする。

次の各設問に答えよ。ただし (3) 以下では、 $N/V^{\text{tot}} \equiv \rho$ が有限、かつ $v/V^{\text{tot}} \ll 1$ という状況を考え、 $v/V^{\text{tot}} \rightarrow 0$ とおいた近似で答えること。

- (1) かごに囲まれた領域の体積 (v とする) を指定したときの、全粒子の Helmholtz 自由エネルギーを求めよ。気体粒子の質量を m とし、また Stirling の公式 $\ln N! = N \ln N - N + O(\ln N)$ を用いてよい。
- (2) このときのかご内外での平衡粒子数密度 (それぞれ $\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}$ とする) を求めよ。

さらに、このかごは弾性体でできているとしよう。かごは (気体粒子が自由に入出入りできるだけでなく) その囲む体積 v が $0 < v < V^{\text{tot}}$ の範囲で可変で、その変化に関するかごの弾性エネルギーが $U_0(v) = \frac{1}{2} K v^2$ (K は正定数) で与えられるとする。

- (3) v の平衡値を求めよ。
- (4) 設問 (3) の結果について、高温および低温の極限での v の温度依存性を調べよ。また、その物理的解釈も述べよ。
- (5) 今の状況で、かごの体積を増やそうとする熱力学的力の起源を気体分子運動論の見地から説明せよ。必ずしも数式を用いなくてもよい。(かごに囲まれた領域のサイズは、気体粒子の平均自由行程にくらべて十分大きいとする。)



平成8年度大学院入学試験問題 II (3時間30分)

注意

- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の用紙1枚に記入せよ。(裏面を用いてもよい。)
- (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

II-1 (100点)

図のように直交座標系 (x, y, z) をとり、 $y-z$ 面上で z 軸からの角度 θ 、原点から充分遠い距離 r [m] の位置を A 点とする。荷電粒子の速度は光速 c に比べて十分小さいとして、以下の設問に答えよ。ここでは真空中 (誘電率 ϵ_0 , 透磁率 μ_0) を仮定し、MKSA 有理単位系を用いている。

- (1) z 軸上原点から微小距離 $+\delta$ と $-\delta$ [m] の位置にそれぞれ $+q$ と $-q$ [クーロン] の電荷を置く。A 点での電場の r と θ 方向成分を求めよ。
- (2) 次に $+q$ 、 $-q$ の電荷を z 軸に沿って互いに逆位相で振動させることにより、電流 $I(t)$ を流す。まず簡単のために 2δ 間に等価的に I_0 [アンペア] の定常電流が流れた時を考える。この時 A 点に生ずる磁場ベクトルの強さと方向を求めよ。
- (3) 原点にモーメント $\mathbf{p}(t)$ をもつ電気双極子があるとき、A 点でのベクトルポテンシャルは

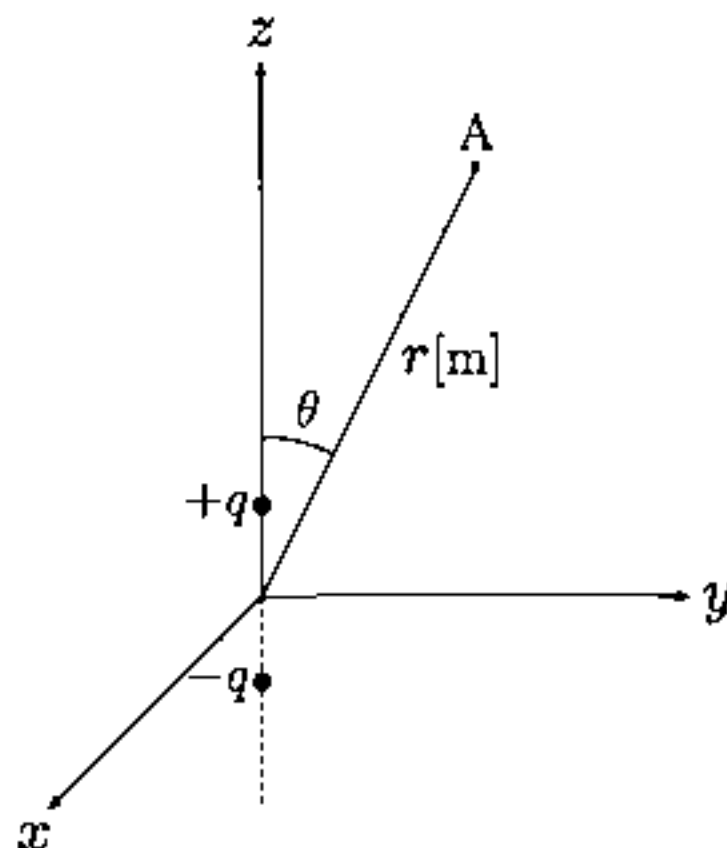
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 \dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{4\pi r}$$

で与えられる。ここに、 $\dot{\mathbf{p}}(t) \equiv d\mathbf{p}(t)/dt$ である。設問 (2) と同じ配置で、電荷を原点を中心に z 軸上で振動させ、 $p(t) = 2\delta q \sin \omega t$ で時間変動する電気双極子モーメントを考える。A 点での振動磁場ベクトルの強さと方向を求めよ。

(ヒント: 静電磁場と同様にして求め、 $r \gg c/\omega$ として最も主要な項をとれ。)

- (4) 前設問の結果を用いて、A 点において単位面積を単位時間に通過する電磁波エネルギーを求めよ。また全立体角に単位時間に放出される電磁波エネルギーの時間平均を求めよ。

(ヒント: 振動磁束密度を \mathbf{B} とすると、振動電場は $\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{r}/r$ で与えられる。)



II-2 (100点)

原子や原子核において時間反転対称性が成り立っていれば、その電気双極子モーメントはゼロでなければならない。従って電気双極子モーメントの値を測定することで、原子における時間反転対称性の破れの大きさがわかる。この問題を、稀ガス ^3He 原子を用いる実験で調べよう。球形のガラス容器内に、100%スピン偏極した ^3He ガスを閉じ込め、外部よりスピンの偏極方向に垂直に静磁場および静電場をかける。電場と磁場の方向は平行である。核スピン偏極の緩和はなく、測定装置は理想的に働いて、雑音などの影響を無視できるものとする。 ^3He 原子核は核スピン $I = 1/2$ 、磁気モーメント $\mu = 2.1\mu_N$ を持っている。ただし、 μ_N (核磁子) $= 5.1 \times 10^{-27}$ [ジュール/テスラー (J/T)] である。

必要なら以下の定数を用いよ。

プランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34}$ [J·s]、単位電荷 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ [クーロン (C)]。

- (1) 一様な静磁場 (磁束密度を B [T] とする) をかけた時 (電場はゼロとする)、偏極した ^3He 原子核はどのような振舞をしめすか。以下の設問に従って答えよ。
 - (a) スピンが静磁場によって受けるトルクを求め、実験室系でスピンの従う運動方程式を書け。
 - (b) 静磁場方向を軸として角速度 ω で回転している座標系での運動方程式を求めよ。
 - (c) スピンの才差運動の角周波数 (ラーモア周波数) を B, μ で表わせ。
- (2) $B = 1.0 \times 10^{-5}$ [T] の時のラーモア周波数の値を求めよ。
- (3) 次に、静磁場と同時に、それに平行に静電場 E [V/m] をかける。 ^3He 原子核が電気双極子モーメント d [e·m] を持っているとする。スピンの振舞にどのような変化が生じるか。 E, d を用いて表せ。ただし、電気双極子モーメントは、スピンの向きに平行か反平行であり、電場によりトルクを受ける。
- (4) 以上のことから、 ^3He 原子核の時間反転対称性の破れを調べるには、どのような測定をしたら良いか。測定法、必要な装置などの概略 (定性的な説明でよい) を示せ。
- (5) ^3He 原子核の電気双極子モーメントの値を、 10^{-30} [e·m] の精度で測定したい。 $E = 10^6$ [V/m] を用いるとして、どの程度の測定時間が必要か。

II-3 (100 点)

量子力学における角運動量演算子 $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$ はエルミート演算子 ($\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}$) であり

$$[J_1, J_2] = iJ_3, \quad [J_2, J_3] = iJ_1, \quad [J_3, J_1] = iJ_2 \quad (\text{I})$$

の交換関係をみたす (ここでは $\hbar = 1$ とする)。以下で、 \mathbf{J} の表現についての基本的性質を順次導びよう。

(1) $\mathbf{J}^2 \equiv J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ および \mathbf{J} のどれかの 1 成分 (例えば J_3) が同時対角化可能であること (即ち、それらの同時固有状態を考える事が出来ること) を示せ。

(2) J_+ および J_- を

$$J_+ = J_1 + iJ_2, \quad J_- = J_1 - iJ_2$$

で定義する。交換子 $[J_3, J_+]$, $[J_3, J_-]$ および $[J_+, J_-]$ を計算せよ。

(3) \mathbf{J}^2 と J_3 の規格化された同時固有状態を $|C, m\rangle$ とする:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 |C, m\rangle &= C |C, m\rangle \\ J_3 |C, m\rangle &= m |C, m\rangle \\ \langle C, m | C', m' \rangle &= \delta_{CC'} \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (\text{II})$$

すなわち、 C が \mathbf{J}^2 の固有値、 m が J_3 の固有値である。いまの段階では、 C と m は実数であることしかわからない。さて、ある複素数 α_m が存在して

$$J_+ |C, m\rangle = \alpha_m |C, m+1\rangle, \quad J_- |C, m\rangle = \alpha_{m-1}^* |C, m-1\rangle \quad (\text{III})$$

がなりたつことを示せ。特に、i) 両辺で C が変わらないこと、ii) 両辺での m の変化、iii) 第 1 式の α_m に対して第 2 式に α_{m-1}^* が現れること、を説明せよ。(α_m を具体的に求める必要はない。また、 α_{m-1}^* は α_{m-1} の複素共役を表す。)

(4) α_m が m についての漸化式

$$|\alpha_{m-1}|^2 - |\alpha_m|^2 = 2m \quad (\text{IV})$$

をみたすことを示せ。

(5) 漸化式 (IV) の一般解は

$$|\alpha_m|^2 = B - m(m+1) \quad (B \text{ は } m \text{ に依らない定数}) \quad (\text{V})$$

で与えられる。このことと (III) から次のことを説明せよ。

(V) の B は j をある非負の整数あるいは半整数 ($0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$) として $B = j(j+1)$ と表されなければならない、またこのとき J_3 の固有値 m は

$$-j, -j+1, \dots, j-1, j$$

の $2j+1$ 個の値のみをとる。

(6) J^2 の固有値 C は j を用いて

$$C = j(j+1)$$

で与えられる事を示せ。したがって通常 J^2 の固有値は j で識別し、(II) の固有状態 $|C, m\rangle$ を $|j, m\rangle$ と書き表す。

平成8年度大学院入学試験問題 III (3時間)

注意

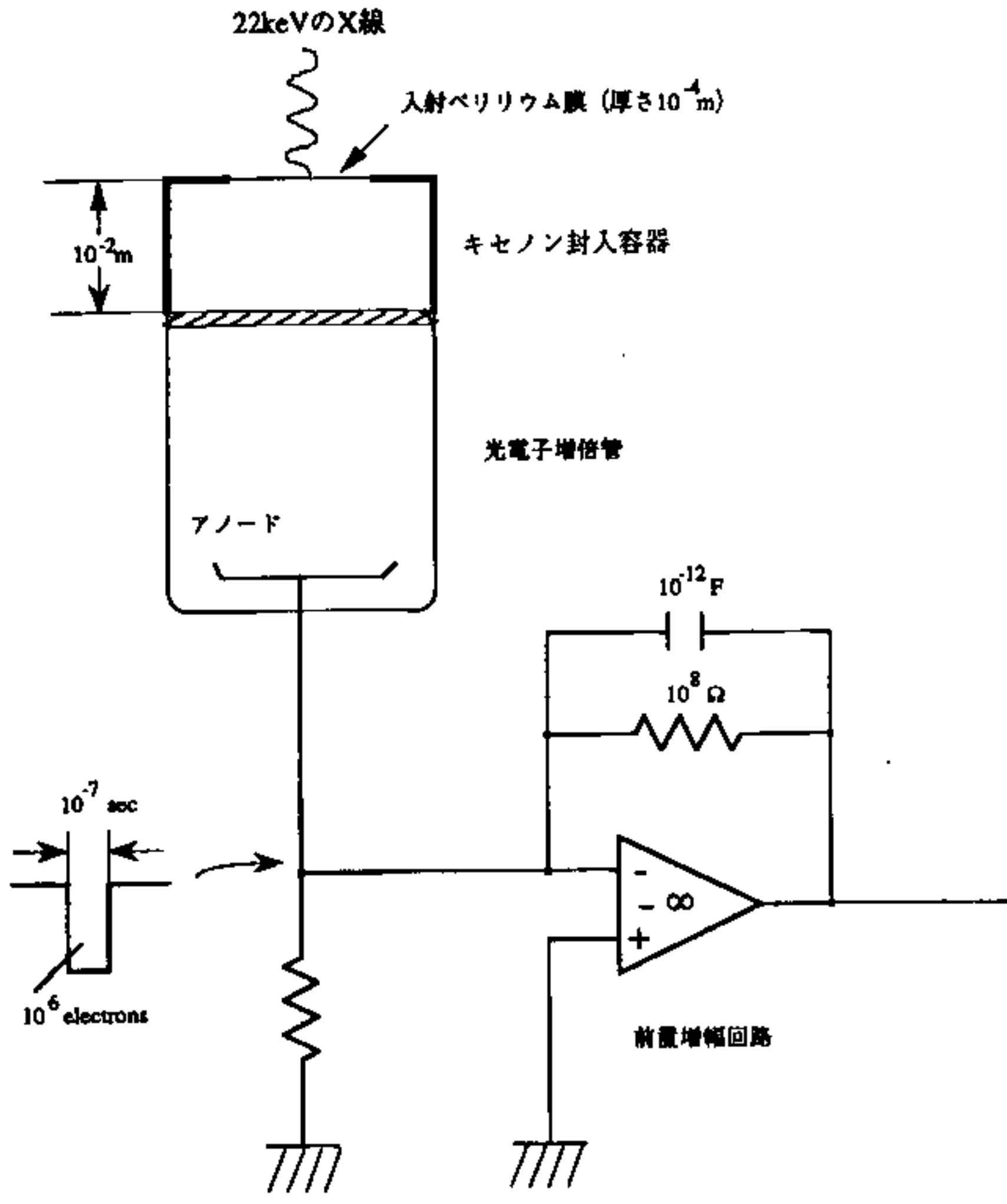
- (1) 問題は全部で5問ある。この中から3問を選択せよ。
- (2) 選択した3つの問題の解答はそれぞれ別の用紙1枚に記入せよ。(裏面を用いてもよい)
- (3) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

III-1 (選択) (100点)

図のようなキセノンガス (Xe) のシンチレーション計数管による X 線計測システムを考え、このシステムで銀の $K\alpha$ 線 (エネルギー 22 [keV]) を計測する。ここで入射ベリリウム膜 (Be) の厚さは 10^{-4} [m]、キセノン封入容器の奥行きは 10^{-2} [m] とする (図参照)。動作原理を理解するために、正確ではないが単純化したモデルをたてる。このモデルでは 22 [keV] の X 線とベリリウム及びキセノンとの相互作用は光電吸収のみとし、その吸収断面積はそれぞれ 2×10^{-28} [m²] と 5×10^{-25} [m²] とする。また光電子とキセノンガスとの相互作用は電離と励起のみによるとする。

電気素量 = 1.6×10^{-19} [クーロン]、アボガドロ定数 = 6×10^{23} [mol⁻¹]、ベリリウムの質量数 = 9、比重 1.8 として以下の設問に答えよ。必要なら $e^{-0.22} = 0.8$ も使ってよい。

- (1) 垂直に入射する 22 [keV] の X 線 (図参照) がベリリウム膜で吸収される確率は 1% 以下であることを示せ。
- (2) 次にこの X 線がキセノンガス中で確率 20% で吸収された。このときキセノンは 0° C で何気圧相当か。
- (3) 設問 (2) で求めた気圧のまま、キセノン封入容器の奥行きを 3 倍厚くした。この時 22 [keV] の X 線が吸収される確率は何倍になるか。
- (4) キセノンガスで X 線光子が吸収されると、エネルギー 17 [keV] の光電子が 1 個生まれ、この光電子はキセノンの電離と励起をそれぞれ確率 0.6 と 0.4 で繰り返し、やがて全てのエネルギーを失うと仮定する。光電子は電離により 1 個の電子を新たに生成し、エネルギー 20 [eV] を失う。また励起では、光電子はエネルギー 10 [eV] を失うとする。以上のプロセスにより、1 個の光電子が最終的に生成する電子数 N_e を概算せよ。
- (5) 励起状態のキセノン原子は 1 つの光子を再放射して、基底状態に戻るとする。これらの光子は光電子増倍管で総数 10^6 個の電子に変換されて、この電子がオープンループゲイン = $-\infty$ の演算増幅器から構成される前置増幅器に流れ込むとする。図中に示すような矩形電流 (10^{-7} [sec] にわたって一定に流れ、積分量は 10^6 個の電子に相当する) が流れ込んだとき出力の電圧波形を図示し、およその数値をいれよ。必要なら図中に示された回路定数を用いよ。



22keVのX線

入射ベリリウム膜 (厚さ 10^{-4} m)

10^{-2} m

キセノン封入容器

光電子増倍管

アノード

10^{-12} F

$10^8 \Omega$

10^{-7} sec

10^6 electrons

前置増幅回路

III-2 (選択) (100 点)

いくつかの物理系において次の N 次元積分が現れる。

$$Z_N(g) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_N [\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_N)]^2 \exp\left(-\sum_{i=1}^N V(\lambda_i)\right) \quad (\text{A})$$

ここで $\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ は Vandermonde 行列式、

$$\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_N \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \cdots & \lambda_N^{N-1} \end{vmatrix},$$

であり、 $V(\lambda)$ は

$$V(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{g}{4}\lambda^4 \quad (\text{ただし, } g > 0)$$

で与えられる。

さて、この積分を評価するために、次の性質を満たす直交多項式 $P_n(\lambda)$ を定義しよう。

$P_n(\lambda)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) は λ について n 次の多項式であり、次の 2 条件を満足する。

1. (正規化条件) $P_n(\lambda)$ の最高次のべき λ^n の係数は 1。即ち $P_n(\lambda) = \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_{nj}\lambda^j$ と展開される。
2. (直交性) $n \neq m$ について

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \exp(-V(\lambda)) P_n(\lambda) P_m(\lambda) = 0.$$

このとき、以下の設問に答えよ。

- (1) 正規化条件を用いると Vandermonde 行列式は P_n を用いて以下のように書き換えられることを示せ。

$$\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = \begin{vmatrix} P_0(\lambda_1) & P_0(\lambda_2) & \cdots & P_0(\lambda_N) \\ P_1(\lambda_1) & P_1(\lambda_2) & \cdots & P_1(\lambda_N) \\ P_2(\lambda_1) & P_2(\lambda_2) & \cdots & P_2(\lambda_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N-1}(\lambda_1) & P_{N-1}(\lambda_2) & \cdots & P_{N-1}(\lambda_N) \end{vmatrix}$$

(2) $P_n(\lambda)$ のノルムを s_n とする。すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \exp(-V(\lambda)) P_n(\lambda) P_n(\lambda) = s_n.$$

このとき積分 (A) は次のように書けることを証明せよ。

$$Z_N(g) = N! \prod_{k=0}^{N-1} s_k.$$

(3) P_n の間に次の漸化式が成立することを証明せよ。

$$\lambda P_n(\lambda) = P_{n+1}(\lambda) + r_n P_{n-1}(\lambda) \quad (r_n = s_n/s_{n-1}).$$

(ヒント：まず展開式、

$$\begin{aligned} \lambda P_n(\lambda) &= \sum_{i=0}^{n+1} c_{n,i} P_i(\lambda), \\ c_{n,n+1} &= 1, \\ c_{n,i} &= s_i^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-V(\lambda)} P_n(\lambda) \lambda P_i(\lambda), \end{aligned}$$

を証明し $c_{n,i}$ を各 $i = 0, 1, \dots, n$ について評価せよ。)

(4) 次に積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-V(\lambda)} \frac{dP_n}{d\lambda} \lambda P_n(\lambda)$$

を二通りに評価することにより次の漸化式を証明せよ。

$$r_n + g r_n (r_{n-1} + r_n + r_{n+1}) = n.$$

III-3 (選択) (100 点)

調和振動子に時間に依存した外力 $F(t)$ が働いている系を量子力学的に考察する。この系のハミルトニアンは

$$H(t) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - F(t)x \quad (\text{A})$$

で与えられる。

- (1) まず外力項を落とした純粋調和振動子のハミルトニアン

$$H_0 = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

を考える。 H_0 の規格化された固有状態 $|n\rangle$ ($H_0|n\rangle = E_n|n\rangle$) を固有値 E_n の小さい方から $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots$ とする。また、

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \quad p = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a - a^\dagger)$$

で消滅演算子 a および生成演算子 a^\dagger を定義する。

- (a) a と a^\dagger の間の交換関係を与えよ。また、 H_0 は a と a^\dagger でどのように表されるか。
(b) 状態 $|n\rangle$ を基底状態 $|0\rangle$ および a^\dagger を用いて表せ。また、固有値 E_n はどのように与えられるか。

- (2) 外力 $F(t)$ は $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} F(t) = 0$ を満たし、したがって無限の過去 ($t \rightarrow -\infty$) および無限の未来 ($t \rightarrow \infty$) では、系の状態は H_0 の固有状態で良く識別されるとする。さて、最初 ($t \rightarrow -\infty$) 系が H_0 のある固有状態にあったとして、外力が作用し終わった無限の未来に系が H_0 の固有状態 $|n\rangle$ にある確率を (摂動論を用いずに正確に) 求めたい。このために次のような考察をする。Schrödinger 表示では、系の状態ベクトル $|\psi_S(t)\rangle$ の時間発展は、Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_S(t)\rangle = H(t) |\psi_S(t)\rangle$$

で記述されるが、今問題を扱い易くするため、

$$|\psi_S(t)\rangle = e^{-iH_0 t/\hbar} |\psi_I(t)\rangle$$

で与えられる相互作用表示の状態ベクトル $|\psi_I(t)\rangle$ を考える。 $|\psi_I(t)\rangle$ の時間発展の方程式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle = H_I(t) |\psi_I(t)\rangle \quad (\text{B})$$

の形になるが、この右辺の $H_I(t)$ が

$$H_I(t) = -F(t) \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (ae^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t})$$

で与えられることを示せ。

- (3) 方程式 (B) は、 $H_I(t)$ が演算子であるため、一般にこれを解くためには c 数 (演算子ではない普通の数) の微分方程式とは異なった取扱が必要である。しかし特に今の $H_I(t)$ の場合には、(B) の解は

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{i\theta(t)} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t d\tau H_I(\tau)\right) |\psi_I(-\infty)\rangle \quad (C)$$

で与えられ、 $H_I(t)$ を c 数として解いた場合との違いは位相因子 $e^{i\theta(t)}$ だけであることがわかる。(これは、 $H_I(t)$ が a あるいは a^\dagger の一次の項しか含まず、したがって $[H_I(t), H_I(t')]$ が任意の t, t' に対して c 数である事による。) この位相 $\theta(t)$ は外力 F で決まる c 数の実数関数であり、遷移確率だけを問題にする場合には知る必要はない。さて、(C) 式を用いて以下の (a) および (b) に答えよ。

- (a) 最初 ($t \rightarrow -\infty$) 系が基底状態 $|0\rangle$ にあった (すなわち、 $|\psi_I(-\infty)\rangle = |0\rangle$) として、外力 F が働き終わった後、無限の未来 ($t \rightarrow \infty$) に系が状態 $|n\rangle$ にある確率 P_n を求めよ。必要ならば、公式 $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$ (但し、 $[A,B]$ は c 数) を用いよ。
- (b) $t \rightarrow \infty$ における系のエネルギー期待値と $t \rightarrow -\infty$ でのエネルギー E_0 との差

$$\Delta E = \langle \psi_I(\infty) | H_0 | \psi_I(\infty) \rangle - E_0$$

を求めよ。

- (c) 特に外力 $F(t)$ が

$$F(t) = \frac{F_0}{(t/T)^2 + 1}$$

で与えられる場合の P_n を計算せよ。

- (4) 以上では系を量子力学的に扱ったが、次に同じハミルトニアン (A) の系を古典力学で考察する。上と同様に $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} F(t) = 0$ とする。最初 ($t \rightarrow -\infty$) 振動子が原点 $x = 0$ で静止していたとして、外力が働き終わった後の $t \rightarrow \infty$ での系のエネルギーを求めよ。

III-4 (選択) (100点)

低速中性子を用いて、固体の構造や種々の物性を調べることができる。以下の設問に答えよ。

- (1) 低速中性子の発生方法を述べよ。
- (2) 300Kにおける熱中性子のエネルギーを電子ボルト単位で表せ。また、その波長を求めよ。但し、ボルツマン定数は 1.4×10^{-23} [J/K]、電気素量は 1.6×10^{-19} [C]、プランク定数は 6.6×10^{-34} [J·s]、中性子質量は 1.7×10^{-27} [kg] である。
- (3) 中性子を単色化する方法(すなわち、特定のエネルギーをもつ中性子を選別する方法)とその原理を述べよ。
- (4) 中性子の検出方法として、核反応 ${}^3\text{He}(n, p){}^3\text{H}$ を利用することができる。具体的にどのような検出器を用いればよいか、説明せよ。
- (5) 中性子散乱により、結晶中のフォノンの分散関係 $\omega(\mathbf{q})$ を調べたい。但し、 ω は角振動数、 \mathbf{q} は波数ベクトルを表す。入射中性子の波数ベクトルを \mathbf{k}_i 、散乱中性子の波数ベクトルを \mathbf{k}_f とし、測定原理の概要を述べよ。また、実験装置の概念図を示せ。

III-5 (選択) (100点)

原子核が磁気モーメント $\mu = gI$ (I は核スピン、 g は定数) を持っているとき、電子との間に磁氣的相互作用 $V = A\mathbf{I}\cdot\mathbf{S}$ が働く。ここで、 \mathbf{S} は電子のスピン ($S = 1/2$)、 A は超微細定数と呼ばれる。ある種の化合物半導体では、伝導帯電子や浅い不純物ドナーに局在する電子の軌道半径は 100 [オングストローム (Å)] 程度もあり、電子は多数の原子核と相互作用する。このような状態では、原子核の平均核スピン偏極度を P_N として、 \mathbf{I} を $P_N\mathbf{I}$ に置き換えることが出来る。相互作用 V が大きい系では、原子核スピンが偏極すると電子は熱平衡状態で大きいスピン偏極を持つことになる。このような状況で、電子のスピン偏極を人為的に核のスピン偏極に移すことが出来れば、電子と原子核は相互に偏極を強めあう。その結果、ある温度以下では外部磁場が無くても有限の核スピン偏極が発生しうる。以下でこの問題を、外部磁場が無く、核スピンの大きさは $1/2$ であり、 A と g は正の値であるとして考えよう。

- (1) 原子核のスピン偏極度が P_N である時、熱平衡状態にある電子が温度 T [K] で持つ電子スピンの偏極度 P_e を、ボルツマン定数を k として求めよ。偏極度 P_e の定義は、

$$P_e = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}$$

であり、 N_+ 、 N_- は、それぞれ平均核スピン偏極の向きに平行、反平行スピンを持つ電子の数である。

- (2) 設問(1)で求めた電子スピンの偏極を核偏極に移すことが出来る。すなわち、外力(マイクロ波またはレーザー光)を加えることにより $P_N = -P_e$ とすることが出来る。このような外力が加えられた状態で、核スピンの偏極は、温度の関数としてどのような振舞をしめすか。
- (3) 以上の設問では、電子と核スピン系の振舞を理想的な状態で考えた。しかし実際には様々な他の影響により振舞が変化することがある。どのような他の影響が考えられるか。2点を列挙せよ。