

平成22年度大学院入学試験問題 I (3時間)

注意

- (1) 問題I-1, I-2, I-3の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に問題番号, 受験番号, 氏名を記入せよ。
- (3) 解答用紙は3問すべて提出すること。なお, 問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて7ページまでである。

I-1 (力学) (100 点)

重さの無視できる半径 R のリングが、その 1 つの鉛直方向の直径を固定軸として回転している。このリングに取り付けられた質量 m の質点の運動について考えよう (図 1)。但し、リングと質点の間には摩擦はなく、質点はリングに沿って離れることなく自由に移動できるものとする。重力加速度は g とする。

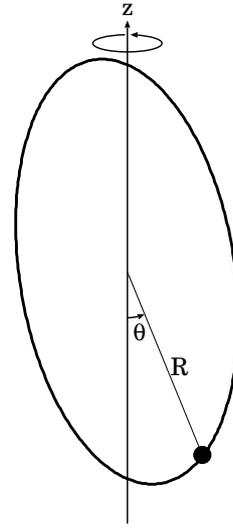


図 1

- (1) リングの中心を原点、鉛直上方向を z 軸とする円柱座標系を考える。円柱座標系における基本ベクトル e_r, e_φ, e_z (図 2) を用いて質点の位置ベクトル \mathbf{x} が

$$\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z \quad (\text{A})$$

と表されるとき、式 (A) の両辺を 2 階微分することにより、加速度 $\mathbf{a} = d^2\mathbf{x}/dt^2$ を

$$\mathbf{a} = A\mathbf{e}_r + B\mathbf{e}_\varphi + C\mathbf{e}_z \quad (\text{B})$$

という形で表せ。

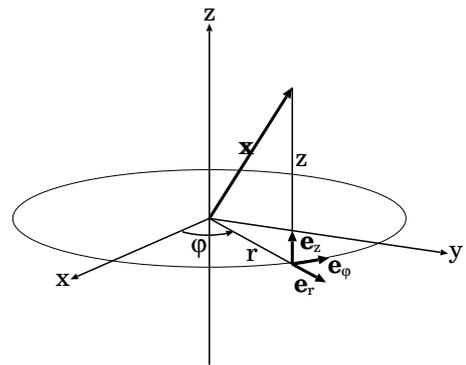


図 2

- (2) 質点がリングより受ける原点方向の力の大きさを T 、リングに与えられるトルクの大きさを N 、 z 軸負の方向と質点の位置ベクトルのなす角を θ として (1) の結果より質点の運動方程式を求め、 r, z, T を消去して θ と φ の運動方程式とせよ。
- (3) リングが角速度 ω_0 で等速回転し、かつ $\theta = \theta_0 > 0$ で平衡状態にあるとき、 $\cos\theta_0$ を R, g, ω_0 で表し、このような平衡状態が存在するための ω_0 の条件を求めよ。また、等速回転が常に保たれるものとして、この平衡点を挟む微小振動の周期を求めよ。

(次ページに続く)

以下、自由回転 ($N = 0$) の場合を考える。

- (4) この系のラグランジアンを θ と φ で表し、オイラー・ラグランジュ方程式より導かれる結果が (2) の結果と一致することを示せ。
- (5) $\theta = \theta_0$ で等速回転の平衡状態にあった質点に対し、水平方向に微小な力積が加わって角速度が $\omega_0 \rightarrow \omega_1$ ($0 < |\omega_1| < |\omega_0|$) に変化した場合、その後の質点の運動の概要を述べ、 $\cos\theta$ の取り得る値の範囲を求めよ。

I-2 (電磁気学) (100 点)

導体に電磁波が侵入したときの様子について考える。まずは導体中の電磁波 (電場 E , 磁束密度 B) について、電気伝導率 σ 、誘電率 ϵ 、透磁率 μ が一様な場合の Maxwell 方程式を出発点とする。その時の Maxwell 方程式は以下のように与えられるとする。

$$\text{rot} \mathbf{B} = \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{j} \quad (\text{A})$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{B})$$

$$\text{div} \mathbf{E} = 0 \quad (\text{C})$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{D})$$

ただし、電流密度 \mathbf{j} と \mathbf{E} の間には Ohm の法則

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{E})$$

が成り立つとする。

- (1) 式 (A)-(E) から \mathbf{B} を消去して \mathbf{E} に関する偏微分方程式を導け。必要であれば、以下の公式を用いること。

$$\text{rot rot} \mathbf{E} = \text{grad div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (\text{F})$$

次に、 $z \geq 0$ の半無限空間にある導体の表面に平面波である角振動数 ω 、波数 k の電磁波 ($E_x(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$) を垂直に入射した。ただし、電場 $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$ 、磁束密度 $\mathbf{B} = (0, B_y, 0)$ とし E_x, B_y は x, y に依存しないとする。

- (2) この導体内での電場 E_x の振る舞いを設問 (1) で求めた偏微分方程式を解くことで考える。導体内での波数を複素数 $k_r + ik_i$ とし、 $\sigma, \mu, \epsilon, \omega$ を用いて k_r, k_i を求めよ。
- (3) 設問 (1) の偏微分方程式から E_x を求めると導体の境界付近では、電磁波の振幅が急激に変化することがわかる。これは表皮効果と呼ばれる。電磁波の振幅が、表面に比べ e^{-1} に減衰する表皮効果の深さ δ を $\sigma, \mu, \epsilon, \omega$ を用いて表せ。

(次ページに続く)

(4) B_y を計算し、 E_x との間の位相差 ϕ を求めよ。

(5) 通常の金属にマイクロ波が入射した場合 ($\sigma \gg \epsilon\omega$)、表皮効果の深さが $\sqrt{2/(\mu\sigma\omega)}$ に一致することを示せ。かつ、この場合 E_x と B_y の間の位相差 ϕ を求めよ。

I-3 (統計力学) (100 点)

(1) 角振動数 ω をもつ調和振動子のエネルギー準位は基底エネルギーから測って

$$\varepsilon = 0, \hbar\omega, 2\hbar\omega, 3\hbar\omega, \dots, n\hbar\omega, \dots$$

で与えられる。ここでは簡単のため、ゼロ点振動は無視する。全体が N 個のほとんど独立な振動子からなる系が、全エネルギー $E = M\hbar\omega$ を持つ状況を考える。

- (1a) 熱力学的重率 W を求め、 $N \gg 1$ にて成立する Stirling の公式 $\log(N!) \approx N \log(N/e)$ を用いて、 $k \log W$ で与えられるエントロピーを求めよ。
- (1b) 熱力学関係式よりこの系の温度 T と E の関係を求めよ。
- (1c) $N(\gg 1)$ 個のうちの一つの振動子がエネルギー $E_1 = L\hbar\omega$ をもつ確率を与え、それを $M \gg L$ の条件下で近似せよ。また、その確率が規格化条件を満たしていることを示せ。
- (2) 熱浴に接した調和振動子 1 個がエネルギー $\varepsilon = L\hbar\omega$, $L = 0, 1, 2, \dots$ を持つ確率を P_L とする。
- (2a) 平均エネルギー $E_1 = \sum_{L=0}^{\infty} L\hbar\omega P_L$ のもとで、エントロピー $S = -k \sum_{L=0}^{\infty} P_L \log P_L$ を最大化するような分布 $\{P_L\}$ を Lagrange 未定乗数法を用いて求めよ。
- (2b) (2a) においてエントロピー最大化原理で求めた分布 $\{P_L\}$ が、(1c) で熱力学的重率から計算した確率分布と同じになる条件を求めよ。

(このページは白紙である)

平成 22 年度大学院入学試験問題 II (3 時間)

注意

- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に問題番号，受験番号，氏名を記入せよ。
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 7 ページまでである。

II-1 (量子力学) (100点)

1次元シュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) - 2aV_0 \delta(x^2 - a^2) \psi(x) = E\psi(x) \quad (\text{A})$$

の束縛状態に対する固有関数、エネルギー固有値について考える。ここで $\delta(x)$ はデルタ関数を表し、 V_0 と a は正の定数である。以下の設問に答えよ。

(1) 一般に1次元シュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (\text{B})$$

に於いて、 $V(x) = V(-x)$ が成り立ち、エネルギー固有値に縮退が無い時、固有関数は必ず偶関数、又は奇関数であることを示せ。また縮退がある時にも、固有関数を必ず偶関数、又は奇関数の形に取り直すことが出来ることを示せ。

- (2) 式(A)の束縛状態に対する固有関数について、偶関数、奇関数の関数形をそれぞれ求め(但し、規格化定数はそのまま残しておいて構わない)、概形を図示せよ。
- (3) 設問(2)で導出した偶関数、及び奇関数に対するエネルギー固有値を求める式を導出せよ。
- (4) 設問(3)で導出した式を用いて、エネルギー固有値の a に対する依存性を、偶関数及び奇関数の固有関数それぞれについて考察し、概略を図示せよ。

(このページは白紙である)

II-2 (物理数学) (100 点)

- (1) a を実数の定数としたとき、実軸に平行な積分路に沿った次の複素積分の値が $\sqrt{\pi}$ になることを示せ。

$$\int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} e^{-z^2} dz. \quad (\text{A})$$

- (2) $u = u(x, t)$ に関する $-\infty < x < \infty$ での一次元拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{B})$$

を考える。ここで D は拡散係数で正の定数である。

$t = 0$ での $u(x, 0)$ が与えられたとき、 $t > 0$ での拡散方程式 (B) の解を以下のようにして求めよう。

関数 $f(x)$ のフーリエ変換を f_k としたとき、フーリエ変換の反転公式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx} dk \quad (\text{C})$$

を $u(x, t)$ に適用し、 $u(x, t)$ を

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_k(t) e^{ikx} dk \quad (\text{D})$$

と表そう。

(2a) 式 (D) を拡散方程式 (B) に代入して $u_k(t)$ の従う微分方程式を導け。

(2b) 初期値 $u_k(0)$ に対する上の微分方程式の解を $u_k(t) = u_k(0)g_k(t)$ と表したとき、 $g_k(t)$ を求めよ。

$u_k(0)$ は $u(x, 0)$ のフーリエ変換

$$u_k(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x', 0) e^{-ikx'} dx' \quad (\text{E})$$

であるので、 $u_k(t) = u_k(0)g_k(t)$ を式 (D) に代入すると、 $u(x, t)$ は

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x', t) u(x', 0) dx' \quad (\text{F})$$

$$G(x, x', t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_k(t) e^{ik(x-x')} dk \quad (\text{G})$$

と書ける。

(次ページに続く)

(2c) 式 (G) の積分を実行して、関数 $G(x, x', t)$ を求めよ。
このとき、必要なら設問 (1) の結果を用いて良い。

以下では、 u_1 を正の定数として $x \geq 0$ のとき $u(x, 0) = u_1$ で、 $x < 0$ のとき $u(x, 0) = 0$ という初期条件を考える。

(2d) $t > 0$ に対して式 (F) から、 $x = -\infty$ 、 $x = 0$ と $x = \infty$ での $u(x, t)$ の値を求めよ。

(2e) 一般の x に対しては、 $u(x, t)$ は解析的には積分はできないが、その振る舞いは調べることができる。 t_1 と t_2 を $0 < t_1 < t_2$ を満たす2つの異なる時刻としたとき、 $u(x, t_1)$ と $u(x, t_2)$ の概形を同じ図中に違いが分かるように図示せよ。また、 $t > 0$ での $u(x, t)$ の時間変化の特徴を述べよ。

(3) x の変域を $0 \leq x < \infty$ とし、 $x = 0$ で $u(0, t) = 0$ という境界値が与えられているとき、拡散方程式 (B) の解は $G(x, x', t)$ を用いて

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} (G(x, x', t) - G(x, -x', t)) u(x', 0) dx' \quad (\text{H})$$

と書ける。

u_0 を正の定数として、 $x > 0$ に対して $u(x, 0) = u_0$ という初期条件を考える。

(3a) $t > 0$ に対して式 (H) から、 $x = \infty$ での $u(x, t)$ の値を求めよ。

(3b) 一般の x に対しては、 $u(x, t)$ は解析的には積分はできないが、その振る舞いは調べることができる。 t_1 と t_2 を $0 < t_1 < t_2$ を満たす2つの異なる時刻としたとき、 $u(x, t_1)$ と $u(x, t_2)$ の概形を同じ図中に違いが分かるように図示せよ。

II-3 (電磁気学) (100 点)

十分に長く、太さの無視できる針金が z 方向に沿って直線に保たれたまま、一定の誘電率 ε を持つ誘電体の中に置かれているとする。針金は x - y 面内において $x = b, y = 0$ に置かれてあり、一様な線電荷密度 σ を持って帯電している。外部からの電磁場はないものとする。

(1) この誘電体中の静電場 \mathbf{E} が従うマックスウェル方程式は

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) &= \rho(x, y), \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0\end{aligned}\tag{A}$$

で与えられる。ここで $\rho(x, y)$ は電荷密度である。対称性から、電場に z 依存性がないことに注意して、この針金もたらす電場を導出せよ。

次に図 1 のように、上記の誘電体が左側 ($x < 0$) にある別の媒質と平面 $x = 0$ で接しており、上記の針金はその接触面に平行に置かれているとしよう。 $x < 0$ にある媒質の誘電率は ε' とする。この場合、 $\varepsilon \neq \varepsilon'$ であれば、実際には針金が誘起する電荷分布が接触面上に存在するが、この面電荷の存在を一旦忘れて、以下の鏡像の方法を用いて電場分布を調べる方が便利である。

「実際に針金が置かれてある右側の誘電体内の電場は、 A にある針金と A の対称点 A' に置かれた線電荷密度 σ' の仮想針金からの寄与の和で与えられる。一方、左側の誘電体内の電場は A には線電荷密度 σ'' の別の針金があると仮定することで得られる。ただし、これらの針金は全て z 軸に平行になっている。」

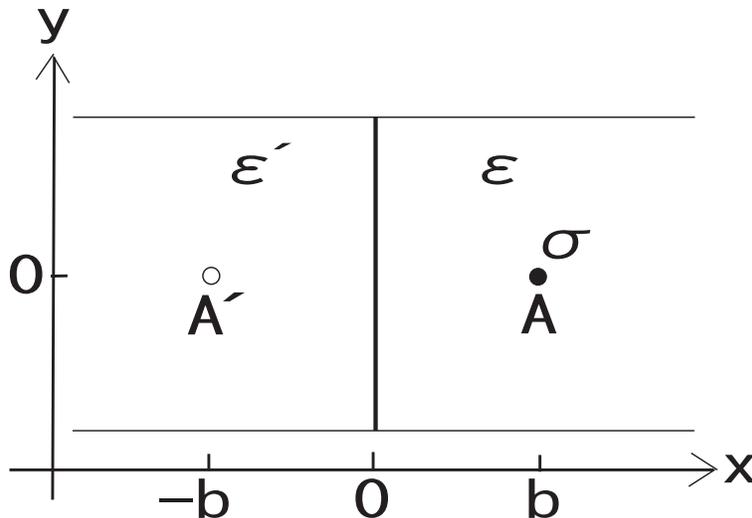


図 1

(次ページに続く)

- (2) 鏡像の方法を用いるには、接触面 $x = 0$ 上で電場が満たすべき境界条件を決める必要がある。マックスウェル方程式を狭い区間 $|x| < \delta$ にわたって積分して、その境界条件を求めよ。ただし、 $x > 0, x < 0$ における電場をそれぞれ、 $\mathbf{E}(x, y) = (E_x, E_y, E_z)$, $\mathbf{E}'(x, y) = (E'_x, E'_y, E'_z)$ とする。
- (3) \mathbf{E}, \mathbf{E}' を決めることにより、2つの誘電体にわたる電気力線の概略図を描け。
- (4) 針金が受ける力を導出し、力の方向について論じよ。
- (5) 左側の媒質が導体である場合、導体表面の面電荷密度 $\Sigma(y)$ は $\varepsilon E_x(x = 0, y)$ で与えられ、その導体面電荷 Q_s は $-\sigma L$ となる。ただし、 L は z 方向の系のサイズである。 Q_s を実際に計算することにより、左側の媒質が導体である場合は $\varepsilon' \rightarrow +\infty$ の極限に相当することを示せ。

平成 22 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題は III-1 から III-7 まで 7 問ある。この中から 3 問選択せよ。4 問以上選択した場合はすべての解答が無効になることがある。
 - (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
 - (3) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
 - (4) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
 - (5) 問題冊子は表紙を含めて 15 ページまでである。
-

III-1 量子力学 (電磁場中の荷電粒子)

III-2 力学 (変分)

III-3 量子統計 (フェルミ気体)

III-4 物理数学 (ルジャンドル変換)

III-5 電磁気学 (応用)

III-6 量子力学 (磁場中のスピン)

III-7 宇宙 (コンパクト星)

III-1 (量子力学: 電磁場中の荷電粒子) (100点)

2次元 x - y 面内に束縛され、一様電磁場下に置かれた質量 m , 電荷 $q (> 0)$ の荷電粒子の定常状態について考える。この粒子の波動関数 $\psi(x, y; t)$ が従うシュレディンガー方程式は、電磁場を表すベクトルポテンシャル \mathbf{A} 、スカラーポテンシャル Φ を用いて

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[\frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\Phi \right] \psi \quad (\text{A})$$

と表される。 \mathbf{p} は運動量ベクトルである。以下、一様な磁束密度 $B = (0, 0, B)$ はゲージ $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$ で表されるものとする。

まず、電場がない場合 ($\Phi = 0$) を考える。

(1) ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{\hbar q B}{m} \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \\ a a^\dagger - a^\dagger a &= 1 \end{aligned} \quad (\text{B})$$

の形に書けることを示せ。

(2) 基底状態の波動関数は

$$\begin{aligned} \psi_0(x, y; t) &= \exp\left(-i \frac{qB}{2m} t\right) \varphi_0(x, y), \\ \varphi_0(x, y) &= \sum_k c_k \exp(ikx) u_0(y, k) \end{aligned} \quad (\text{C})$$

の形に書けることを説明し、 $u_0(y, k)$ を求めよ。ただし、 k は実数、 c_k は k のみに依存する任意の係数である。

次に、一様な面内電場 $\mathbf{E} = (0, E, 0)$ がさらに加わった系を考えよう。

(3) シュレディンガー方程式 (A) は次の形の解を含むことを示せ。

$$\psi(x, y; t) = \exp\left[i \left(\frac{mv}{\hbar} x' + \frac{mv^2}{2\hbar} t' \right)\right] \psi_0(x', y'; t') \quad (\text{D})$$

ただし、 $x' = x - vt$, $y' = y$, $t' = t$ である。また、 v を具体的に与えよ。

(次ページに続く)

- (4) (D) 式は、速度 $\boldsymbol{v} = (v, 0, 0)$ で動いている座標系 (x', y', t') においては、粒子が基底状態にあることを意味している。実験室系 (x, y, t) で見た電流 \boldsymbol{J}_e は $(qv, 0, 0)$ で与えられることを示せ。ただし、電流は粒子の確率流密度

$$\boldsymbol{j} = \frac{1}{2m} \psi^* (\boldsymbol{p} - q \boldsymbol{A}) \psi + \text{c.c.} \quad (\text{E})$$

(c.c. は複素共役を表す) を用いて、

$$\boldsymbol{J}_e = q \int dx dy \boldsymbol{j} \quad (\text{F})$$

で与えられる。また、(D) の ψ_0 は十分遠方で粒子が存在しないという条件、 $|\psi_0(|x| \rightarrow \infty)| = |\psi_0(|y| \rightarrow \infty)| = 0$ 、と規格化条件

$$\int dx dy |\psi_0|^2 = 1 \quad (\text{G})$$

を満たすものとする。

- (5) (D) 式に現れる位相因子は、電磁場がない状況下の自由粒子のシュレディンガー方程式がガリレイ変換に対し不変であることを要請しても、波動関数の変換則に現れる。このことを、座標系を (x, y, t) から $(x'' = x - wt, y'' = y, t'' = t)$ に変換することにより、具体的に示せ。ただし、定数 w は任意の実数である。

III-2 (力学: 変分) (100 点)

以下の問題は、2次元平面 (x, y) で考える。

- (1) 任意の点 $P(x_1, y_1)$ を始点とし、別の任意の点 $Q(x_2, y_2)$ を終点とする滑らかな曲線 $y(x)$ を考える。

(1a) P から Q までの曲線の長さ L を x に関する積分で表せ。

(1b) 始点と終点は固定して、変分 $\delta L = 0$ を課したとき、 $y(x)$ の従う微分方程式を導け。

(1c) (1b) で求めた方程式の解を求めよ。

- (2) 媒質中での光線の伝搬を考える。 $y_1 < 0, y_2 > 0, x_1 < x_2$ として、点 $P(x_1, y_1)$ を光線の始点とし、点 $Q(x_2, y_2)$ を終点とする。屈折率 n が n_1, n_2 を定数として

$$y < 0 \text{ の時 : } n = n_1 \quad (\text{A})$$

$$y \geq 0 \text{ の時 : } n = n_2 \quad (\text{B})$$

で与えられるとする。ここで、屈折率 n は、真空中の光速度 c を媒質中の光速度 (位相速度) v で割った値 ($n = c/v$) で定義される。

- (2a) 光線が点 $R(X, 0)$ で x 軸を横切るとした場合、 P から R を通過して Q までに進むのに要する時間 T を式で表せ。

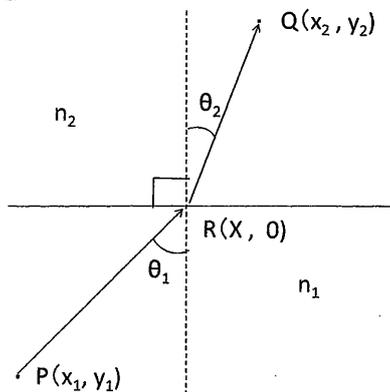


図1

- (2b) 境界面に対する光の入射角を θ_1 、屈折角を θ_2 とするとき (図1)、 T が最小になるのが、実現される X であるという要求から、光の屈折の法則 ($n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$) を導け。

(次ページに続く)

屈折率が、 y の滑らかな関数 $n(y)$ の場合を以降考える。

(2c) 光線の経路が $y(x)$ で与えられるとして、光線が P から Q にまで進むのに要する時間 T を x に関する積分で表せ。

(2d) 始点と終点は固定して、変分 $\delta T = 0$ を課したとき、経路 $y(x)$ の従う微分方程式を導け。

(2e) 実際の光線は (2d) で求めた微分方程式に従って伝搬することが知られている。
屈折率が、今の場合のように y のみの関数の時には、光線の伝搬に沿って x に依存しない保存量が存在することを示せ。

(2f) 上の保存量を具体的に求めよ。

(2g) 原点から y 軸となす角度 θ_0 で y の正の方向に進み出した光線が $y = Y (> 0)$ に到着したとき、光線の進行方向が y 軸となす角度 θ を求めよ。

(2h) $n(y)$ が y の減少関数の場合、光線の経路の特徴を言え。

III-3 (量子統計: フェルミ気体) (100 点)

2次元自由電子気体の統計力学について調べる。まず、ゼロ磁場下でこの系を考えよう。電子はフェルミ粒子であるため、この系の熱力学ポテンシャルは

$$\Omega_0 = -2\beta^{-1} \sum_{\mathbf{k}} \ln(1 + \exp[-\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)]) \quad (\text{A})$$

と与えられる。ここで、 $\beta = 1/(k_B T)$ 、 μ は化学ポテンシャル、 $\hbar k$ は自由電子の運動量、 $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / (2m)$ は1電子運動エネルギーである。(A)式の数因子2はスピンに関する縮退度を表す。

- (1) 1スピン自由度あたりの状態密度 $D(\varepsilon) = dN_s(\varepsilon)/d\varepsilon$ は1電子エネルギー ε に依らないことを示せ。また、全電子数 N を D と $T = 0$ での化学ポテンシャル $\mu(T = 0) = E_F$ (フェルミエネルギー) を用いて表せ。ただし、 $N_s(\varepsilon)$ はエネルギーが ε 以下の1スピン当たりの状態数を表す。

- (2) Ω_0 は次式で表されることを示せ。

$$\Omega_0 = -\mu N \left(1 - \frac{\mu}{2E_F}\right) - \frac{N}{E_F} \beta^{-2} \left[\int_0^\infty dx \frac{x}{e^x + 1} + \int_0^{\beta\mu} dx \frac{x}{e^x + 1} \right] \quad (\text{B})$$

- (3) μ の低温での振る舞いに留意して、低温比熱 C を T について最低次まで求めよ。必要があれば、

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad (\text{C})$$

を用いよ。

今、この電子系が2次元面に垂直にかけられた一様な磁束密度 $B = (0, 0, B)$ の下にあるとしよう。ただし、簡単のため、電子のゼーマン効果は無視できるとしよう。この場合、1電子のエネルギー固有値 E_n は量子化され、

$$E_n = \frac{e\hbar B}{m} \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (\text{D})$$

となる。また、各固有状態における縮退度 N_Φ は

$$N_\Phi = \frac{e\Phi}{2\pi\hbar} \quad (\text{E})$$

与えられる。ここで、 Φ は全磁束、 e は素電荷である。このことを用いて、以下で

(次ページに続く)

は弱い磁場下での熱力学ポテンシャルを調べる。

(4) 磁場下での熱力学ポテンシャル Ω を N を用いて表せ。

(5) パラメタ b が微小量と仮定し、ポワッソンの和公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(i 2\pi m x) \quad (\text{F})$$

を用いて、次の近似式

$$b \sum_{l=0}^L f(b(l + 1/2) - \mu) \simeq \int_0^X dx f(x - \mu) - \frac{b^2}{24} \left(-\frac{\partial f(x - \mu)}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (\text{G})$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $b(L + 1/2) \equiv X \gg \mu$ であり、 $f(x - \mu)$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x - \mu)$ ($n \geq 0$) について、 $f^{(n)}(X - \mu) = 0$ が成り立つとせよ。

(6) わずかな磁場により、熱力学ポテンシャル Ω は Ω_0 に比べて増大すること (ランダウ反磁性) を示せ。

III-4 (物理数学：ルジャンドル変換) (100点)

下に凸の関数 $F(V)$ があるとき、与えられた実数 p に対して、

$$G(p) \equiv \min_V (F(V) + pV) \quad (\text{A})$$

で定義される関数 $G(p)$ を考える。ここで \min_V は p を固定し V を動かしたときの最小値を表す。

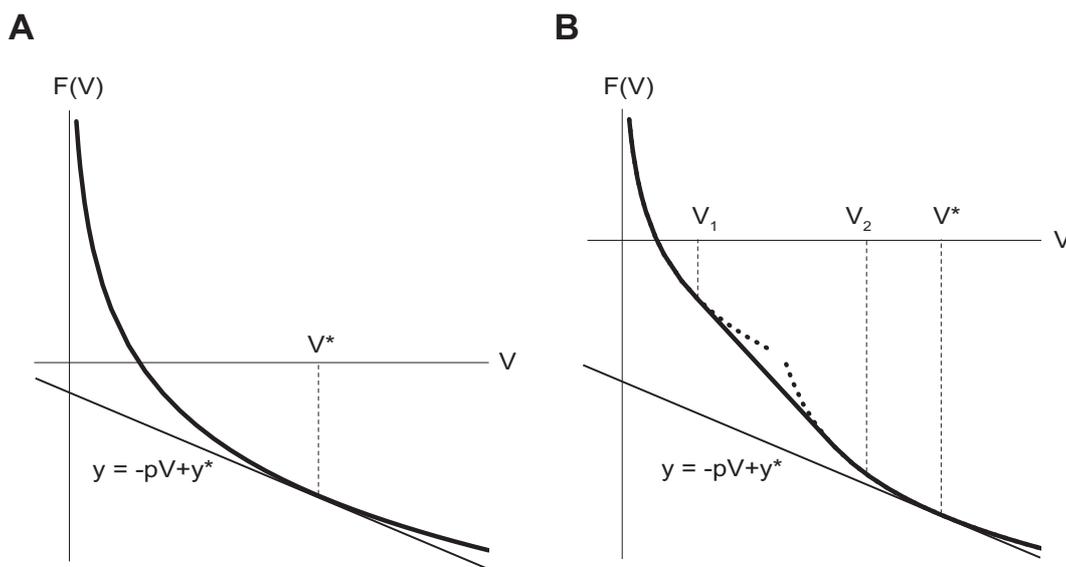


図 1

- (1) 図 1 A のように、傾き $-p$ の直線が関数 $y = F(V)$ に接する点を $V = V^*$ とし、 $G(p)$ の値を V^* を用いて表せ。また、それは図のどこに表現されているか。
- (2) $G(p)$ は、 $dG/dp = V^*$ の関係を満たすことを示せ。

(3) 関数

$$F(V) = c \times \left\{ (V/V_0)^{-q} - 1 \right\} / q \quad (\text{B})$$

について、式 (A) で与えられる変換 $G(p)$ を求めよ。また、 $q \rightarrow +0$ の極限について dG/dp を求めよ。ここで c と V_0 は定数である。

(4) 図 1 B で示された関数

$$F(V) = \begin{cases} -c \log (V/V_0) & (V < V_1) \\ c \{1 - V/V_1 - \log (V_1/V_0)\} & (V_2 \geq V \geq V_1) \\ c \{1 - V_2/V_1 - \log ((V - V_2 + V_1)/V_0)\} & (V > V_2) \end{cases} \quad (\text{C})$$

について、式 (A) で与えられる変換 $G(p)$ を求めよ。ここで \log は自然対数とする。

(次ページに続く)

- (5) $F(V)$ が熱力学におけるヘルムホルツ自由エネルギー $F(T, V)$ の体積依存性を表したものとすれば、式 (A) は、ギブス自由エネルギー $G(T, p)$ へのルジャンドル変換に対応する。式 (C) で定義される $F(V)$ から導かれる $p = -dF/dV$ を V の関数として描け。また、 $G(p)$ から求まる $V = dG/dp$ を p の関数として描け。 $F(V)$ がヘルムホルツ自由エネルギーの体積依存性を定性的に模したものとすれば、図 1 B の V_1 から V_2 への直線部分はどのような物理的状況を表しているか。
- (6) 熱力学関数の変換以外に物理学でルジャンドル変換が使われている例をあげよ。

III-5 (電磁気学:応用) (100点)

電力ケーブルに流れる交流を測定するために、図1のような構造を持つ装置が用いられる。以下、これをCT(current transformer)と呼ぶ。CTは、磁性体からなるリング状のコアに導線を巻いたコイルで、リングの中心に電力ケーブルを通す。電力ケーブルの交流により発生する磁場が誘起する起電力によってコイルに流れる電流を測定する。磁性体の透磁率を μ 、コアの内半径を r_i 、外半径を r_o 、厚みを d 、コイルの巻き数を N とする。

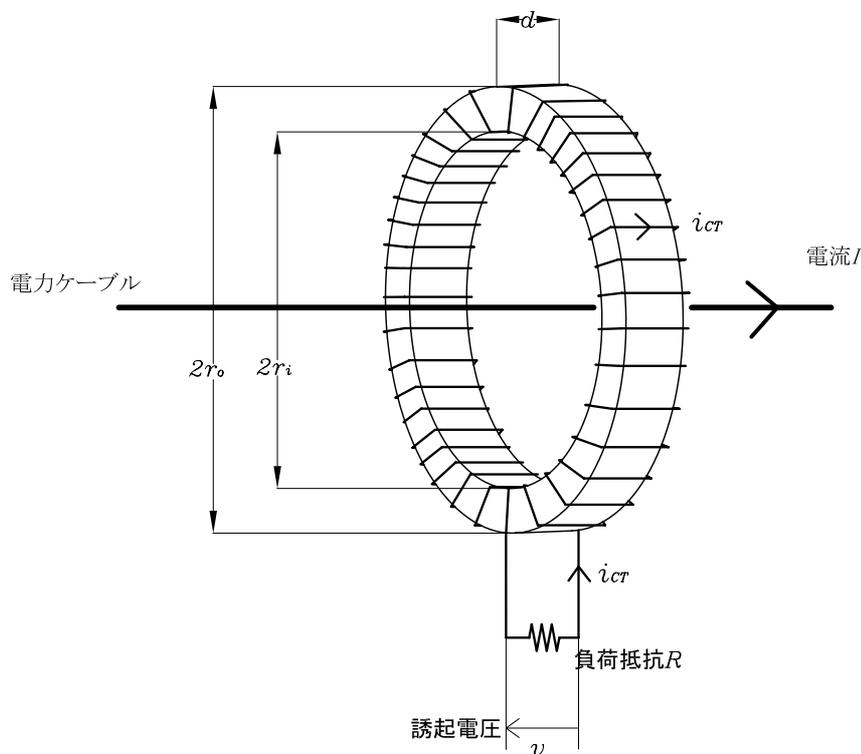


図1

CT自身のインダクタンス L を求めるため、まずCT単体で、コイルの導線に電流 i が流れている場合を考える。

- (1) コア内で、動径位置 r に発生する磁場の大きさ B を求めよ。ただし、リングの中心軸を z 軸とした円柱座標 (r, ϕ, z) において、コア内の磁場分布は、 z 方向、 ϕ 方向について一様としてよい。
- (2) (1)の結果を用いて、コア内に蓄えられる全磁場エネルギー U を求めよ。また、コイルのインダクタンス L と U の関係 $U = \frac{1}{2}Li^2$ より、 L を求めよ。

(次ページに続く)

次にリングの中心に電力ケーブルを通す。

- (3) 電力ケーブルに電流 I が流れたときに、コイルには電流 i_{CT} が誘起されるとして、コア内に発生する磁束 Φ を I 、 i_{CT} およびコイルの巻き数 N とインダクタンス L で表せ。 i_{CT} の向きは、図1の矢印方向を正とする。
- (4) CTには、図1にあるように、信号を読み出すための負荷抵抗 R が直列につけられる。コイルに誘起される電圧を v とすると $v = Ri_{CT}$ が成り立つ。(3) で求めた磁束の時間変化により v が誘起されるということを考慮して、 v が満たすべき時間に対する微分方程式を、 L, R, N, I および I の時間微分を用いて表せ。
- (5) ケーブルに流れる電流が角振動数 ω をもった交流 ($I = I_0 e^{j\omega t}$, I_0 : 正の実数) である場合に、誘起電圧を $v(t) = V(\omega) e^{j\omega t}$ として、(4) より、 $V(\omega)$ を求めよ。 j は虚数単位である。また、 $|V|$ と ω の関係を、横軸を ω 、縦軸を $|V|$ として図示せよ。 $|V|$ の最大値を縦軸に記入せよ。

電力ケーブルに図2のように最大値1Aで、1kHzの交流が流れているのを、CTで測定する場合を考える。

$R = 50 \Omega$, $d = 5 \text{ cm}$, $r_o = 12.2 \text{ cm}$, $r_i = 10 \text{ cm}$ とする。真空の透磁率は $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ 、 $\log_e 1.22 = 0.2$ とする。

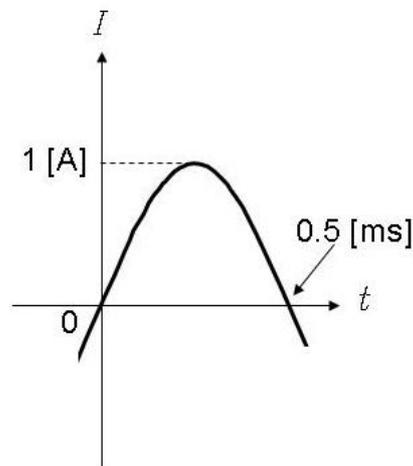


図2

- (6) コアが空芯 ($\mu = \mu_0$) で、 $N = 100$ の場合に、 $v(t)$ を横軸時間 t として図示せよ。 $t = 0$ からの半周期分でよい。最大値も (有効数字一桁で) 記入せよ。
- (7) コアの透磁率が $\mu = 10^4 \mu_0$, $N = 1000$ の場合に、 $v(t)$ を横軸時間 t として図示せよ。 $t = 0$ からの半周期分でよい。最大値も (有効数字一桁で) 記入せよ。

III-6 (量子力学：磁場中のスピン) (100点)

孤立した水素原子の1s状態を考えよう。陽子(p)と電子(e⁻)は、磁気モーメントをもっているため、外磁場 \mathbf{B} の下で、次のハミルトニアンで表される磁氣的相互作用をする。

$$\mathcal{H} = a\mathbf{I} \cdot \mathbf{S} - \gamma_p h\mathbf{I} \cdot \mathbf{B} - \gamma_e h\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{A})$$

$h\mathbf{I}$ と $h\mathbf{S}$ はそれぞれpとe⁻のスピン角運動量(h はプランク定数 h を 2π で割った量、 $I = S = \frac{1}{2}$)を、 $\gamma_p h\mathbf{I}$ と $\gamma_e h\mathbf{S}$ は対応する磁気モーメントを表す。 γ は粒子に固有の定数であり、 $\gamma_p > 0, \gamma_e < 0, |\gamma_e| \approx 660\gamma_p$ である。(A)式の右辺第1項にある a は超微細結合定数と呼ばれ、1s状態の水素原子の場合、pとe⁻の磁氣的結合の強さを表し、 $a > 0$ である。第2項と第3項はそれぞれpとe⁻のゼーマンエネルギーを表す。以下の3つの問いに答えよ。

- (1) \mathcal{H} の4つの固有値を求めよ。ただし、 \mathbf{B} の方向を z 軸とする： $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ 。
(ヒント： z 軸を量子化軸にとり、pスピンが上向き、e⁻スピンが下向きの状態を表す $|\uparrow - \rangle$ などの4つのケットベクトルで張られる空間を考え、 \mathcal{H} を作用させて得られる固有方程式から固有値を求めればよい。その際、 I_z の値を ± 1 変える $I_{\pm} = I_x \pm \sqrt{-1}I_y$ などを使って $\mathbf{I} \cdot \mathbf{S}$ を表し、 $I_+|\downarrow + \rangle = |\uparrow + \rangle, S_-|\uparrow + \rangle = |\uparrow - \rangle, I_z|\uparrow - \rangle = +\frac{1}{2}|\uparrow - \rangle$ などの関係を用いよ。)
- (2) B が小さく、 \mathcal{H} の第2項と第3項が第1項に比べて小さいとして、(1)で得た各エネルギー固有値に対応する規格化した固有ケットベクトルを求めよ。ただし、 B の0次の項のみでよい。ケットベクトルの表記には(1)のヒントで示したものをを用いよ。
- (3) B が小さい範囲でエネルギー固有値と磁場の関係を示す概略図を描け。その図に、 $B \neq 0$ 場合のエネルギー固有値の大きい順に1から4までの番号を記入せよ。また、(2)で求めた、対応する固有ベクトルを示せ。(必要に応じて、(1)で得た固有値を近似し、それらの大きさを比較せよ。)

次に、半導体Ge中に不純物として存在する水素原子の状態を調べよう。このために、 z 軸方向に一様な静磁場 \mathbf{B} をかけ、pと同じ電荷とスピンをもち、質量はその約 $\frac{1}{9}$ の正ミュオン(μ^+)をGe試料に打ち込み、pの代わりに用いる。個々の μ^+ は試料中に静止してe⁻とクーロン相互作用により結合しミュオニウムと呼ばれる水素に似た系をつくる。この場合も超微細結合定数 a および γ_{μ} (μ^+ に対する)は両方正の値をとる。

打ち込まれた μ^+ のスピンはすべて、 \mathbf{B} に直交する x 軸方向に向いているとする。 μ^+ は平均寿命 $2.2 \mu\text{s}$ で崩壊するが、その際発生する陽電子(e⁺)は、 μ^+ のスピン方向に放出されやすい。しかし、外磁場 \mathbf{B} の下で μ^+ のスピンが z 軸のまわりに歳差運動をするため、

(次ページに続く)

e^+ の放出されやすい方向は周期的に時間変化する。したがって、 μ^+ の打ち込みと e^+ の検出を繰り返すと、 x 軸方向に置いた e^+ 検出器の計数率は、打ち込みから検出までの時間 t に対して、図1に示されるような周期的変化を示す(横軸の時間はナノ秒単位である)。図1は、 $B = 5 \text{ mT}$ の場合をシミュレートした結果である(振動パターンは全体として右下がりになっているが、その減少の程度は μ^+ の平均寿命を反映している)。以下の2つの問いに答えよ。

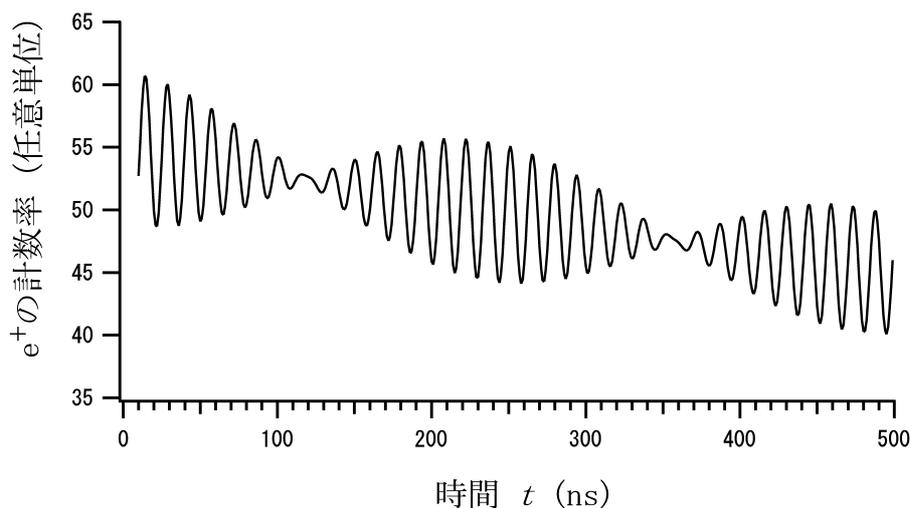


図1

- (4) 図1のパターンは基本的に $\cos(2\pi\nu_{12}t)$ と $\cos(2\pi\nu_{23}t)$ の和で表される時間変化を示している。ここで、 $\nu_{ij} = (E_i - E_j)/h$ であり、 E は磁場中のエネルギー固有値、 i と j は4つのエネルギー固有値の大きさの順を示す番号である ($E_1 > E_2 > E_3 > E_4$)。“うなり”に着目して、図1から適当な時間間隔を読み取り、(1)と(3)で得た結果を利用して、Ge中の μ^+ と e^- の磁氣的結合の強さを表す a/h の値を計算せよ (GHz 単位、有効数字1桁でよい)。ただし、 $\gamma_\mu = +8.5 \times 10^8 \text{ s}^{-1}\text{T}^{-1}$ 、 $\gamma_e = -1.8 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}\text{T}^{-1}$ とする。
- (5) (4)で求めた a/h の値から、Ge中のミュオニウムにおける μ^+ と e^- のクーロン結合の強さについて考察せよ。考察の材料として、以下の事実を用いよ。
- ・ a/h は μ^+ 位置での電子密度に比例している。
 - ・ 孤立したミュオニウムの a/h の値は 4.5 GHz である。
 - ・ 孤立したミュオニウム中の電子のボーア半径は、孤立した水素原子の場合とほとんど同じ 0.053 nm である。
 - ・ Geより原子番号の1つ大きいAsはGe中でドナー不純物として働く。Ge中に存在する As^+e^- 系は水素に似た系であるが、ボーア半径は 5 nm のオーダーである。

III-7(宇宙:コンパクト星) (100点)

白色矮星・中性子星・ブラックホールなどのコンパクト星と、普通の星からなる近接連星系を考えよう。以下、天体と観測者との距離 D は既知であるとする。

- (1) コンパクト星へガスが降着すると、その重力エネルギーの一部が放射エネルギーへと変換されて輝く。降着流が球対称な場合には、ガスに働く輻射圧と重力がつりあったところで光度が頭打ちになる(エディントン限界光度)。
 - (1a) その限界光度 L_E を、コンパクト星の質量 M の関数として求めよ。ただし、ガスは水素のみからなる完全電離ガスであると仮定し、陽子の質量を m_p 、トムソン散乱の断面積を σ_T 、重力定数を G 、光速を c とせよ。陽子に対する電子の質量は無視してよい。
 - (1b) コンパクト星の質量が太陽質量の 1.4 倍の場合、そのエディントン限界光度はいくらになるか、有効数字 1 桁の精度で計算せよ。必要なら、 $\sigma_T = 6.7 \times 10^{-29} \text{ m}^2$ 、 $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ を用いよ。
 - (1c) 観測されたフラックス F と距離 D から計算される光度 $L = 4\pi D^2 F$ を用いて、エディントン限界光度による制限から、コンパクト星の質量の下限を見積もることができる。しかし厳密には、この議論には問題がある。その理由を簡潔に説明せよ。
- (2) コンパクト星の質量を見積もる最も信頼できる方法は、ドップラー効果を用いて、連星運動を測定することである。伴星の分光観測により、連星系の軌道周期 P と、伴星の視線方向の速度振幅 v_O がわかると、コンパクト星の質量に制限を与えることができる。ここでは、円軌道を仮定し、軌道傾斜角を i 、コンパクト星の質量を M_X 、伴星の質量を M_O とする(図 1)。この時、観測量のみで定義される「質量関数」 $f_O \equiv P v_O^3 / (2\pi G)$ を、 M_X 、 M_O 、 i のみを使って表し、 f_O が M_X の下限値を与えることを示せ。

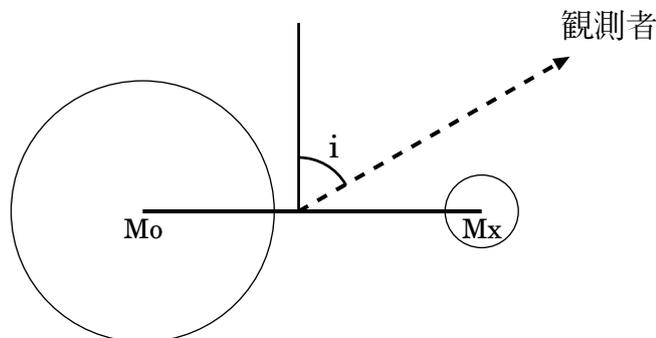


図 1 (軌道面を真横から見た図)

(次ページに続く)

(3) コンパクト星の周りの降着円盤（ここでは連星系の公転軌道面と一致しているものとする）の垂直方向に、「ジェット」と呼ばれる相対論的速度をもつガスが放出されることがある。その動きを観測することで、系の軌道傾斜角に制限が得られる。図2のように、視線方向に対して角度 i ずれた方向に、真の速度 v で移動するガスについて考えよう。

(3a) ガスの動きを天球上に投影した時の「見かけの速度」が、光速を超え得ることを示せ。

(3b) 円盤から見て双方向に完全対称にジェットが放出されると仮定する。この時、両ジェットの天球への投影速度 v_+ 、 v_- の測定値から、ジェットの真の速度 v および軌道傾斜角 i が決定できることを示せ。

軌道傾斜角 i がわかると、(2)の方法を用いてコンパクト星の質量をより強く制限することが可能となる。

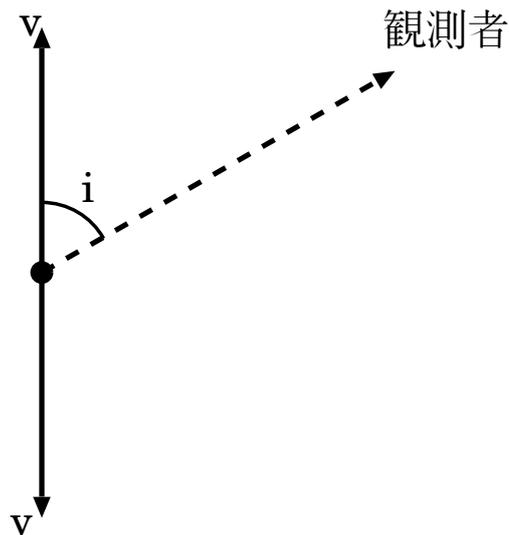


図 2