

平成 21 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に問題番号，受験番号，氏名を記入せよ。
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 7 ページまでである。

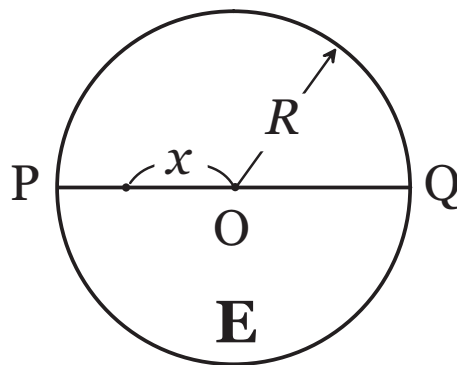
I-1 (力学) (100 点)

一様な密度で半径 R の完全な球体 E を考える。自転はしていない。その表面の一点 P からその対極点 Q (P と中心 O を結ぶ直線が、表面と交わる場所) に行く 2 つの経路を考える。表面での重力加速度を g とせよ。

経路 (i) 表面から無限小の高さで E を等速円運動で回る (大きさを持たない) 人工衛星に乗って $P \rightarrow Q$ に行く。

経路 (ii) P から O を通って、 Q に到る、無限小の半径の円柱をくりぬいて、その中を P に静止していた質点が Q まで自由落下する。

ただし、自由落下の場合や、運動している人工衛星に、乗り降りするのにかかる時間は無視できるものとする。



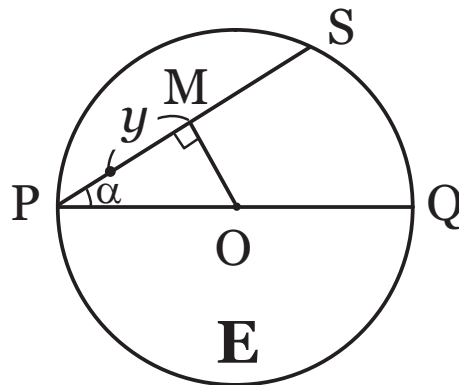
(1) P から Q まで自由落下する質点について、その運動方程式を書け。ただし、 O を原点とした位置座標を x とする。(O から P へ向かう方向を正とする。)

(2) 経路 (i), (ii) のそれぞれについて、 Q に到着するまでにかかる時間を答えよ。

次に、直線 PQ と角 α を成す直線が球体表面と交わる点を S とする。線分 PS の中点を M とする。上と同様に点 P から点 S に行く 2 つの経路を考える。

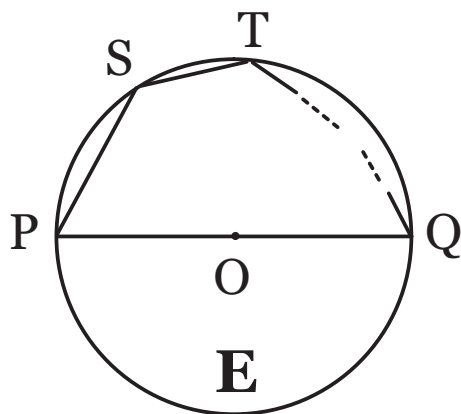
経路 (iii) 表面から無限小の高さで E を等速円運動で回る (大きさを持たない) 人工衛星に乗って $P \rightarrow S$ に行く。

経路 (iv) P から M を通って、 S に到る、無限小の半径の円柱をくりぬいて、その中を P に静止していた質点が S まで摩擦なくすべり落ちる。



(次ページに続く)

- (3) P から S まですべり落ちる質点について，その運動方程式を書け。ただし，M を原点とした位置座標を y とする。(M から P へ向かう方向を正とする。)
- (4) 経路 (iii), (iv) のそれぞれについて，S に到着するまでにかかる時間を答えよ。
- (5) 経路 (iv) の行き方を平面 SPQ 内で延長して，点 P から出発して S, T, ... と，表面上のいくつかの点を通り過して，Q に到る種々の経路を考える。さらに，移動途中での加速度の絶対値が $g/2$ を超えないという制限をつけよう。その中で，最短時間となる経路の所要時間を答えよ。



I-2 (量子力学) (100 点)

半径 a の円環の上に拘束されている電子 (質量 m) を考察しよう。

- (1) 円環上の位置を中心角 θ を使って $a\theta$ とすると, 系の定常状態を表わす Schrödinger 方程式は

$$\frac{d^2\phi(\theta)}{d\theta^2} = -\frac{E}{E_0}\phi(\theta) \quad E_0 = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \quad (\text{A})$$

となることを示せ。ここで E は定常状態のエネルギー, $\phi(\theta)$ は波動関数, $\hbar = h/(2\pi)$, h はプランク定数である。また E_0 はエネルギーの次元を持つ量であり, 系の典型的エネルギー尺度を与える。 E_0 の値を概算せよ (単位は [eV], 有効数字 1 桁)。ただし電子質量は $m \simeq 9.1 \times 10^{-31}$ [kg] $\simeq 511$ [keV/c²], 円環の半径は $a = 2.0 \times 10^{-10}$ [m] とせよ。また, 光速 $c \simeq 3.0 \times 10^8$ [m/s], 素電荷 $e \simeq 1.6 \times 10^{-19}$ [C], $\hbar \simeq 1.1 \times 10^{-34}$ [J s]。

- (2) 定常解のうちエネルギー準位が最も低い状態 (基底状態) および, 二番目に低い状態 (第一励起状態) のエネルギーを求めよ。また, これらの準位に対応する波動関数とその縮退度を確定せよ。なお, この設問においては電子スピンの自由度は考えなくて良い。
- (3) この系に次のようなデルタ関数型の相互作用が加わったとしよう。

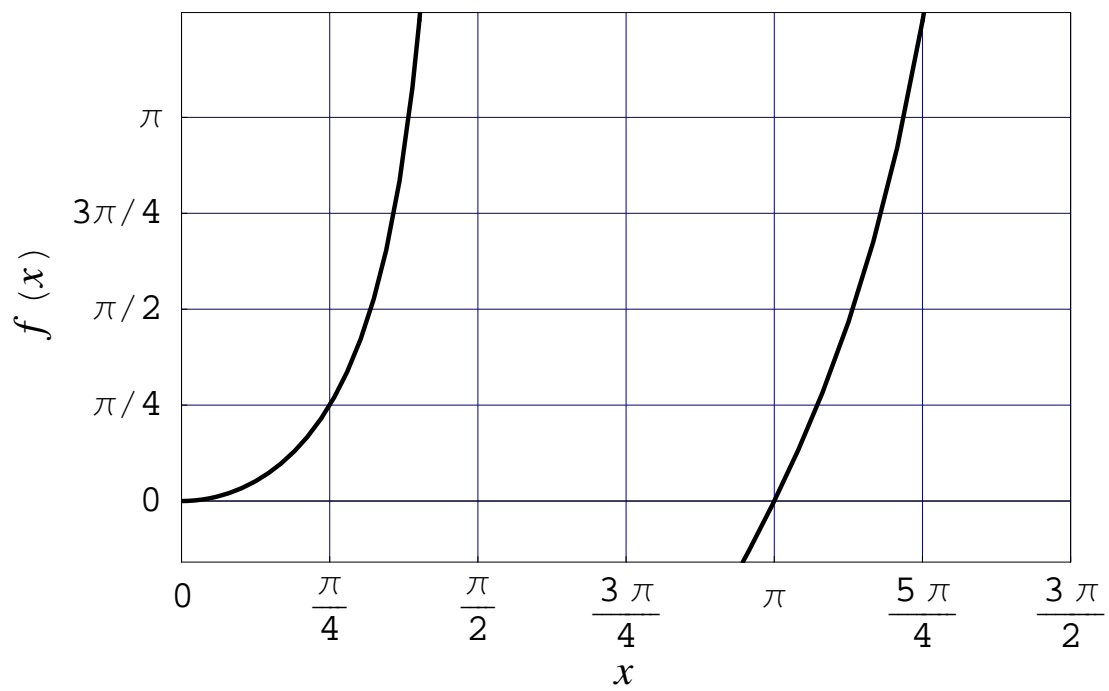
$$V(\theta) = E_0 \left\{ \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right\} \quad (\text{B})$$

このとき, 基底状態のエネルギーはどのように変化するか。また, 対応する波動関数を求めよ。必要ならば次ページのグラフを参照せよ。

- (4) この円環上に 2 つの電子が存在するとし, それらの電子の間には

$$V_{\text{spin}} = -E_0 \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{\hbar^2} \quad (\text{C})$$

と表わされる相互作用が働くとしよう。ただし, $\vec{S}_{1,2}$ は 2 つの電子のスピンの角運動量である。この系の基底状態のエネルギーを求めよ。また波動関数とその縮退度を確定せよ。ただし, スピン波動関数については, $|\uparrow\rangle_1$ (粒子 1 のスピンの量子化軸の正方向を向いている状態), $|\downarrow\rangle_2$ (粒子 2 のスピンの量子化軸の負方向を向いている状態) 等の記法を用いよ。なお, 式 (C) による第一励起状態のエネルギー変化にも注意を払うこと。また, この設問においては式 (B) で表わされる相互作用や電子間のクーロン相互作用は存在しないとせよ。



$f(x) = x \tan(x)$ のグラフ

I-3 (統計力学) (100 点)

量子状態 p における粒子数が $n_p = 0, 1$ に限られるフェルミ粒子系を考える。粒子のエネルギーを ϵ_p , 化学ポテンシャルを μ , $\beta = 1/(k_B T)$ (T は温度, k_B はボルツマン定数) として以下の問いに答えよ。

- (1) 大正準 (グランドカノニカル) 集合の分配関数

$$Z_G = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_p\}=0,1} e^{-\beta[E(\{n_p\}) - \mu N]} \quad (\text{A})$$

を求めよ。ここで, $N = \sum_p n_p$, $E(\{n_p\}) = \sum_p \epsilon_p n_p$ であり, $\sum_{\{n_p\}=0,1}$ は N を一定としたときの各 n_p に関する和である。

- (2) n_p の平均値 $\langle n_p \rangle$ と n_p^2 の平均値 $\langle n_p^2 \rangle$ は等しいことを示せ。また, n_p の揺らぎの 2 乗 $(\Delta n_p)^2 \equiv \langle n_p^2 \rangle - \langle n_p \rangle^2$ の上限値を求めよ。
- (3) 圧力を P , 体積を V , エントロピーを S , 全粒子数の平均値を $\langle N \rangle$ とすると $VdP = SdT + \langle N \rangle d\mu$ という関係式が成り立つ。これを用いて, 定温圧縮率

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{\langle N \rangle, T} \quad (\text{B})$$

は次の関係式

$$\left(\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu} \right)_{V, T} = \frac{\langle N \rangle^2}{V} \kappa_T \quad (\text{C})$$

を満たすことを示せ。以下ではこの関係式を利用する場合がある。

- (4) 式 (A) から得られる関係式

$$\langle N \rangle = k_B T \frac{\partial}{\partial \mu} \log Z_G \quad (\text{D})$$

を用いて, 全粒子数の揺らぎの 2 乗と定温圧縮率の間には

$$(\Delta N)^2 \equiv \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = k_B T \frac{\langle N \rangle^2}{V} \kappa_T \quad (\text{E})$$

という関係式があることを示せ。

(次ページに続く)

- (5) 関数 $g(\epsilon)$ が $\epsilon = \mu$ 付近で急激に変化しないとすると、フェルミ分布関数 $f(\epsilon)$ との間には $\beta\mu \gg 1$ の極限で

$$I = \int_0^\infty g(\epsilon)f(\epsilon)d\epsilon \simeq \int_0^\mu g(\epsilon)d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 g'(\mu) + \dots \quad (\text{F})$$

という関係が成り立つ。ここで g' は1階導関数である。 $G(\epsilon) = \int_0^\epsilon g(x)dx$ という関数を導入すると

$$I = - \int_0^\infty G(\epsilon)f'(\epsilon)d\epsilon \quad (\text{G})$$

となることを示すとともに、 $G(\epsilon)$ を $\epsilon = \mu$ の周りでテイラー展開することで式 (F) を導け。ただし、積分公式

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)} dx = \frac{\pi^2}{3} \quad (\text{H})$$

を用いてよい。

- (6) 単位エネルギー当たりの状態数（状態密度）を $\rho(\epsilon)$ とする。式 (F) を用いて $(\Delta N)^2$ の表式を求めよ。

平成 21 年度大学院入学試験問題 II (3 時間)

注意

- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に問題番号，受験番号，氏名を記入せよ。
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお，問題冊子および下書き用紙は回収しない。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 9 ページまでである。

II-3 (物理数学) (100 点)

常微分方程式

(1) 次の 1 階線形斉次常微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dy}{dt} + y \cos t = 0 \quad (\text{A})$$

またこれを基に，以下の初期値問題の解を求めよ。

$$\frac{dy}{dt} + y \cos t = \sin 2t, \quad y(t=0) = 0 \quad (\text{B})$$

(2) 次の 2 階線形斉次常微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \quad (\text{C})$$

また， $y(t=0) = 0$, $dy/dt|_{t=0} = 1$ の初期条件を満たす解を求めよ。

熱伝導方程式

1 次元の熱伝導方程式の初期値問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{D})$$

$$u(x, t=0) = f(x)$$

の $t > 0$ における解は，グリーン関数 G を用いて次の様に表される。

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \xi, \tau=0) f(\xi) d\xi \quad (\text{E})$$

ここで， G は次の式を満たす。

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial G}{\partial t} = -\delta(x - \xi)\delta(t - \tau) \quad (\text{F})$$

このグリーン関数 G を，以下の手順に従い，求めよ。

(3) 今，グリーン関数 G を

$$G = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(k, \omega) \exp\left[i\{k(x - \xi) - \omega(t - \tau)\}\right] dk d\omega \quad (\text{G})$$

と仮定するとき，式 (F) より $g_0(k, \omega)$ を求めよ。必要であれば，次のデルタ関数のフーリエ積分表示式を用いよ。

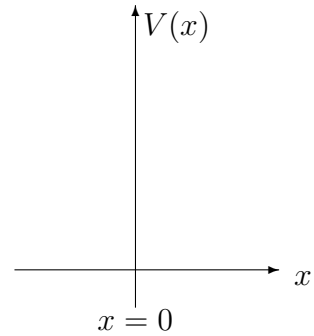
$$\delta(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i py) dp$$

(次ページに続く)

- (4) 問(3)で求めた $g_0(k, \omega)$ を式(G)に代入し, 留数の定理を用いて積分を行い, グリーン関数 G を求めよ。その際, 因果律を満たすことに留意せよ。必要であれば, 以下の積分公式を用いよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 y^2 + by) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left[\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] \quad (a > 0)$$

- (5) 問(4)で求めた G は, $t > \tau$ において式(D)の解の一つであり, 物理的には, 時刻 $t = \tau$ に場所 $x = \xi$ に置かれた点源の拡散を表す。 $V = G, \xi = 0, \tau = 0$ とするとき, $V(x)$ が様々な t に対してどのように時間発展するか。右図のように座標を設定し, 模式的に図に表せ。



II-2 (電磁気学) (100 点)

電磁波を考えると、よく使われるのが Lorenz ゲージにおける電磁場の方程式

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_e(\vec{x}, t) \quad (\text{A})$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{A}(\vec{x}, t) = -\mu_0 \vec{i}_e(\vec{x}, t) \quad (\text{B})$$

である。ここで、 ϕ 、 \vec{A} はそれぞれスカラーポテンシャル及びベクトルポテンシャル、 ρ_e と \vec{i}_e はそれぞれ電荷密度及び電流密度、また Δ は 3 次元ラプラシアンである。この式の因果律を満たす解は、任意の電荷分布に対して、遅延ポテンシャル

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho_e(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (\text{C})$$

で与えられることが知られている（ベクトルポテンシャルについても同様）。通常の静電場におけるポアソン方程式の拡張として、実際に式 (C) で与えられるポテンシャルが式 (A) を満たすことを以下の方法で証明しよう。

- (1) まず、式 (C) の積分を、 \vec{x} 周辺の微小領域 V_ϵ に対応する ϕ_ϵ と、それ以外の領域 V_{other} に対応する ϕ_{other} に分ける。すなわち、

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi_\epsilon(\vec{x}, t) + \phi_{\text{other}}(\vec{x}, t) \quad (\text{D})$$

$$\phi_\epsilon(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\epsilon} d^3x' \frac{\rho_e(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (\text{E})$$

$$\phi_{\text{other}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_{\text{other}}} d^3x' \frac{\rho_e(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (\text{F})$$

V_ϵ は微小領域なので、時間間隔 $|\vec{x} - \vec{x}'|/c$ での電荷密度 ρ_e の変化は無視できる。すなわち、式 (E) において $|\vec{x} - \vec{x}'|/c$ を無視することができる。その場合、 $\phi_\epsilon(\vec{x}, t)$ にラプラシアン Δ を施した結果の式を導け。なお、必要ならば以下の恒等式を用いてよい。

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi\delta^3(\vec{x}) = -4\pi\delta^3(-\vec{x}) \quad (\text{G})$$

ここで、 $\delta^3(\vec{x})$ は 3 次元空間でのディラックのデルタ関数である。

(次ページに続く)

- (2) 次に, V_{other} の領域を考える。同様に, ϕ_{other} にラプラシアン Δ を施す。 ϕ_{other} の被積分関数は, \vec{x}' を固定して \vec{x} の関数として見た場合, $R \equiv |\vec{x} - \vec{x}'|$ のみの関数になっていることに注目し, $\Delta\phi_{\text{other}}(\vec{x}, t)$ を R に関する微分で表せ。なお, 極座標 (R, θ, ϕ) でのラプラシアンは任意の関数 f に対し

$$\Delta f = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (Rf) + \frac{1}{R^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right] \quad (\text{H})$$

である。

- (3) 任意の関数 $F(t - R/c)$ は, 1次元波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) F(R, t) = 0 \quad (\text{I})$$

を満たす。このことと問(2)の結果から, V_ϵ 領域が無限小の極限での $\Delta\phi_{\text{other}}(\vec{x}, t)$ を, $\phi(\vec{x}, t)$ とその時間微分を用いて表せ。なお, 3次元空間積分は含まない形にすること。

- (4) 上記のことから, 遅延ポテンシャルが実際に電磁場の方程式 (A) を満たしていることを示せ。

次に, 点電荷によるポテンシャルを考えよう。点電荷の密度は, 電荷 q に対し,

$$\rho_\epsilon(\vec{x}, t) = q \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_q(t)) \quad (\text{J})$$

で与えられる。ただし, $\vec{x}_q(t)$ は点電荷の軌跡である。これを用いると, 遅延スカラーポテンシャルは

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\delta^3(\vec{x}' - \vec{x}_q(t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c))}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (\text{K})$$

となる。この積分は実行できて, その結果は Lienard-Wiechert (以下, LW) ポテンシャルと呼ばれる。以下のような数学的技巧を用いて, LW ポテンシャルを導こう。まず, 時間に関するデルタ関数を用いて, 次のように時間に関する積分を追加する。

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \int dt' \frac{\delta^3(\vec{x}' - \vec{x}_q(t'))}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(t' - t + |\vec{x} - \vec{x}'|/c) \quad (\text{L})$$

(次ページに続く)

(5) さらに以下の手順により，式 (L) を変形し，LW ポテンシャルを求めよ。

(a) 空間に関するデルタ関数積分を行う。

(b) $t'' = t' - t + R(t')/c$ と変数変換を行った上で， t'' に関するデルタ関数積分を行う。ここで， $\vec{R}(t') \equiv \vec{x} - \vec{x}_q(t')$ ， $R(t') \equiv |\vec{R}(t')|$ である。デルタ関数積分でも，通常の変数変換が使えるとしてよい。

(ヒント) $R(t')$ の t' 微分の際は，まず $R^2 = \vec{R} \cdot \vec{R}$ の微分を考えるとよい。

なお，最終的に得られる LW ポテンシャル $\phi_{\text{LW}}(\vec{x}, t)$ は，

$$t_{\text{ret}} = t - R(t_{\text{ret}})/c \quad (\text{M})$$

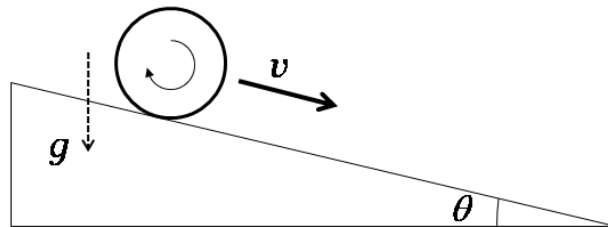
の解として定まる t_{ret} と， $\vec{R}(t_{\text{ret}})$ ，その絶対値 $R(t_{\text{ret}})$ ， $\vec{v}_q(t_{\text{ret}}) \equiv d\vec{x}_q(t_{\text{ret}})/dt$ を用いて表すこと。

(このページは白紙である)

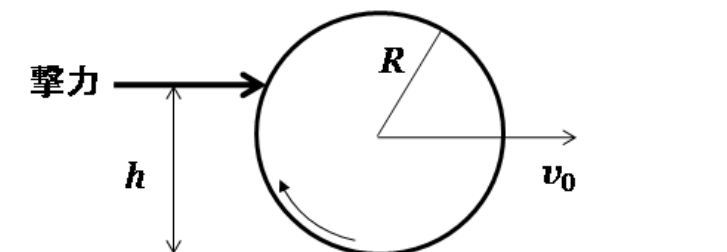
II-1 (力学) (100 点)

半径 R のサッカーボール (皮の薄い理想的な球殻) を考える。質量は M , 面密度は一様である。以下の問いに答えよ。

- (1) 中心を通る軸の周りの慣性モーメント I を求めよ。
- (2) 勾配 θ の無限に長い坂の上にこのサッカーボールを置き, 時刻 $t = 0$ で手をはなした。ボールはすべらずに重力加速度 g によって転がりはじめた。時刻 t におけるボールの並進速度 $v(t)$ を求めよ。



このボールを水平な地面に置く。地面とはある一点で接しているとする。中心を含む鉛直面内 (高さ h) で水平にボールを蹴る。このとき, かかる力は一瞬なので撃力とみなせる。蹴った直後の並進速度を v_0 とし, 転がりの摩擦はないと仮定する。また蹴ってもボールの形は変形しないとする。



- (3) このとき, 地面からどの高さで蹴れば, ボールはすべらずに地面を転がるか。その高さ h_c を求めよ。

(次ページに続く)

- (4) 問(3)で求めた高さ h_c より下を蹴った場合のボールの運動を考える。ボールを蹴った時刻を $t = 0$ とし、並進速度 $v(t)$ と回転角速度 $\omega(t)$ を求めよ。また、並進速度 $v(t)$ と中心に対する表面の速度 $R\omega(t)$ の時間変化を同一のグラフ上に図示せよ。すべり摩擦係数を μ とする。

平成 21 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題は III-1 から III-7 まで 7 問ある。この中から 3 問選択せよ。4 問以上選択した場合はすべての解答が無効になることがある。
 - (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
 - (3) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
 - (4) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお、問題冊子および下書き用紙は回収しない。
 - (4) 問題冊子は表紙を含めて 17 ページまでである。
-

III-1 量子暗号

III-2 電磁気学応用

III-3 宇宙衝撃波

III-4 黒体放射

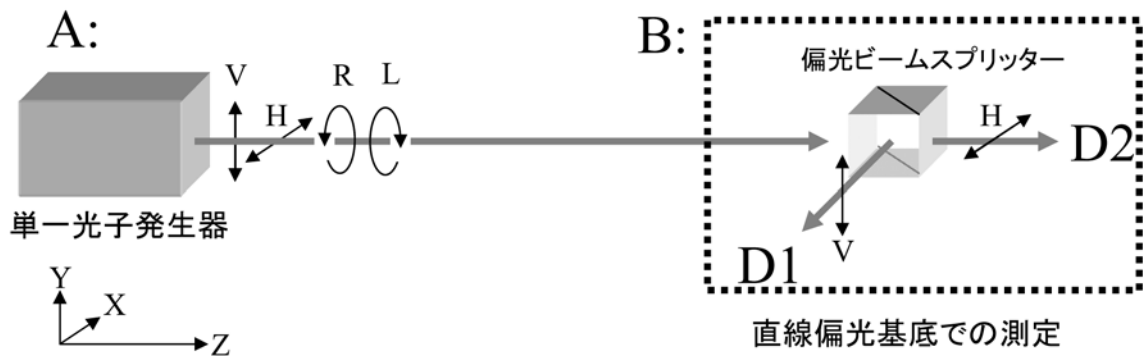
III-5 物理数学

III-6 量子力学

III-7 統計力学

III-1 (量子暗号) (100 点)

データの送信者を A , 受信者を B とする。下図のように, A から B へ特定の偏光状態の単一光子を多数回送ることにより, 両者で 0 および 1 からなるデータを共有する実験を考える。光の進行方向を Z 方向とし, X 軸方向に電場が振動している直線偏光を H , Y 軸方向に電場が振動している直線偏光を V と表記する。また, 進行方向に向かい, (X,Y) 平面で右周りに回転している円偏光を R , 左周りに回転している円偏光を L と表記する。



- (1) 光検出器の例を一つ挙げ, その原理を 50 字以内で簡潔に述べよ。
- (2) 複屈折性結晶などを利用した光学素子で, 特定の軸 (光学軸) に平行な偏光成分とそれと垂直な偏光成分との間で, 透過した光に 90 度の位相差をつけることができるものを $\lambda/4$ 板という。直線偏光 H の光から円偏光 R の光を得るには $\lambda/4$ 板をどのように設置すればよいか, 光学軸と入射する直線偏光の方向に注意して説明せよ。また, 円偏光 L の光はどのようにして得られるか説明せよ。
- (3) 上図点線部に示したように, 単一光子の直線偏光 V または H の検出は, 2 つの光検出器 $D1$ および $D2$, そして「偏光ビームスプリッター」を用いることにより可能となる。ただし, 「偏光ビームスプリッター」は, V 偏光の場合は反射し, H 偏光の場合は透過するようなビームスプリッターである。ここで, $\lambda/4$ 板を追加することで, 円偏光基底での偏光測定, すなわち円偏光 R と L の区別ができることを説明し, その配置を具体的に図示せよ。

(次ページに続く)

送信者 A は一定の時間間隔で単一光子を送る際に、直線偏光 V および H , 円偏光 R および L の4つの状態をランダムに送ることにする。受信者 B は A がどちらの基底で偏光を送信したかは知らず、検出する際には、直線偏光基底と円偏光基底の測定をランダムに行う。これを行なったところ、次のような結果になった。ただし、「直」とあるのは直線偏光基底、「円」とあるのは円偏光基底をそれぞれ表す。

A の偏光	V	R	R	H	V	L	V	R	L	V	R	V	H	L	L
B での測定基底	直	円	直	円	円	円	直	直	直	円	円	円	直	直	円
B の測定結果	V	R	V	R	無	L	V	H	無	L	R	R	H	V	L

- (4) B での測定結果において、「無」とあるのは、 $D1$, $D2$ とも光子を検出しなかった場合を表している。送信中のロスはないとするとき、検出器の量子効率を推定せよ。ただし、 $D1$ と $D2$ は同じ量子効率とする。
- (5) A と B は、選択した基底について連絡をとり合い、 A と B で基底が一致している場合のみを取り出し、0 と 1 からなるデータを作成する。上の結果に対してこのデータを作成せよ。ただし、下記表のように各偏光状態に 0 および 1 のビットを割り振り、「無」はデータとして採用しない。

偏光	V	H	R	L
ビット	0	1	0	1

問(5)の手続きで得られたデータを鍵データと呼ぼう。これをもとに暗号化および復号化を以下の手続きで行なう。鍵データを a , 送信したいデータを b としたとき、暗号化データ $c = XOR(a, b)$ は以下の表のように定義される。

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
$c = XOR(a, b)$	0	1	1	0

- (6) 今、送信したいデータを $b = [0101001]$ としたとき、暗号化したデータ c を具体的に求めよ。
- (7) データの復号は $d = XOR(c, a)$ で行なえることを示せ。

III-2 (電磁気学応用) (100 点)

物体を垂直真上に投げると元の場所に戻ってくるが、戻るまでに必要な時間は初速度に依存する。逆に、初速度の異なる物体については投げ上げるタイミングを調整すれば、全ての物体がほぼ同時に元の場所に戻るようにすることも可能である(図1参照)。容易に想像できるように、電子についても同様な現象を起こすことが出来るが、これを上手に使うとマイクロ波を増幅する装置(反射型クライストロン)を実現することが出来る。以下ではこの装置の原理を考察しよう。

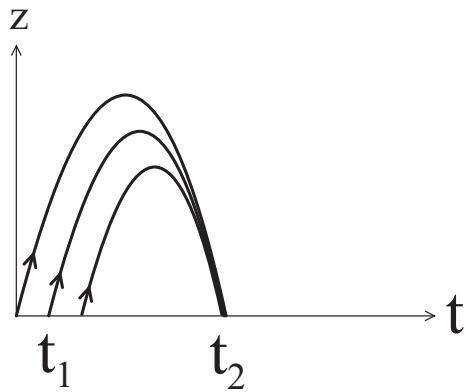


図 1: 真上に投げられた物体の軌跡:初速度の小さい物体程遅く投げ上げれば、物体は同時に元の場所に戻る。

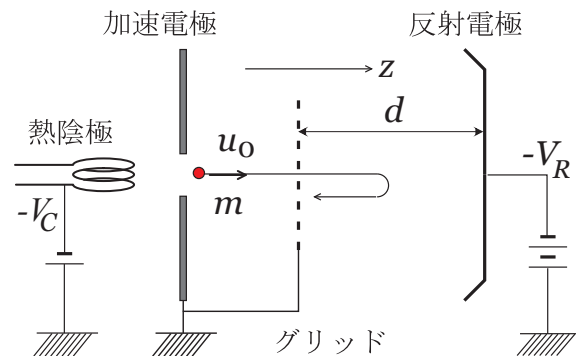


図 2: 熱電子加速用電極構造

図 2 に示されるように、熱電子を発生する熱陰極(フィラメント)、電子の初期速度を与える加速電極、電子を押し戻す反射電極、及びグリッドからなる装置を考える。加速電極には小さな穴があり、そこから電子はグリッドや反射電極の領域に進入する。またグリッドは金網状の金属から出来ているため、電子はグリッドを自由に通過する。各電極の電位については、熱陰極が $-V_C$ ($V_C > 0$)、反射電極が $-V_R$ ($V_R > V_C$)、その他は接地されているとする。各電極により作られる電場は z 方向(図 2 参照)に平行であり、かつ(電場のある領域では)一様であるとする。

- (1) 熱陰極から出た電子(初速度はゼロ)が加速電極を通過した直後の速度を u_0 とする。電子の質量を m 、電荷を $-e$ ($e > 0$) とするとき、 u_0 を m 、 e 、 V_C を用いて表せ。

(次ページに続く)

- (2) 電子はグリッドを通過した後、反射電極の作る電場により押し戻される。速度 u_0 をもってグリッドを出発し、再度グリッドに戻るまでの時間 τ を求め、 u_0, V_R, d, m, e を用いて表せ。ただし d は、グリッドと反射電極間の距離である。

反射型クライストロン装置 反射型クライストロンは、図 2 に示される電極のうち、グリッド部を円盤状金属空洞で置き換えたものである (図 3 参照)。ただし空洞の中央部は、2 枚の金網状グリッド G_0 および G_1 から成り立っている。以下ではグリッド間に時間変動する電圧が印加されている状況を考える。電子が時刻 t_0 において G_0 に到達したとき、グリッド間には、 G_0 を基準にして

$$V_g \sin(\omega t_0), \quad V_g > 0 \quad (A)$$

で表される電圧が存在しているとしよう。上式で ω は空洞の共振角周波数であるが、ここでは与えられた定数としてよい。

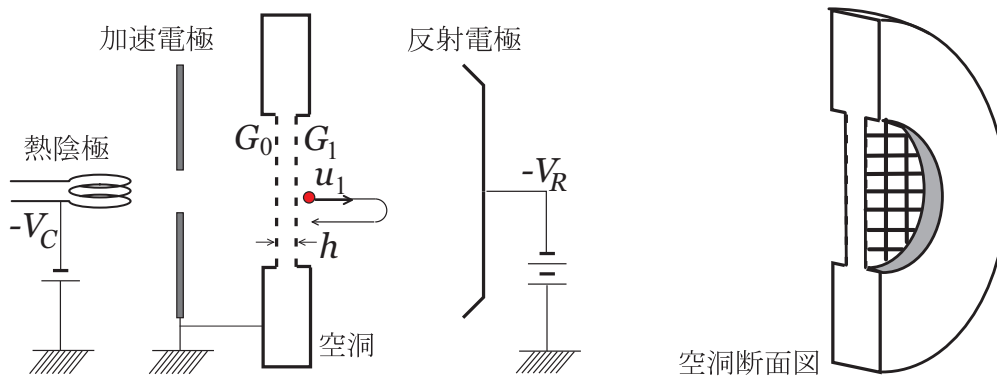


図 3: (左) 反射型クライストロン概念図, (右) 空洞部断面図

- (3) G_1 面に於ける電子速度 u_1 は、 $V_g/V_C \ll 1$ のとき

$$u_1 \simeq u_0 \left[1 + \frac{V_g}{2V_C} \sin(\omega t_0) \right] \quad (B)$$

と近似出来ることを示せ。ここで u_0 は G_0 面に於ける電子速度である。またグリッドの間隙を通過する時間は、間隙を h とすると、 h/u_0 程度であるが、この時間は $1/\omega$ に比較して非常に短いとした ($h/u_0 \ll 1/\omega$)。

- (4) 電子が G_1 を通過する時刻を t_1 、反射電極により押し戻されて再び G_1 に戻ってくる時刻を t_2 とする。 $t_2 - t_1$ を τ 、 V_g, V_C, ω, t_1 を用いて表せ。なお、問 (3) での条件 $h/u_0 \ll 1/\omega$ より、 $t_0 \simeq t_1$ と近似して良いものとせよ。

(次ページに続く)

集群 (バンチ) 条件とマイクロ波の増幅 時間間隔 $[t_1, t_1 + dt_1]$ に G_1 を出発した電子が, 再度 G_1 に戻る時間間隔を $[t_2, t_2 + dt_2]$ とする。単位時間あたりに G_1 面を出発する、および戻ってくる電子の数を, それぞれ, N_1 および N_2 と書くと電子数の保存則より

$$N_1 dt_1 = N_2 dt_2 \quad (C)$$

が成り立つ。このうち N_1 については, 熱陰極の性質より, 定数と見なせる。

- (5) N_2 を N_1, t_1, ω, τ を用いて表せ。これより, 特定のタイミング t_1 で G_1 を通過した電子は, t_2 で集群することが分かる。空洞に再突入する電子の個数を単位時間あたり最大とするには t_1 をどの様に変えれば良いか。
- (6) 次に t_2 のタイミングに注目しよう。もし電子が空洞に再突入したとき, グリッド間の電場が電子を減速させる位相であるならば, 電子の運動エネルギーは減少する。減速量が最大となる t_2 を定めよ。
- (7) 問 (5) の条件 (集群条件) と問 (6) の条件 (減速位相条件) を同時に満足するには, $\omega\tau$ はどの様な条件を満たせば良いか。
- (8) グリッド間隙に電場を作り出す源が空洞に蓄えられたマイクロ波であり, その角周波数 ω が問 (7) の条件を満たすならば, 空洞に蓄えられたマイクロ波のエネルギーは全体として増していく。この理由を簡単に説明せよ。

(このページは白紙である)

III-3 (宇宙衝撃波) (100 点)

一様な密度をもつ星間物質中において、爆発エネルギー E_0 を持つ超新星爆発が起きた後、星間物質中を衝撃波が伝播していく問題を考える。

図1のように、衝撃波面の静止系で見た時の衝撃波上流の流体速度、質量密度、圧力を v_1, ρ_1, p_1 とし、衝撃波下流の量を同様に v_2, ρ_2, p_2 とする ($v_1, v_2 > 0$)。強い衝撃波の極限では、以下の Rankine-Hugoniot の関係式が成り立つ。

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad (\text{A})$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2}{\gamma + 1} \quad (\text{B})$$

ここで、 $M_1 \equiv v_1/c_1$ は上流にとっての衝撃波速度のマッハ数であり、 $c_1 = (\gamma p_1/\rho_1)^{1/2}$ は上流での音速である。また、 γ は断熱指数（比熱比）である。

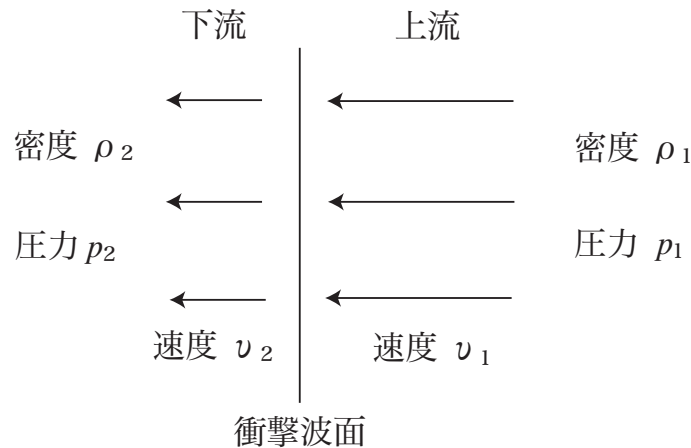


図1：衝撃波面の静止系で見た時の上流と下流の流体の物理量

簡単のため、球対称の爆発を考える。時刻 $t = 0$ で爆発が起き、衝撃波面が星間空間に広がっていく。時刻 t での衝撃波面の位置を $R(t)$ 、衝撃波の伝播速度を $V_{sh} = dR/dt$ とする。星間物質は一様な密度 ρ_0 で星間空間において完全に静止しているとする。衝撃波面内（衝撃波面の作る球面の内側の領域）に含まれる物質はもとの星間物質のみを考え、超新星自身が放出した物質の質量は無視できるものとする。衝撃波面の通過前後の物理量は上記 Rankine-Hugoniot の関係式を満たすものとする。従って、 $V_{sh} = v_1$ 、また $\rho_0 = \rho_1$ である。さらに、衝撃波面通過後の物質の空間的構造や、放射によるエネルギー損失（冷却）は考えない。すなわち、衝撃波面内に取り込まれた全ての星間物質の物理量は単一の密度、圧力、速度を持つものとする。

(次ページに続く)

- (1) ある時刻 t までに衝撃波面内に取り込まれた星間物質の総質量 $M_{\text{mat}}(t)$ を, R と ρ_0 を用いて表せ。
- (2) 衝撃波面内に取り込まれた物質は衝撃波によって加熱されている。気体の単位質量あたりの内部エネルギーは $\epsilon_U = (\gamma - 1)^{-1}p/\rho$ で与えられることを用いて, ある時刻 t での衝撃波面内の物質がもつ全内部エネルギー $U(t)$ を $\rho_0, R, p_2, \rho_2, \gamma$ で表せ。さらに, Rankine-Hugoniot の関係式を用いて p_2, ρ_2 を消去し, $U(t)$ を $\rho_0, R, V_{\text{sh}}, \gamma$ を用いて表せ。
- (3) 衝撃波面内の物質が星間空間の静止系に対して膨張する速度 V_{mat} は, V_{sh} より遅い。 v_2 は衝撃波面の静止系においての速度であることに留意して, V_{mat} を, V_{sh} と v_2 を用いて表せ。さらに, Rankine-Hugoniot の関係式を用いて v_2 を消去し, V_{mat} を V_{sh} と γ を用いて表せ。
- (4) ある時刻 t における衝撃波面内に含まれる物質の全運動エネルギー $K(t)$ を $\rho_0, R, V_{\text{sh}}, \gamma$ を用いて表し, $K(t)$ が $U(t)$ と一致することを示せ。
- (5) 冷却が無視できるという仮定により, 上記の内部エネルギーと運動エネルギーの和が保存され, それは爆発エネルギー E_0 と等しいはずである。このことから, $R(t)$ が満たす微分方程式をたて, その解を求めよ。
- (6) 爆発エネルギー $E_0 = 10^{51}$ [erg], 星間空間の水素原子数密度 $n = 1$ [cm^{-3}] としたとき, $t = 10^4$ [yr] の時の衝撃波の位置をパーセク (pc) 単位で求めよ。ファクター 2 程度の計算精度でよい。星間物質は水素だけでできていると考えてよい。また, $\gamma = 5/3$ とする。なお, 以下の数値や変換を用いてよい。
 1 [erg] = 10^{-7} [J], 陽子質量 $m_p = 1.7 \times 10^{-24}$ [g], 1 [pc] = 3.1×10^{18} [cm]。
 また, 5 乗根を求めるのに以下の表を用いてよい。

2^5	=	32
3^5	=	243
4^5	=	1024
5^5	=	3125
6^5	=	7776
7^5	=	16807
8^5	=	32768
9^5	=	59049

III-4 (黒体放射) (100 点)

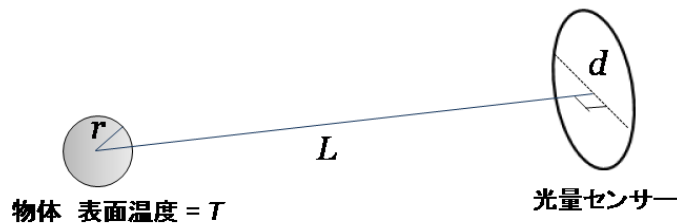
黒体放射をする温度 T の物体を考える。物体表面の単位面積から単位波長幅，単位時間，立体角 2π に，ある波長 λ において放射される光のエネルギーは

$$F_\lambda = \pi B_\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) - 1} \quad (\text{A})$$

で与えられる。ここで， $B_\lambda(T)$ はプランク関数である。また， h はプランク定数， k_B はボルツマン定数， c は光の速度である。

- (1) 物体の単位面積から放射される，単位波長幅，単位時間あたりの，ある波長 λ での光子数を P とする。 P を $B_\lambda(T)$ を使って表せ。

光量センサーと温度の測定 物体を半径 r の球とし，その中心から距離 $L(\gg r)$ のところに物体と正対する直径 $d(\ll L)$ の円形受光面をもつ光量センサーをおく。光量センサーの光検出効率（到達した光子のうち実際に検出する光子の割合）は，簡単のため，1 とする。センサーの前には中心波長 λ ，透過波長幅 $\Delta\lambda$ （ $\Delta\lambda$ 内の透過率は 100%）のフィルターが設置してある。



- (2) センサーが Δt 秒間に検出する光子数 N を， $B_\lambda(T)$ を使って表せ。但し $\Delta\lambda \ll \lambda$ であり，フィルター内において $B_\lambda(T)$ と光子エネルギーは，常に中心波長 λ での値で近似的に表すことができると仮定してよい。

(次ページに続く)

- (3) 物体までの距離または物体の半径が未知の場合，単一波長で測定した光の強度からは，直接物体の温度を求めることができない。しかし，2つの波長 λ_1 ， λ_2 で強度を測ると，その強度比から物体の温度を求めることができる。以下では，プランク関数が，ウィーンの様式

$$B_\lambda(T) \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) \quad (\text{B})$$

で近似できる波長帯で測定を行なう場合を考える。問(2)の結果を使い，物体の温度 T を，波長 λ_1, λ_2 と，それぞれの波長で検出した光子数 N_1, N_2 を用いて表せ。なお，フィルターの透過波長幅 $\Delta\lambda$ ，および測定を行なう時間 Δt は，2つの波長帯でそれぞれ等しい ($\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_2, \Delta t_1 = \Delta t_2$) とする。

- (4) 問(3)の方法で求めた温度の決定精度(統計誤差) $\delta T/T$ は，波長 λ_1, λ_2 で検出した光子数 N_1, N_2 により表すことができる。ただし，光量センサーで検出した光子数 N の統計誤差は， $\delta N/N \sim 1/\sqrt{N}$ で与えられるとせよ。また，ある物理量 F が測定値 x と y の関数であり， x と y の統計誤差 δx と δy が無相関である場合， F の統計誤差は

$$(\delta F)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y\right)^2$$

で与えられる。 $\delta T/T$ を， $\lambda_1, \lambda_2, N_1, N_2$ を用いて表せ。

恒星温度の観測 地球から十分遠方に存在する恒星の温度を，問(3)の方法により求める観測について考える。必要に応じて次の指数・対数表を使ってよい。

$\exp(x)$	1.1	1.2	1.5	2	5	10	20	50	100	200	x
x	0.095	0.18	0.41	0.69	1.6	2.3	3.0	3.9	4.6	5.3	$\ln(x)$

- (5) 恒星の温度が $T = 6000[\text{K}]$ であるとする。この温度においてプランク関数が，式(B)のウィーンの様式を用いて2%以下の誤差で近似できるための波長 λ に対する条件を，有効数字1桁で求めよ。 $h = 6.6 \times 10^{-34} [\text{J s}]$ ， $k_B = 1.4 \times 10^{-23} [\text{J/K}]$ ， $c = 3.0 \times 10^8 [\text{m/s}]$ を用いてよい。
- (6) ある恒星の温度を，2つの波長 $\lambda_1 = 550[\text{nm}]$ ， $\lambda_2 = 460[\text{nm}]$ で観測して求めたい。恒星の温度が $T = 6000[\text{K}]$ のとき， $\delta T = 10[\text{K}]$ の決定精度で温度を求めるためには，波長 λ_1 でどの程度の光子数を観測する必要があるか，有効数字1桁で概算せよ。ここで，それぞれの波長で検出する光子数の比は， $N_1/N_2 = 1.1$ としてよい。また簡単のため，検出器のノイズは無視し，さらに，恒星からの放射は，観測波長においてウィーンの様式で近似される黒体放射であると仮定してよい。

III-5 (物理数学) (100 点)

フーリエ変換 実軸上で定義された、なめらかな(つまり無限回まで微分可能で)、2乗可積分な複素数値関数の全体を \mathcal{V} とする。すなわち

$$\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}, \quad f(x) \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{A})$$

である。 \mathcal{V} 上の線形変換(線形演算子)として、フーリエ変換 \mathcal{F} , $\mathcal{V} \ni f \rightarrow \mathcal{F}f \in \mathcal{V}$ を次のように定義する。

$$(\mathcal{F}f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx, \quad y \in \mathbb{R} \quad (\text{B})$$

解答に当たっては、積分同士および微分と積分の順序変換可能性やデルタ関数の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} dx = 2\pi\delta(p) \quad (\text{C})$$

およびガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} \quad (\text{D})$$

は既知としてよい。

- (1) 線形変換としてのフーリエ変換を2回続けて行う演算 \mathcal{F}^2 を考えよう。任意の $f \in \mathcal{V}$ について

$$(\mathcal{F}^2 f)(z) = f(-z), \quad z \in \mathbb{R} \quad (\text{E})$$

を示せ。

- (2) 線形変換としてのフーリエ変換を4回続けて行う演算 \mathcal{F}^4 が恒等変換 I になっていること

$$\mathcal{F}^4 = I \Leftrightarrow (\mathcal{F}^4 f)(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{F})$$

を示せ。

- (3) 線形変換としてのフーリエ変換 \mathcal{F} のスペクトル、つまり可能な固有値の全体を答えよ。多重度については、触れないでよい。

- (4) ガウス関数 $g(x) = e^{-x^2/2}$ がフーリエ変換の固有値1の固有関数であること

$$\mathcal{F}g = g \quad \text{つまり} \quad (\mathcal{F}g)(x) = g(x) \quad (\text{G})$$

を示せ。

(次ページに続く)

- (5) 1次元の調和振動子の量子力学のハミルトニアン \mathcal{H} ($m = \hbar = \omega = 1$ となる単位系を採用)

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 \quad (\text{H})$$

も、 \mathcal{V} 上の線形変換 (線形演算子) であるとしよう。 \mathcal{F} と \mathcal{H} がその共通の定義域の上で、線形変換 (線形演算子) として可換であること

$$\mathcal{F}\mathcal{H} = \mathcal{H}\mathcal{F} \quad (\text{I})$$

を示せ。

- (6) \mathcal{V} 上の線形変換 (線形演算子) として、フーリエ変換 \mathcal{F} のすべての固有値とそれに属する固有関数を求めよ。ここで、エルミートの多項式 $H_n(x)$ の母関数

$$G(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \quad (\text{J})$$

と、それから得られる関係式

$$G\left(x, \frac{t}{2}\right) = e^{tx - \frac{t^2}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{2^n n!} \quad (\text{K})$$

および、関数 $e^{-x^2/2}H_n(x)$ が問 (5) の 1次元の調和振動子のハミルトニアン \mathcal{H} の固有関数であることは既知としてよい。

III-6 (量子力学) (100 点)

質量 m , 電荷 $-e$ の電子と , 質量 m , 電荷 $+e$ の正孔 (ホール) が 1 次元空間内で相互作用しながら運動している。電子と正孔の位置座標をそれぞれ x_1, x_2 とするとき , それらの間には距離 $|x_1 - x_2|$ に依存したポテンシャル $V(x_1 - x_2)$ が働いている。 $\hbar = h/(2\pi)$ (h はプランク定数) として以下の問いに答えよ。ただし , 電子と正孔のスピン自由度は考えなくてよい。

(1) 電子と正孔の重心座標を R , 相対座標を x とすると , ハミルトニアンは ,

$$H_T = H_R + H_x, \quad H_R = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial R^2}, \quad H_x = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \quad (\text{A})$$

で与えられることを示せ。ここで , $M = 2m, \mu = m/2$ である。

以下では , 相対運動に関するハミルトニアン H_x を考えよう。電子と正孔は相対運動による束縛状態を , ポテンシャル

$$V(x) = -\frac{e^2}{|x|} \left(1 - \frac{b}{|x|}\right) \quad (\text{B})$$

のもとで形成しているとする。ここで , $b > 0$ とする。無次元化された座標変数 $z = x/a_0$ を導入すると , H_x は

$$H_0 = -\frac{d^2}{dz^2} - \frac{2}{|z|} \left(1 - \frac{b_0}{|z|}\right) \quad (\text{C})$$

の定数倍となる。ここで , $a_0 = \hbar^2/(\mu e^2), b_0 = b/a_0$ である。

(2) まずは $z > 0$ の領域に限定して議論を進める。実パラメータ c ($c > 1$) を用いて , 次の互いにエルミート共役な演算子の対を定義する。

$$A^\dagger(c) = -\frac{d}{dz} - \frac{c}{z} + \frac{1}{c}, \quad A(c) = \frac{d}{dz} - \frac{c}{z} + \frac{1}{c} \quad (\text{D})$$

このとき , $A^\dagger(c)A(c)$ と $A(c-1)A^\dagger(c-1)$ の関係を示せ。

(3) 演算子 $H(c) = A^\dagger(c)A(c) - 1/c^2$ を導入する。 c を調整することにより $H(c)$ を H_0 と一致させることができる。このときの c を b_0 を用いて表せ。

(4) n を 0 以上の整数とする。ある関数 $\phi_{c+n}(z)$ を $A(c+n)\phi_{c+n}(z) = 0$ の解として定義する。この $\phi_{c+n}(z)$ は演算子 $H(c+n)$ の最低エネルギー固有値に属する固有状態であることを示せ。

(5) $n \geq 1$ のとき

$$A^\dagger(c)A^\dagger(c+1)\dots A^\dagger(c+n-1)\phi_{c+n}(z) \quad (\text{E})$$

が $H(c)$ の固有関数となることを示すとともに , そのときの固有エネルギーを求めよ。

(次ページに続く)

- (6) 上記の結果を用いて $z > 0$ の領域に限定したときの H_x の基底状態および第一励起状態のエネルギー準位と波動関数を求めよ。ただし、波動関数の規格化因子は考慮しなくてよい。
- (7) 次に、 $z < 0$ の領域を含む z の全領域を考える。 $b \ll a_0$ のときのポテンシャルの概形を図示せよ。また、 $z = 0$ に関して対称なポテンシャルによる束縛状態の固有関数は偶関数または奇関数であることに注意して、最低エネルギー状態の特徴を述べるとともに、その状態の波動関数の概形を図示せよ。

III-7 (統計力学) (100 点)

N 個の格子点上に x, y, z 方向の成分を持つ大きさ S のスピン $\mathbf{s}_i = (s_i^x, s_i^y, s_i^z)$ を考え ($i = 1, 2, \dots, N$) , 系のハミルトニアンは式 (A) で与えられるとする。

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i, j \rangle} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j - \mathbf{h} \cdot \sum_i \mathbf{s}_i \quad (\text{A})$$

ここで, J は相互作用の強さ, \mathbf{h} は外部磁場である。また, $\sum_{\langle i, j \rangle}$ は最近接するスピン対の和を表す。

このハミルトニアンは, 強さ h で z 方向を向いた外部磁場 \mathbf{h} を与えた場合, \mathbf{s}_i の z 成分の期待値 $m = \langle s_i^z \rangle$ を用いて実効的に

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = NJqm^2/2 - (Jqm + h) \sum_i s_i^z \quad (\text{B})$$

と近似することができる。これを平均場近似という。ここで, q は最近接格子数である。対称性から $m = \langle s_i \rangle$ は z 方向のみを持ち, m は単位格子あたりの磁化を与える。

- (1) s_i^z は, $s_i^z = -S, -S + 1, \dots, S - 1, S$ の $(2S + 1)$ 個の値をとる。式 (B) で与えられる実効的ハミルトニアンを用いると, 系のヘルムホルツ自由エネルギーが次のように表せることを示せ。

$$F(h) = N \left[Jqm^2/2 - \beta^{-1} \ln \frac{\sinh\{\beta(Jqm + h)(S + 1/2)\}}{\sinh\{\beta(Jqm + h)/2\}} \right] \quad (\text{C})$$

ここで, $\beta = 1/(k_B T)$, k_B はボルツマン定数, T は温度である。

- (2) 式 (B) の実効的ハミルトニアンのもとで, 単位格子あたりの磁化 m の満たすべき式を書き下せ。
- (3) 問 (2) の結果を用いて, $h = 0$ で, 系を高温から冷やしていくとき, 自発磁化 $m \neq 0$ が生じ始める温度 (臨界温度 T_c) を求めよ。ただし, 必要ならば次の展開式を用いてよい。

$$\begin{aligned} \tanh(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7) \\ \sinh(x) &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7) \\ \cosh(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6) \\ \coth(x) &= \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \mathcal{O}(x^5) \end{aligned}$$

(次ページに続く)

- (4) 問(3)で求めた T_c 近傍での $m(T)$ の温度依存性を求め、その振る舞いを (T, m) 平面上に図示せよ。
- (5) 式(B)の近似のもとで、スピン s_i が大きさ $S = 1$ の古典スピン (様々な方向をとることができる) の場合の分配関数とヘルムホルツ自由エネルギーを求めよ。

平成 21 年度大学院入学試験問題 IV (1 時間 30 分)

英語 (100 点)

注意

- (1) 問題 IV-1, IV-2 の解答は, それぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して, 左半分の最上部に問題番号, 受験番号, 氏名を記入せよ。
- (4) 問題冊子は表紙を含めて 5 ページまでである。

(このページは白紙である)