

平成20年度大学院入学試験問題 I (3時間)

注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙 1 枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
- (3) 解答用紙は 3 問すべて提出すること。なお、下書きは回収しない。

I-1 (力学) (100 点)

3次元空間内を運動する一つの質点の系を考える。質点の時刻 t における位置ベクトルを $\mathbf{r}(t)$ 、速度ベクトルを $\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ として、この系のラグランジアンが $L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$ で与えられるとする。

- (1) 質点の運動は「最小作用の原理」から決定される。「最小作用の原理」を簡潔に説明し、この原理から オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \quad (\text{A})$$

を導け。なお、デカルト座標系における $\mathbf{r}(t)$ の成分表示 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ を用いると、

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right)$$

である。

- (2) 質点 (質量 m) の慣性系におけるラグランジアンは、

$$L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}(t)^2 - U(\mathbf{r}(t)) \quad (\text{B})$$

で与えられる。ここに、 $U(\mathbf{r}(t))$ は質点に働く力のポテンシャルエネルギーである。特に $U(\mathbf{r}(t))$ がデカルト座標系での成分表示 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ を用いて

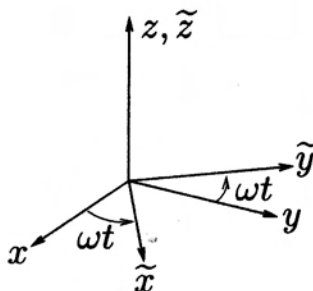
$$U(\mathbf{r}(t)) = \frac{1}{2}m\Omega^2 (x(t)^2 + y(t)^2) + mgz(t) \quad (\text{C})$$

で与えられる場合に、オイラー・ラグランジュ方程式 (A) を解いて $x(t)$, $y(t)$ および $z(t)$ を求めよ。ただし、 Ω と g は定数であり、時刻 $t=0$ における初期条件を

$$\mathbf{r}(0) = (a, 0, b), \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = (0, v, w)$$

とする。

- (3) 以上で考えた慣性系に対して、座標の原点を共有し、時間に依らない一定の角速度 ω で z 軸まわりに回転する座標系 (非慣性系) での質点の運動を考えよう。



(次ページに続く)

慣性系の座標 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ と回転系の座標 $\tilde{\mathbf{r}}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))$ は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{D})$$

の関係がある。

回転座標系における質点の運動を定めるラグランジアン $L_R(\tilde{\mathbf{r}}(t), \dot{\tilde{\mathbf{r}}}(t))$ は、慣性系のラグランジアン (B) に (D) の関係を代入することにより得られる。この回転系のラグランジアン L_R を $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}, \dot{\tilde{z}}$ を用いて与えよ。ただし、ポテンシャルエネルギー $U(\mathbf{r}(t))$ は (C) のものとする。さらに、得られた L_R から $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)$ の運動方程式を求めよ。

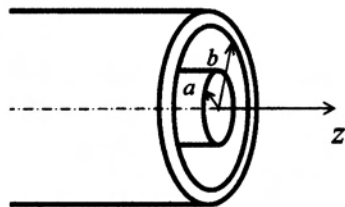
- (4) 今、回転系が慣性系に対して非常にゆっくりと回転しており、角速度 ω が微小である場合を考える。前問 (3) で求めた回転系での運動方程式の解 $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)$ を

$$\tilde{\mathbf{r}}(0) = (a, 0, 0), \quad \dot{\tilde{\mathbf{r}}}(0) = (0, 0, 0)$$

の初期条件で ω の 1 次まで求めよ。(なお、 t は有限とする。)

I-2 (電磁気学) (100 点)

信号測定などに頻繁に用いられる同軸ケーブルのモデルを考える。図のように、半径 a の導体円柱を、同軸で内径 b の導体円筒で囲んだ。導体の電気抵抗は十分に小さく、円柱と円筒は z 方向に十分に長い。 z 軸からの距離を ρ とする。円柱と円筒の間の空間 ($a < \rho < b$) と円筒の外の空間は真空中で、誘電率が ϵ_0 、透磁率が μ_0 である。



(SI 単位系での μ_0 の値は、電流の強さアンペアの定義から決まっている。すなわち、距離 1m をへだてて置かれた 2 本の平行な 1A の定常電流間に作用する力を、1m あたり $2 \times 10^{-7} \text{N}$ としている。)

以下では、円筒座標 (ρ, φ, z) でのラプラシアン、発散、回転について次の公式を使って良い。

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{rot} \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z$$

ここで、 $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$ はそれぞれの方向の単位ベクトル。

- (1) まず、内側の円柱に、 z 方向の単位長さあたり電荷 λ を与え、外側の円筒を接地した。静電ポテンシャル $\phi(\rho)$ を、ポアソン方程式を用いて求めよ。
- (2) この系の、単位長さあたりの電気容量 C を求めよ。また、電場 $\vec{E}(\rho)$ を求めよ。円筒座標成分で表して良い。
- (3) 次に、内側の円柱に、 z 方向の正の向きに定常電流 I を流し、外側の円筒には定常電流 $-I$ を流した。 $a < \rho < b$ の空間と円筒の外の空間において、磁束密度 $\vec{B}(\rho)$ を求めよ。円筒座標成分で表して良い。

(次ページに続く)

今度は、円柱に生じる電荷も流れる電流も、 z と時刻 t に依存して $\lambda(z, t), I(z, t)$ となっている場合を考える。

- (4) $a < \rho < b$ の空間での電場 $\vec{E}$ と磁束密度 $\vec{B}$ が、前問までの静電磁場の λ と I を $\lambda(z, t)$ と $I(z, t)$ に置き換えることで求められるものとする。それらにファラデーの電磁誘導の法則を適用することで、 $\lambda(z, t)$ と $I(z, t)$ の間に成り立つ偏微分方程式を導け。
- (5) 同様に、 $a < \rho < b$ の空間にアンペール・マクスウェルの法則を適用することで、 $\lambda(z, t)$ と $I(z, t)$ の間に成り立つ偏微分方程式を導け。また、この偏微分方程式の物理的意味を述べよ。
- (6) 上記2つの偏微分方程式から、 $\lambda(z, t)$ と $I(z, t)$ は波として伝わることを示せ。
- (7) 単位時間あたり $a < \rho < b$ の空間を流れるエネルギーを、電流 $I(z, t)$ と、円柱と円筒の電位差 $\phi_a(z, t)$ とを使って表せ。
- (8) $\lambda(z, t)$ と $I(z, t)$ が z 軸の正の向きに伝播していく場合を考え、電位差と電流の比 ϕ_a/I を特性インピーダンスと定義しよう。円筒と円柱の半径の比 b/a が 2.7 のとき、この系の特性インピーダンスは何オームか、有効数字 1 桁で答えよ。

I-3 (物理数学) (100 点)

- (1) 次の式が成り立つことを示せ。ただし、 a は実定数とする。

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2} dx = \frac{\pi|a|}{2} \quad (\text{A})$$

(ヒント 例えば、主値積分 $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ R \rightarrow +\infty}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \right) \frac{1 - e^{2iax}}{x^2} dx$ の計算に留数積分の方法を適用してみよ。)

- (2) 3次元空間 $\mathbb{R}^3$ の原点にあった粒子が、順に $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ の変位を行った後の位置を

$$\mathbf{R}_N = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_N$$

と表す。ただし、各変位 $\mathbf{r}_i$ は確率的に値をとるものとし、その値はそれぞれ独立に、同じ確率密度関数 $p(\mathbf{r})$ で与えられる分布に従うとする。すなわち、変位 $\mathbf{r}_i$ がある領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 内の値をとる確率は、積分

$$\int_{\Omega} p(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \iiint_{\Omega} p(x, y, z) dx dy dz$$

で与えられ ((x, y, z) は変位 $\mathbf{r}$ に対するデカルト座標を表す。)、特に $\Omega = \mathbb{R}^3$ であればこの値は1になる。つまり、

$$\int_{\mathbb{R}^3} p(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y, z) dx dy dz = 1$$

である。 $\mathbf{R}_N$ に対する確率密度関数を $P_N(\mathbf{R})$ とする。

- (a) $p(\mathbf{r})$, $P_N(\mathbf{R})$ のフーリエ変換をそれぞれ

$$\hat{p}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} p(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r}, \quad \hat{P}_N(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} P_N(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} d^3\mathbf{R}$$

とするとき、 $\hat{p}(\mathbf{k})$ と $\hat{P}_N(\mathbf{k})$ の間の関係を求めよ。

(ヒント 例えば、 $N = 2$ のとき $P_2(\mathbf{R}) = \int_{\mathbb{R}^3} p(\mathbf{R} - \mathbf{r}) p(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$ である。)

- (b) 各変位の大きさは一定値 ℓ で、等方的な確率で向きを選ぶ場合、確率密度関数は

$$p(\mathbf{r}) = C \delta(|\mathbf{r}| - \ell)$$

と表される。定数 C を求めよ。

以下、(b) の場合について考える。

- (c) $\hat{p}(\mathbf{k})$ を求めよ。

(次ページに続く)

- (d) $P_3(\mathbf{R})$ を求めよ。結果は $|\mathbf{R}|$ のみの関数になる。このグラフを描け。
(ヒント 必要ならば、次の式が成り立つことを用いよ。)

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin^3 \beta \\ = \frac{1}{8} [\cos(\alpha + 3\beta) - 3 \cos(\alpha + \beta) + 3 \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha - 3\beta)] \end{aligned}$$

また、公式 (A) を用いることを考えよ。)

- (e) $\xi_N = \frac{\mathbf{R}_N}{\sqrt{N}}$ の確率密度関数は $N \rightarrow \infty$ で収束する。この収束先の関数を求めよ。

(ヒント c を正の定数とすると

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$$

が成り立つ。)

平成20年度大学院入学試験問題 II (3時間30分)

注意

- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
- (2) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
- (3) 解答用紙は3問すべて提出すること。なお、下書きは回収しない。

II-1 (力学) (100 点)

一様な重力を受ける質点の、滑らかな曲線に沿った運動を考える。図1のように鉛直下方に x 軸、水平方向に y 軸をとる。原点 O から質点を初速度ゼロで放つと、 xy 面内の曲線にそって運動をはじめ、点 $P(x_1, y_1)$ に達する。曲線との摩擦、空気抵抗は働かないとする。ここで O 、 P 間の所要時間 T_1 を最小にする曲線の形を決定する問題を考えてみよう。

必要であれば、 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$, $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$ を用いよ。

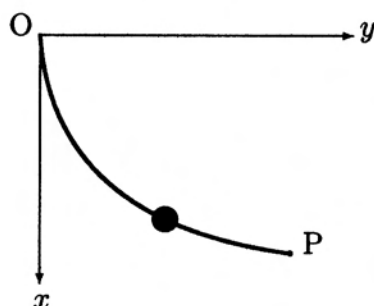


図 1:

- (1) 時刻 t における位置 (x, y) での質点の速さはエネルギー保存則より $\sqrt{2gx}$ である。ただし g は重力加速度である。曲線に沿って原点から測った質点までの距離を s とする。 $ds = \sqrt{2gx}dt$ であることを考慮して、所要時間 T_1 を、 $x, dy/dx$ を含む関数の x に関する積分の形に表せ。

一般に、定まった二点間での関数 L の積分

$$\int L(x, y, dy/dx) dx$$

が停留値（極値）をとるように関数 $y(x)$ を決定するには、変分原理にしたがってオイラー・ラグランジュの方程式

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial (dy/dx)} = 0$$

を解けばよい。

- (2) オイラー・ラグランジュの方程式を用いて、

$$\left(\frac{dx}{dy} \right)^2 = \frac{2a}{x} - 1 \tag{A}$$

が成り立つことを示せ。 a は正定数である。

(次ページに続く)

(3) 次式

$$y = a(\phi - \sin \phi), \quad (B)$$

$$x = a(1 - \cos \phi) \quad (C)$$

が微分方程式 (A) の解であることを示せ。ただし ϕ は助変数である。これは半径 a の円が直線上を転がる場合に、その円周の 1 点が描くサイクロイドと呼ばれる曲線である。したがってサイクロイドが最速降下曲線であることが判った。

つぎに式 (B) と (C) で表されるサイクロイドが持つ、もうひとつの性質について調べてみよう。この曲線に沿って図 2 のように $\phi = \pi$ を中心とし往復運動する質量 m の質点を考える。この場合も、重力は一様で x 軸方向を向き、摩擦、空気抵抗は働かないものとする。

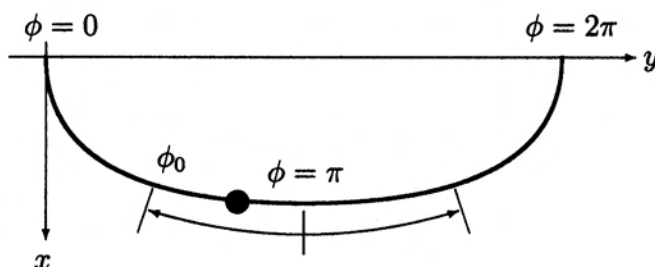


図 2:

- (4) エネルギー保存則より $(d\phi/dt)^2$ を ϕ を用いて表す式を導け。ただし、質点が左側に最大に振れる位置を $\phi = \phi_0$ とする。
- (5) 往復運動の周期 T は ϕ を用いて $T = 4 \int_{\phi_0}^{\pi} d\phi (d\phi/dt)^{-1}$ と表される。周期 T を求め、サイクロイドに沿った往復運動が等時性（周期が振幅によらないこと）を持つことを示せ。
- (6) 京都と東京の間にサイクロイドの形をしたトンネルを考える。その際図 2 の両端が京都 ($\phi = 0$) と東京 ($\phi = 2\pi$) である。このトンネルへ京都側から初速 0 で落とした物体が、東京へ達するまでの時間を求めよ。京都ー東京間の直線距離は 310km とし、重力は一様で x 軸方向を向き、重力加速度は $g = 9.8\text{m/s}^2$ とする。ただし地球の回転運動、空気抵抗、トンネル壁との摩擦は無視する。答えは有効数字 1 桁の分単位で求めよ。

II-2 (量子力学) (100 点)

一次元空間上の点粒子（位置座標 x , 質量 m ）の量子力学を考える。ポテンシャル $V(x)$ の下でエネルギー固有値 E をもつ定常状態の波動関数 $\psi(x)$ は、シュレディンガー方程式

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi$$

を満たす。以下で、 ω は正の定数とする。

- (1) まず、ポテンシャルが

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

の場合を考える。

- (a) 演算子

$$\hat{A} = -i\hbar \frac{d}{dx} - im\omega x$$

と、そのエルミート共役

$$\hat{A}^\dagger = -i\hbar \frac{d}{dx} + im\omega x$$

を用いて、 $\hat{H}$ を書き表せ。

- (b) エネルギー固有値を小さい順に 3 番目まで (E_0, E_1, E_2 とする) 求めよ。また、それぞれに対応する波動関数 ($\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$ とする) も求めよ。(つまり、 E_0 と $\psi_0(x)$ は、この系の基底状態のエネルギー固有値と波動関数である。) なお、波動関数は規格化しなくてよい。

- (2) さらに、問 (1) で扱ったシュレディンガー方程式の固有値 $E = E_0$ の解であって、上で求めた波動関数 $\psi_0(x)$ とは独立な（規格化できない）関数を一つ求めよ。解答は

$$F(x) = \int_0^x e^{y^2} dy$$

で定義される関数 $F(x)$ を用いて表してよい。(ヒント：求める関数を、 $\psi_0(x)$ と未知関数の積と置いて考えてみよ。)

- (3) 次に、 b を正の定数として、ポテンシャルが、 $x < 0$ と $b < x$ では $V(x) = 0$ で、 $0 \leq x \leq b$ では

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

となっている場合を考える。問 (1) で求めたエネルギー E_0 をもつ点粒子が $x < 0$ の遠方から入射するとき、その透過率を求めよ。

II-3 (量子統計力学) (100 点)

1 粒子のエネルギーが

$$\varepsilon(\vec{k}, \sigma) = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) - \sigma \alpha H$$

で与えられるスピン 1 の理想ボース気体を考える。ここで、 m は粒子の質量、 $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ は波数ベクトル、 α は磁気モーメントの次元を持つ正の定数、 H は磁場 ($H \geq 0$)、 σ は $-1, 0, 1$ の値をとるスピン変数である。つまり、第 2 項はスピン σ の粒子は $\sigma \alpha$ の磁気モーメントをもつことを表している。また、気体の体積 V は十分大きいとする。

- (1) スピン $\sigma = 0$ の粒子の 1 粒子状態密度 $D(\varepsilon)$ を求めよ。
- (2) 温度 T , 磁場 H , 化学ポテンシャル μ のときスピン σ をもつ励起状態の粒子数 $N_\sigma(T, H, \mu)$ を、次式で定義される関数 $F(x)$ を用いて表せ。ボルツマン定数は k_B とする。

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{z^{1/2}}{e^{z+x} - 1} dz \quad (\text{A})$$

また、 μ の取り得る値の範囲を求めよ。

- (3) 励起状態の粒子数 $\sum_{\sigma=0,\pm 1} N_\sigma(T, H, \mu)$ が最大になるように μ を選んだとしても、ある温度以下ではこの和が全粒子数 N に満たなくなる。このとき、残りの巨視的な数の粒子は基底状態を占めている。これをボース・アインシュタイン凝縮という。磁場 H のもとでボース・アインシュタイン凝縮が起こる温度を $T_c(H)$ と表すとき、 $T_c(0)$ を求めよ。ただし、 $F(0)$ は既知の数であるとしてよい。

- (4) 磁化 M は全粒子の磁気モーメントの和で与えられる。 $T > T_c(0)$ における磁化率 $\chi(T, \mu) = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{M(T, H, \mu)}{H}$ を求め、次式で定義される関数 $G(x)$ を用いて表せ。

$$G(x) = -\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{z^{-1/2}}{e^{z+x} - 1} dz \quad (\text{B})$$

- (5) 磁場が正のとき、 $T < T_c(H)$ で凝縮が起こる 1 粒子状態はどのような波数とスピンを持つか。また、そのときの化学ポテンシャルの値はいくらか。さらに、 $T_c(H)$ は $T_c(0)$ より大きいのか小さいか？理由をつけて答えよ。
- (6) $T < T_c(H)$ における磁化の値 $M(T, H)$ を N_σ を用いて表せ。また、自発磁化 $M_s(T) = \lim_{H \rightarrow +0} M(T, H)$ を求め、結果を $N\alpha \times \left(\frac{T}{T_c(0)} \right)$ の関数の形に表せ。

平成20年度大学院入学試験問題 III (3時間)

注意

- (1) 問題はIII-1からIII-8まで8問ある。この中から3問選択せよ。4問以上選択した場合にはすべての解答が無効になることがある。
 - (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の解答用紙1枚に記入せよ。裏面を用いてもよい。
 - (3) 各解答用紙は横長に使用して、左半分の最上部に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
 - (4) 解答用紙は3問すべて提出すること。なお、下書きは回収しない。
-

III-1 エレクトロニクス

III-2 古典統計力学

III-3 光のドップラー効果

III-4 散乱の量子力学

III-5 誤差論

III-6 重力熱力学

III-7 電磁波の散乱

III-8 X線分光

III-1 (エレクトロニクス) (100 点)

- (1) 図1に示す抵抗 R とコイル L とコンデンサー C からなる RLC 直列回路を考える。入力電圧を V_{in} 、出力電圧を V_{out} とし、 $1/(LC) > (1/4)(R/L)^2$ であるとする。

まず、 V_{in} として角周波数 ω と振幅 V_0 を持つ正弦波信号を入力し、 V_0 は一定のまま、 ω を変化させてみる。

- (a) 角周波数が ω の時の RLC 直列回路全体の複素インピーダンスを求めよ。
- (b) 出力電圧 V_{out} の振幅が最大になる角周波数を ω_0 とする。 ω_0 の値とその時の出力電圧 V_{out} の振幅を求めよ。
- (c) 角周波数が ω_0 の時、コンデンサー C とコイル L それぞれの素子の電流、電圧、位相がどうなっているかを考え、出力電圧 V_{out} の振幅のとり得る最大値がなぜ (b) で求めた値になるのか説明せよ。

次に $V_{in}(t) = V_0 H(t)$ の信号を入力する。ただし、 $H(t)$ は階段関数であり

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

と定義されている。

- (d) 出力電圧 $V_{out}(t)$ を求めよ。必要なら、後に示すラプラス変換のテーブルを用いても良い。

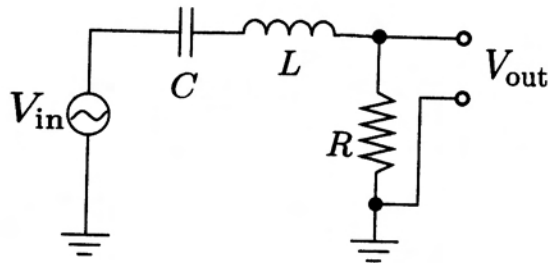


図 1:

(次ページに続く)

- (2) X線検出器とプリアンプ(前置増幅器)を図2で示す回路としてモデル化する。X線検出器はコンデンサー C_d に対応する。時刻 $t = 0$ にX線光子がこのX線検出器に入射し、図2のようにコンデンサー C_d に電荷量 $Q_1(> 0)$ が発生した。ただし、時刻 $t < 0$ では、コンデンサー C_d および C_f に蓄えられた電荷量は0であり、オペアンプは理想的な特性を持つと仮定する。

- 時刻 $t > 0$ にコンデンサー C_d に蓄えられている電荷量 $Q_d(t)$ を求めよ。
- 時刻 $t > 0$ にコンデンサー C_f に蓄えられている電荷量 $Q_f(t)$ を求めよ。
- 時刻 $t > 0$ でのオペアンプの出力電圧 $V_{out}(t)$ を求めよ。
- オペアンプの出力電圧 $V_{out}(t)$ は、漸近的に電圧 $V_1(= V_{out}(\infty))$ に近づく。 $V_{out}(t)$ が $(1 - e^{-1})V_1$ に達する時間を、1つのX線光子に対する出力信号の時定数 τ_0 と定義する。 V_1 を求め、 V_1 より Q_1 が得られることを示せ。また、 τ_0 を求めよ。

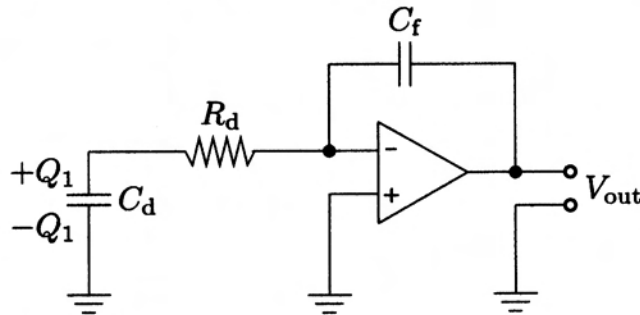


図 2:

次に、1個目のX線光子に続いて時間 τ_X 後に2個目のX線光子がX線検出器に入射し、コンデンサー C_d に電荷量 $Q_2(> 0)$ が発生する場合を考える。1個目と同様に2個目のX線光子に対しても、オペアンプの出力電圧が漸近的に近づく電圧 V_2 を測定し、 Q_2 を得たい。そのためには2個目のX線光子が入射する前に、1個目のX線光子によってコンデンサー C_f に溜められた電荷を放電する必要がある。そこで、 C_f と並列に抵抗 R_f を追加した。

- 放電の時定数を τ_f と書くと、 τ_0 、 τ_X 、 τ_f の3つがどのような関係にあれば良いか。
- 前問(e)の場合に期待されるオペアンプの出力電圧波形の概形をグラフとして書け。ただし、グラフには τ_0 、 τ_X 、 τ_f 、 V_1 、 V_2 を記入すること。
- 以上の議論をふまえ、 $C_d = 10^{-8}\text{F}$ 、 $R_d = 10\Omega$ 、 $C_f = 10^{-11}\text{F}$ 、 $\tau_X = 10^{-3}\text{sec}$ の場合に、 R_f として適切な典型値を示せ。

(次ページに続く)

ラプラス変換のテーブル

実関数 $f(t)$ に対するラプラス変換は

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

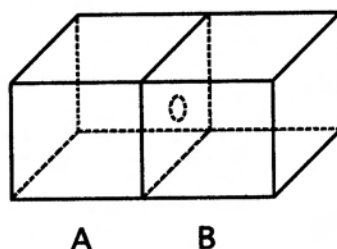
と定義される。様々な関数に対するラプラス変換は以下の通りである。

$f(t)$	$\rightarrow$	$F(s)$
$\delta(t)$		1
$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$		$1/s$
t		$\frac{1}{s^2}$
t^2		$\frac{2}{s^3}$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$		$\frac{1}{s^n}$
$\exp(-at)$		$1/(s+a)$
$\sin(at)$		$a/(s^2+a^2)$
$t \exp(-at)$		$1/(s+a)^2$
$\exp(-at) \sin(bt)$		$b/[(s+a)^2+b^2]$
$\exp(-at)f(t)$		$F(s+a)$
$f(t/a)$		$aF(as)$
$\frac{df(t)}{dt}$		$sF(s) - f(0)$
$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$		$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$\int_0^t f(t') dt'$		$F(s)/s$
$\int_0^t f(t-t')g(t') dt'$		$F(s)G(s)$

(このページは白紙である)

III-2 (古典統計力学) (100 点)

図のように、断熱壁で作られた箱 A、B に同種の理想気体が入っている。気体分子 1 個の質量は m である。箱 A の分子数密度を ρ_A 、温度を T_A 、同様に、箱 B の分子数密度を ρ_B 、温度を T_B とする。時刻 $t = 0$ に箱 A と箱 B の境界の断熱壁に分子の平均自由行程よりも充分小さな穴をあけ、そこを通過して分子は左右に出入りできるようにする。穴の面積を σ とする。それぞれの箱は充分大きく、温度と密度の変化は無視できる。ある時刻までに穴を通った分子数を ΔN 、それに伴うエネルギー変化を ΔU とする。(箱 A から箱 B への移動を正とする。)



- (1) 穴を通過して分子が行き来することによる全系のエントロピー変化 ΔS は

$$\Delta S = C_1 \Delta U + C_2 \Delta N \quad (\text{A})$$

と表現できる。係数 C_1 と C_2 を ρ_A 、 ρ_B 、 T_A 、 T_B で表せ。理想気体の化学ポテンシャル μ と密度 ρ 、温度 T の関係は $\mu = kT \log(\rho/T^{3/2})$ としてよい。 k はボルツマン定数である。

- (2) 時刻 t における箱 B の ($t = 0$ と比べた) 分子数の増分が ΔN であり、エネルギーの増分が ΔU である確率分布 $P(\Delta U, \Delta N, t)$ の時間発展は次の式に従う。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\Delta U, \Delta N, t) &= \int_0^\infty W_{A \rightarrow B}(E) P(\Delta U - E, \Delta N - 1, t) dE \\ &+ \int_0^\infty W_{B \rightarrow A}(E) P(\Delta U + E, \Delta N + 1, t) dE \\ &- P(\Delta U, \Delta N, t) \int_0^\infty [W_{A \rightarrow B}(E) + W_{B \rightarrow A}(E)] dE \end{aligned} \quad (\text{B})$$

右辺の各項の意味を簡単に述べよ。なお、 $W_{A \rightarrow B}(E)$ は、運動エネルギー E をもつ 1 個の分子が単位時間に穴を通過して箱 A から箱 B に移動する単位エネルギー間隔あたりの確率 (遷移確率) である。

(次ページに続く)

- (3) 方程式 (B) を初期条件 $P(\Delta U, \Delta N, t=0) = \delta(\Delta U)\delta_{\Delta N,0}$ のもとで解く。 $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数、 $\delta_{x,y}$ はクロネッカーデルタである。次の変換

$$g(\lambda_U, \lambda_N, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta U \sum_{\Delta N=-\infty}^{\infty} P(\Delta U, \Delta N, t) \exp[-\lambda_U \Delta U - \lambda_N \Delta N] \quad (C)$$

によって解は $g(\lambda_U, \lambda_N, t) = \exp[-t\Psi(\lambda_U, \lambda_N)]$ の形になる。 $\Psi(\lambda_U, \lambda_N)$ を求めよ。遷移確率が

$$W_{A \rightarrow B}(E) = \frac{\sigma \rho_A}{(2\pi m k T_A)^{1/2}} \frac{E}{k T_A} \exp\left[-\frac{E}{k T_A}\right]$$

であることを使ってよい。(箱 B から箱 A に移動する確率 $W_{B \rightarrow A}(E)$ は添え字 A を B におきかえればよい。)

- (4) 上の問 (3) で得られた $\Psi(\lambda_U, \lambda_N)$ は関係

$$\Psi(\lambda_U, \lambda_N) = \Psi\left(\frac{C_1}{k} - \lambda_U, \frac{C_2}{k} - \lambda_N\right) \quad (D)$$

を満たすことを示せ。 C_1 と C_2 はエントロピー変化の表式 (A) の係数である。

- (5) 分布関数 $P(\Delta U, \Delta N, t)$ とエントロピー変化 ΔS との間には興味深い関係

$$\frac{P(\Delta U, \Delta N, t)}{P(-\Delta U, -\Delta N, t)} = \exp[\Delta S/k] \quad (E)$$

が成立することが知られている。関係式 (E) から関係式 (D) を導出せよ。

- (6) 関係式 (E) は熱力学第 2 法則と矛盾しないことを示せ。

III-3 (光のドップラー効果) (100 点)

光のドップラー効果を使って、天体内のガスの運動状態を知る方法について考える。まず、光のドップラー効果による波長のずれを求めよう。慣性系 S と、 S の x 軸正方向に一定の速さ v で動く慣性系 S' を考えよう。 S と S' はある時刻でその原点が一致し、その時刻を S と S' でそれぞれ $t = 0$ 、 $t' = 0$ とする。 S' の x' 軸、 y' 軸、 z' 軸は、 $t = t' = 0$ で、 S の各軸にそれぞれ重なるようにとる。

S の座標を (ct, x, y, z) とし (c は光速)、 S' の座標を (ct', x', y', z') とすると、これらの間には、 $\beta = v/c$ として、次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- (1) S において進行している光の位相部を $\exp[i(-\omega t + k_x x + k_y y + k_z z)]$ とする。 S' におけるこの光の角周波数 ω' を求めよ。この光が x 軸方向に進行するとして、 S' で見たときの波長 λ' と S での波長 λ の関係を求めよ。

具体的な例として水素原子のガス雲を考える。温度が約 10^4 K の、光学的に薄い水素のガス雲からは、バルマー線と呼ばれる可視の輝線が放射される。このうち $H\alpha$ 線 (静止系でみた波長は 660 nm とする) に注目する。以下では、 $v/c \ll 1$ であるとして $(v/c)^2$ のオーダーを無視して考える。また、必要なら以下の諸量を用いよ。

光速 $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$

陽子の質量 $m_p = 2 \times 10^{-27} \text{ kg}$

電子の質量 $m_e = 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$

ボルツマン定数 $k = 1 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$

重力定数 $G = 7 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$

- (2) このような水素ガス雲が放つ $H\alpha$ 輝線の、熱運動による輝線幅は何 nm か。桁だけの精度でよい。
- (3) 球対称な水素ガス雲を考える。観測されるガス雲は、図1のように、真上から見ても真横から見ても円板状に見える。真横から見たときの直径上の7点 (A, B, ..., G) で $H\alpha$ 輝線スペクトルを調べると、ほとんどのスペクトルに2本の $H\alpha$ 輝線が見られた。図1からこの水素ガス雲がどのような運動をしているか答えよ。

(次ページに続く)

- (4) 図2のような、回転しているリング状の水素ガス雲を考える。回転の速さは 300 km s^{-1} とする。また、リングの半径も大きくなっているとし、その速さは 100 km s^{-1} とする。このガス雲を、リングを含む平面内で真横から見たときに、観測点 A–G の各点で、どのような $\text{H}\alpha$ 輝線のスペクトルが見られるか、その概形図を描け。リングを真横からみたときの位置を縦軸にとり、A から G までの7点での $\text{H}\alpha$ 輝線のスペクトルを図1のように並べて描け。横軸は観測波長とし、図1のように代表的な数値も記入せよ。ただし、輝線は途中で吸収されることはないとする。

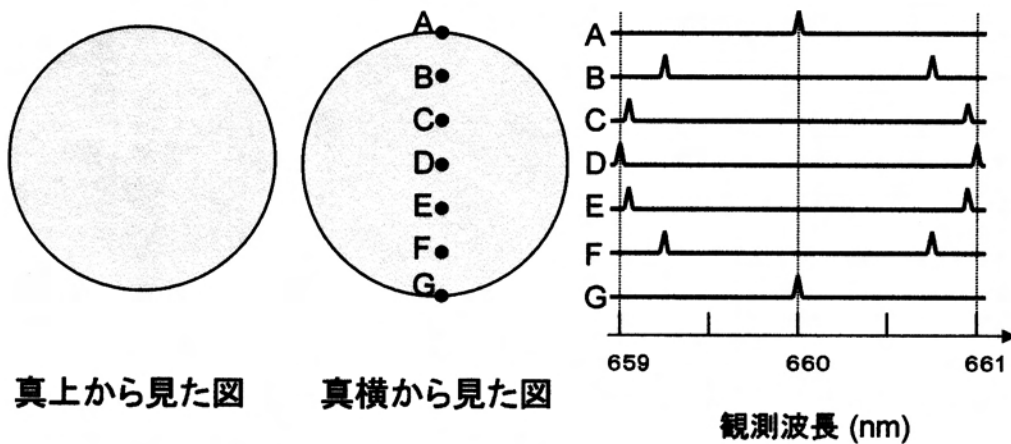


図1

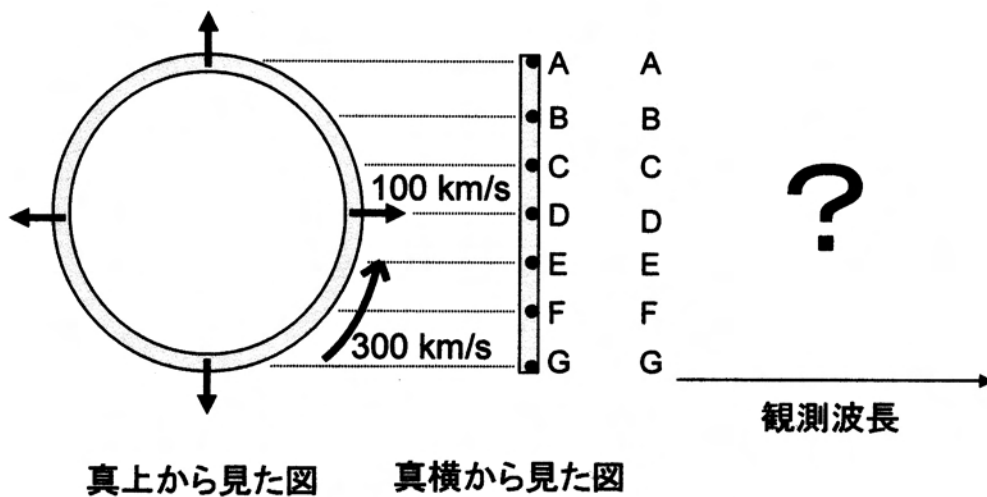


図2

III-4 (散乱の量子力学) (100 点)

球対称ポテンシャル

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & , \quad r < a \\ 0 & , \quad r \geq a \end{cases}$$

による粒子の量子論的な散乱を考える。ここで、 r は原点からの距離、 a, V_0 は正の定数である。質量 m 、エネルギー E の入射粒子は、 z 軸の正の向きに進行する平面波

$$e^{ikz}, \quad \text{ただし、} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

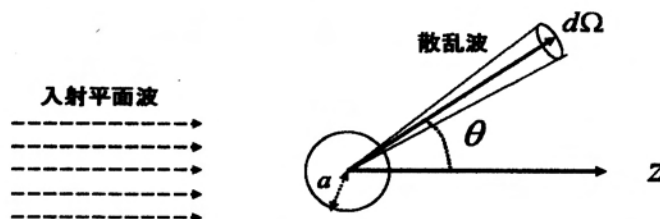
で記述することができる。この入射波はポテンシャル V によって散乱される。散乱角を θ とすると、十分遠方 $r \rightarrow \infty$ では、散乱波は

$$\frac{f(\theta)}{r} e^{ikr}$$

と表される。単位時間、単位面積当たり j_{inc} 個の粒子が入射しているとき、粒子が動径方向へ、単位時間、単位面積当たり j_r 個散乱されるとする。このとき、微分散乱断面積 $d\sigma/d\Omega$ は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{j_r r^2 d\Omega}{j_{\text{inc}}}$$

で定義される。ここで、 $d\Omega$ は粒子が検出される領域の微小立体角である。



(1) 波動関数 ψ で表される状態の確率の流れの表式

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \frac{\hbar}{2mi} \{ \psi^*(\mathbf{x}) \nabla \psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}) \nabla \psi^*(\mathbf{x}) \}$$

を使って、 j_{inc} 、 j_r を計算し、微分散乱断面積が

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

となることを示せ。

(次ページに続く)

- (2) ポテンシャルが球対称なので、波動関数を量子数 ℓ の角運動量固有状態に分解し、それぞれの波動関数を独立に扱うことができる。十分低エネルギーでは球対称な波 ($\ell = 0$ の波) の散乱だけを考えれば良いが、その理由を簡単に述べよ。

以下の問題では、低エネルギー粒子の散乱のみを考える。従って、 $\ell = 0$ の波だけを考慮してよい。この場合、 $f = f(\theta)$ は θ に依存していない。

- (3) 確率の保存から、 f は実数 δ を用いて

$$f = \frac{e^{2i\delta} - 1}{2ik} = \frac{e^{i\delta} \sin \delta}{k}$$

と表すことができることを示せ。この δ は位相のずれと呼ばれる。また、このとき、光学定理

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f$$

が成り立つことも示せ。ただし、 $\text{Im} f$ は f の虚部を表す。必要ならば、平面波の角運動量固有状態による展開公式

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \frac{\sin kr}{kr} + \sum_{\ell=1}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos \theta)$$

を使え。ここで、 j_{ℓ} と P_{ℓ} はそれぞれ球ベッセル関数とルジャンドル関数である。ただし、 $\ell = 0$ の波だけを考える場合は $\frac{\sin kr}{kr}$ だけを考慮すればよい。

- (4) 十分遠方での波動関数を位相のずれ δ を使って表せ。
 (5) $\ell = 0$ の場合、定常状態に対するシュレディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi(r)}{dr} \right) + V(r)\psi(r) = E\psi(r)$$

となる。 $r < a$ と $r > a$ のそれぞれの領域でこの方程式を解き、波動関数の接続条件より $\tan \delta$ を計算せよ。その結果を使って、球対称ポテンシャル $V(r)$ による散乱の全断面積 σ を求めよ。

III-5 (誤差論) (100 点)

円の直径を測定してその面積を求めることを考える。但し、測定には系統誤差はないものとする。

測定値は確率変数によってモデル化される。測りたいものの真の値を平均とし、測定誤差の 2 乗を分散とする確率分布をもつ確率変数の集団を考える。これを母集団という。一回の測定は、この母集団の中から一つの変数を抽出することに対応する。

独立な確率変数 X と Y を考える。その平均と分散をそれぞれ m_X, σ_X^2 と m_Y, σ_Y^2 とする。ここで、 $Z = aX + bY$ という新たな確率変数 Z を定義すると、その平均 m_Z は $m_Z = am_X + bm_Y$ であり、分散 σ_Z^2 は $\sigma_Z^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$ となる。以下では、この関係を用いてよい。

- (1) 円の直径を n 回測定したとする。 m_D を真の直径、 σ_D を一回の測定に伴う誤差とすると、 n 回の測定は、同じ平均 (m_D) と分散 (σ_D^2) をもつ確率変数から n 回の独立な抽出を行ったことに対応すると考えられる。一回毎に測定 (抽出) した直径を意味する確率変数を d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) とし、確率変数 (標本平均)

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$$

を定義しよう。この確率変数の分散を求めよ。

$\bar{d}$ の期待値 $E[\bar{d}]$ を計算すると、真の値 m_D となる。一方、確率変数 (標本分散)

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2$$

の期待値 $E[s^2]$ は σ_D^2 とはならず、 $\frac{n-1}{n}\sigma_D^2$ となる。母集団の求めたい統計量 (平均や分散等) の値と一致する期待値を持つ確率変数をその統計量のよい推定量という。(一般には不偏推定量という。) また、その実際の値をよい推定値という。すなわち、実際の測定値から得られる標本平均 $\bar{d}$ の値は母集団の平均のよい推定値である。一方、 σ_D^2 のよい推定値は、 s^2 ではなく $\frac{n}{n-1}s^2$ となる。

- (2) n 回の測定から得られる、円の直径 $\bar{d}$ につけるべき誤差はいくらか。測定値 d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を用いて表記せよ。($\bar{d}$ の記号を用いてもよい。)

(次ページに続く)

次に円の面積を考える。直接測定されたのは直径であるので、その誤差が伝播して面積の誤差となる。

- (3) 一般に、求める量 Z が二つの独立な直接測定量 X 、 Y の関数 $Z = \phi(X, Y)$ で表される場合を考えよう。 Z の分散 σ_Z^2 は、直接測定値とその真の値の差が十分小さいとすると、誤差の分布によらず、

$$\sigma_Z^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2 \bigg|_{\substack{X=m_X \\ Y=m_Y}} \sigma_X^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)^2 \bigg|_{\substack{X=m_X \\ Y=m_Y}} \sigma_Y^2$$

と近似できることを示せ。

- (4) 直径の測定精度 (誤差を真の値で割った値) は 1% であるとする。このとき、円の面積も 1% の精度で出したければ、測定を何回行えばよいか。
- (5) 円の面積の期待値 $E[\frac{\pi}{4} \bar{d}^2]$ を計算し、測定値から得られるよい推定値を求めよ。測定値 $d_i (i = 1, 2, \dots, n)$ から計算可能な量として表記せよ。($\bar{d}$ 、 s^2 の記号は用いてよい。)

III-6 (重力熱力学) (100 点)

星は自分の重力によって束縛されており、その全エネルギー E は内部エネルギーの総和 $U(>0)$ と、重力ポテンシャルエネルギー $\Omega(<0)$ の合計である。これらのエネルギーの関係を議論しよう。星は球対称で、重力とガス圧の勾配が静的につりあった平衡状態にあると仮定する。光子による放射圧は無視でき、ガスの対流は存在しないとする。星の中心からの距離 r における圧力を $P(r)$ 、質量密度を $\rho(r)$ とする。星の半径は R として、その外は真空であり、 $\rho(r \geq R) = 0$ 、 $P(r \geq R) = 0$ である。半径 r より内側の質量を $M(r)$ とし、星の総質量は $M_0 = M(R)$ とする。星を構成するガスの断熱指数を γ (一定) とし、重力定数を G とする。

- (1) 星の中心からの距離 $r(< R)$ の位置での薄い層 dr における平衡条件から得られる次の式を完成せよ。

$$-G \frac{M(r)}{r^2} \rho(r) =$$

- (2) Ω と U と γ の関係式を導け。ただし、

$$\Omega = - \int_0^R G \frac{M(r)}{r} \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

であることを利用して良い。また、圧力 P と単位体積あたりの内部エネルギー ε には $P = (\gamma - 1)\varepsilon$ の関係がある。

- (3) 星が重力的に束縛され安定であるには、全エネルギー E が負である必要がある。このことから、星を構成するガスの断熱指数 γ が満たすべき条件を求めよ。次に、星を構成するガスが非相対論的な単原子分子 ($\gamma = 5/3$) である場合、星として安定に存在し得ることを示せ。

以下の設問では星は非相対論的な単原子分子のガスで構成されているとする。

- (4) ガスの平均温度 T_0 を U と M_0 で表せ。ただし単原子分子1個の質量を m 、ボルツマン定数を k とする。
- (5) 星は光を放射することで準静的にエネルギーを失う。全エネルギーが E から $E + \Delta E$ に変化した場合、内部エネルギーと重力エネルギーそれぞれの変化量はいくらか。また、平均温度 T_0 の変化量 ΔT_0 がいくらになるかを考え、星全体としての見掛けの比熱 $C \equiv \Delta E / \Delta T_0$ を求めよ。
- (6) 前問の結果を踏まえ、以下の文について { } 内の言葉から適切なものを選び。星は光を放射することでエネルギーを失った結果、平均温度は { ①上昇する。②下降する。③変化しない。} また、星は全体的に { ④膨張する。⑤収縮する。⑥変化しない。}

III-7 (電磁波の散乱) (100 点)

電荷 e 、質量 m の荷電粒子による電磁波の真空中での古典的な散乱を考えよう。入射電磁波が荷電粒子を加速し、この荷電粒子の運動によって電磁波が放射される。これが、荷電粒子による電磁波の散乱現象である。

- (1) 荷電粒子の速さが光速 c に比べて十分小さいとき、その運動によってつくられる電場と磁場は、十分遠方では

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}})}{r}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}$$

と与えられる。ここで、 ϵ_0 は真空の誘電率、 r は観測点の位置ベクトル $\mathbf{r}$ の大きさを、 $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ はその方向ベクトルである。荷電粒子の位置ベクトルは $\mathbf{x}$ であり、 $\mathbf{d} = e\mathbf{x}$ 、 $\ddot{\mathbf{d}} = d^2\mathbf{d}/dt^2$ である。ただし、荷電粒子は原点付近に局在していて、 $|\mathbf{x}| \ll |\mathbf{r}|$ が成立しているものとする。十分遠方では、ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ の大きさが

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3 r^2} |\ddot{\mathbf{d}}|^2 \sin^2 \theta$$

と書けることを示せ。ここで、 θ は $\ddot{\mathbf{d}}$ と $\mathbf{n}$ のなす角である。

- (2) 座標系の原点に位置する束縛のない荷電粒子による電磁波の散乱を考えよう。入射電磁波は、 z 軸方向に進行する平面波であり、その電場は x 軸方向に向いている。単位時間に単位面積を通過して単位エネルギーの電磁波が入射するとき、単位時間に単位立体角のなかに散乱される電磁波のエネルギーを求めよ。これは、微分散乱断面積 $d\sigma/d\Omega$ と呼ばれている。ここでは、電磁波放射による反作用は無視できるものとする。
- (3) 入射電磁波によって加速された荷電粒子は電磁波を放射することでエネルギーを失う。その際に反作用として、荷電粒子は力を受けると考えられる。荷電粒子の運動が周期的である場合に、エネルギー保存則を使って電磁波放射による反作用力が

$$\mathbf{F}_r = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3}$$

と与えられることを示せ。

- (4) 今度は荷電粒子がポテンシャルエネルギー $V = m\omega_0^2 |\mathbf{x}|^2/2$ ($\omega_0 > 0$) で束縛されている場合を考える。電磁波放射の反作用まで考慮して散乱の全断面積 $\sigma = \int (d\sigma/d\Omega) d\Omega$ を計算せよ。ただし、入射電磁波の角振動数を ω (> 0) とせよ。

III-8 (X線分光) (100点)

ブラッグ反射を原理にもつ結晶分光器について考察する。

- (1) ブラッグ反射の原理を理解するために、図1に示す結晶の回折格子のモデルを考える。図1のように結晶中の原子が作る格子面が周期的に存在するものとする。格子面の間隔を d とする。入射角 θ でX線を入射させる。それぞれの面を単独で考えた場合には、X線光子エネルギーによらず同じ角度 θ で反射すると考えてよいものとする。次に、各々の格子面とその上下の格子面からの反射光同士の干渉を考えると、特定のエネルギー E をもつX線のみが強い強度で反射する。これをブラッグ反射と呼び、この角度 θ をブラッグ角と呼ぶ。なぜそうなるかを説明し、 d 、 E 、 θ の間に成り立つ式（ブラッグの式）を求めよ（プランク定数を h 、光速を c とする）。ただし、各格子面でのX線反射率は非常に小さく、格子面の数は十分に多いとする。

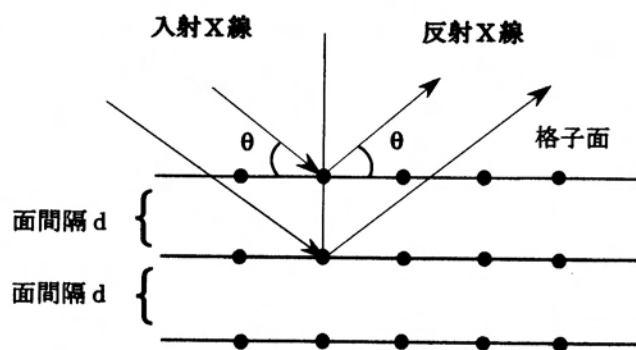


図 1:

このブラッグの式を満たすX線のエネルギーは複数あるが、以下では一番エネルギーの低いものだけを考える。

- (2) 上記で述べた結晶を一つだけ用いて、図2に示すような分光器を構成する。この結晶分光器に種々のエネルギーを持った白色X線を図2のように点光源から入射する。今、 E_0 のエネルギーをもつX線が、ブラッグ角 θ_0 で反射されスクリーン上Oに垂直に入るものとする。X線源は点光源としX線は紙面内のみを考える。この時、光源から結晶の中心までの距離と結晶の中心からスクリーンまでの距離を l とする。
- (a) $\theta_0 \pm \Delta\theta$ の入射角で結晶に反射されるX線エネルギーは、図2のようにスクリーン上で $E_0 \pm \Delta E$ に対応する。このとき、 $\Delta\theta$ を ΔE 、 θ_0 、 E_0 を用いて求めよ。ただし、 $\frac{\Delta\theta}{\theta}$ は十分に小さいものとする。

(次ページに続く)

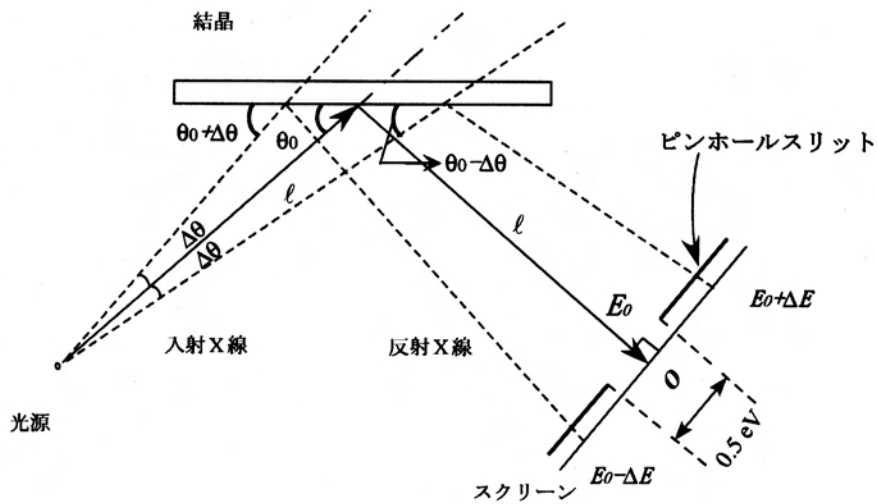


図 2:

- (b) 白色 X 線からこの結晶分光器を用いて $E_0 = 10000 \text{ eV}$ 、エネルギー幅 0.5 eV の X 線を取り出すとすると、スクリーン O のところで直径いくらのピンホールスリットが必要かを求めよ。ただしブラッグ角 $\theta_0 = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$, $\ell = 1.0 \text{ m}$ とする
- (3) 同様に白色 X 線の点光源を用いて、図 2 の O の位置に、もう一つ同じ結晶を追加し、図 3 に示すような 2 結晶分光器を組み立てる。このとき、第 1 結晶と第 2 結晶とが図 3 の M に関して鏡映対称の関係になるように配置する。新たに置いたスクリーン上で E_0 を中心として幅 $2\Delta E$ のエネルギーを持つ X 線がどのように観測されるかを問題 (2) の場合と比較して述べよ。

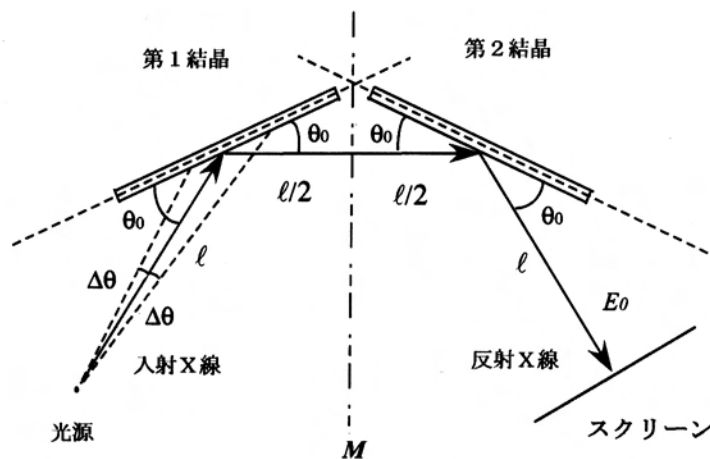


図 3: