

平成 16 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

注意

- (1) 問題 I-1、I-2、I-3 の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
 - (2) 各解答用紙ごとに、指定の位置に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。
-

I-1 (弦の振動) (100 点)

長さ $2l$ 離れた、水平面内にある固定点間に張られた弦について考える。両固定点を通る方向を x 軸にとり、固定点の中央を $x = 0$ とする。鉛直下方を y 軸にとり、時刻 t での弦の形状を $y(x, t)$ で表す。両端では $y(\pm l, t) = 0$ とする。弦の単位長さあたりの質量を m 、張力を T 、重力加速度を g とおく。 $|y(x, t)| \ll l$ の場合には、 $y(x, t)$ は方程式

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = g \quad (\text{A})$$

に従う。ここで、 $c = \sqrt{T/m}$ である。

- (1) 振動していない平衡状態では、弦は重力のためにわずかに下方にたれている。このとき、弦の平衡形状 $y_0(x)$ は

$$y_0(x) = \frac{g}{c^2}(l^2 - x^2) \quad (\text{B})$$

と表されることを示せ。

- (2) 問 (1) の平衡状態にある弦の中央をつまんで、微小量 h だけ下に引っ張ったときの弦の形状を $y_1(x)$ とする。 $u_1(x) \equiv y_1(x) - y_0(x)$ を求めよ。

この状態で弦を静かに放すと、弦は振動を始める。 y 方向の変位を $u(x, t) \equiv y(x, t) - y_0(x)$ として、以下の問に答えよ。

- (3) この振動にあらわれる固有振動の振動数を求めよ。
- (4) 初期条件を満足する $u(x, t)$ を求めよ。
- (5) この振動における、もっとも低い固有振動のモードと、その次に低い固有振動のモードの振幅の 2 乗の比を求めよ。

I-2 (数学) (100点)

- (1) 関数 $y(x)$ についての以下の二つの微分方程式の一般解を求めよ。なお、 $y' \equiv \frac{dy}{dx}$ 、 $y'' \equiv \frac{d^2y}{dx^2}$ の意味である。

(a) $y'' + 2y' - 3y = 9e^{2x}$

(b) $x^2y'' - 6y = 5x^4$

- (2) Bernoulli 数 B_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を以下の無限級数展開で定義する。

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

このとき、 B_0 、 B_1 、 B_2 を求めよ。また、

$$B_3 = B_5 = B_7 = \dots = 0$$

を証明せよ。

- (3) $\cot x$ の無限級数展開、

$$\cot x = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$$

の係数 A_n を Bernoulli 数を用いて書け。

- (4) $\cos(kx)$ の $x \in [-\pi, \pi]$ における Fourier 展開、

$$\cos(kx) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n \cos(nx) + S_n \sin(nx) \right\}$$

において、係数 C_n と S_n を求めよ。

I-3 (交換相互作用) (100点)

二つの原子に電子の軌道 1, 2 がそれぞれ局在している。その軌道部分の規格化された波動関数を $\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x})$ とし、それらは互いに直交するものとする。今 ϕ_1, ϕ_2 にそれぞれ電子が 1 つ入っている。また 2 つの電子のスピン演算子を、 \mathbf{s}_1 と \mathbf{s}_2 とし、スピン部分の波動関数を $\psi_{s_z}^{(1)}, \psi_{s_z}^{(2)}$ とする。

- (1) 全スピン演算子を $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ 、全スピンを S 、その磁気量子数を S_z としたとき、その規格化された固有関数 Ψ_{S, S_z} をすべて求めよ。また電子がフェルミ統計に従うことを考慮し、 $S = 1, S = 0$ のそれぞれについて、許される軌道部分の規格化された波動関数を書け。ただし二つの電子の座標を \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 とする。

- (2) 演算子 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0$ を

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 \Psi_{1, S_z} &= \Psi_{1, S_z}, & \mathbf{P}_1 \Psi_{0, 0} &= 0, \\ \mathbf{P}_0 \Psi_{0, 0} &= \Psi_{0, 0}, & \mathbf{P}_0 \Psi_{1, S_z} &= 0 \end{aligned}$$

を満たすものとする。 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ を $\mathbf{P}_i = c_i + d_i \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$ という形で書け。ただし c_i, d_i は実数である。

- (3) 電子間にクーロン相互作用が働く。このハミルトニアンを $H = e^2/r_{12}$ とする。ここで $r_{12} \equiv |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ である。このハミルトニアンの期待値を $S = 0, S = 1$ の両方の場合について計算し、それが

$$\langle H \rangle = a + b \langle \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 \rangle |S\rangle$$

の形にまとめ、 b が

$$b = -2 \int d^3x_1 d^3x_2 \phi_1^*(\mathbf{x}_2) \phi_2^*(\mathbf{x}_1) \frac{e^2}{r_{12}} \phi_1(\mathbf{x}_1) \phi_2(\mathbf{x}_2)$$

で与えられることを示せ。ただし、 $\langle \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 \rangle |S\rangle$ は、全スピンの S の場合の $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$ の固有値であり、 a, b は共に S によらない量とする。

- (4) 系の体積を Ω としたとき

$$\phi_1^*(\mathbf{r}) \phi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$$

と展開できることを用い、 b が負であることを示せ。ただし

$$\int d^3r \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int d^3r \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \epsilon r}}{|\mathbf{r}|}$$

とする。

- (5) $S = 1, S = 0$ のうちエネルギーが低い状態はどちらか。

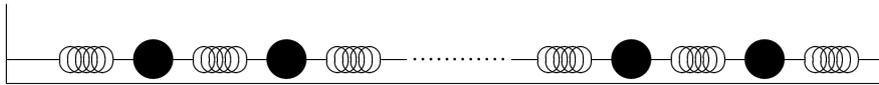
平成 16 年度大学院入学試験問題 II (3 時間 30 分)

注意

- (1) 問題 II-1、II-2、II-3 の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ。(裏面を用いてもよい。)
- (2) 各用紙ごとに、指定の位置に問題番号、受験番号、氏名を記入せよ。

II-1 (格子振動) (100 点)

下の図の様に N 個の同じ質量 m を持つ質点と同じ強さ k のばね ($N+1$) 本でつながれている場合を考えよう。ただし、両端のばねは固定されている。



- (1) 左から n 番目の質点の任意の時刻 t における変位を $x_n(t)$ として、系のラグランジアンを書け。ただし、右の方向を正にとる。
- (2) $x_n(t)$ を第 n 成分とする N 次元ベクトルを $\mathbf{x}(t)$ と書く。系の運動方程式を

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} = L \mathbf{x}$$

と表すとき、 N 次の対称行列 L を書け。

- (3) すべての質点と同じ角振動数で振動する運動 $x_n^{(p)}(t) = a_n^{(p)} \cos \omega_p t$ ($n = 1, 2, \dots, N$) を基準振動という。独立な基準振動は N 個ある ($p = 1, 2, \dots, N$)。基準角振動数 ω_p と振幅 $a_n^{(p)}$ はそれぞれ

$$\omega_p = \Omega \sin \frac{\theta_p}{2}, \quad a_n^{(p)} = A \sin n\theta_p \quad (\text{A})$$

と与えられることを示せ。ただし、 $\Omega = 2\sqrt{k/m}$ 、 $\theta_p = p\pi/(N+1)$ 、そして A は任意定数である。

(ヒント： $a_n^{(p)} = a \sin(n\theta + \alpha)$ と置いて、境界条件から θ と α を求めよ。)

- (4) $\mathbf{a}^{(p)} = {}^t(a_1^{(p)}, a_2^{(p)}, \dots, a_N^{(p)})$ とベクトル表示するとき、 $\mathbf{a}^{(p)}$ は次のように正規直交系になっていることを示せ。ただし、式 (A) において $A = \sqrt{2/(N+1)}$ と選ぶものとする。

$$\sum_{n=1}^N a_n^{(p)} a_n^{(p')} = \delta_{pp'} \quad (p, p' = 1, 2, \dots, N)$$

ここで、 $\delta_{pp'}$ はクロネッカーのデルタである。また、 $\sum_{n=1}^N \sin^2 n\theta_p = (N+1)/2$ である。

- (5) 各質点にさらに速度に比例する抵抗 $-2m\gamma\dot{x}_n$ (ただし、 $\gamma > 0$; 定数) と外力 $F_n(t) = mf_n \cos \omega_e t$ が加わっている場合を考える。このときの運動方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x} - L\mathbf{x} + 2\gamma\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f} \cos \omega_e t \quad (\text{B})$$

となる。ただし、 $\mathbf{f} = {}^t(f_1, f_2, \dots, f_N)$ 。基準座標 $q_p(t) \equiv \sum_{n=1}^N a_n^{(p)} x_n(t)$ の従う運動方程式を $f^{(p)} = \sum_{n=1}^N a_n^{(p)} f_n$ を使って表せ。

- (6) 十分時間が経過したときの $q_p(t)$ を求めよ。

II-2 (静電容量) (100点)

- (1) 図1のような同軸円筒コンデンサーがある。内側の円筒極板の半径は a 、外側の円筒極板の半径は b 、軸方向の長さは L であり、両円筒極板の厚みは無視できるものとする。この同軸コンデンサーの静電容量 C_0 を求めよ。ただし、両円筒極板間は真空であり、真空の誘電率を ϵ_0 とする。またコンデンサーは十分長く、両端で電場の乱れる効果は無視してよい。

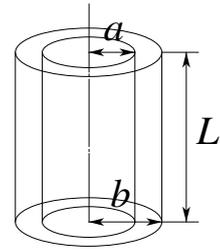


図1

- (2) このコンデンサーの軸を鉛直方向に保持しながら、下端を大きな容器にためた非導電性の液体表面に接するように設置する。このとき極板間の間隔が十分狭ければ、液面の極板との接触線 C の接線方向に働く表面張力 α (図2) (注) の反作用 α' によって、液面は高さ h_1 だけ上昇する (毛管現象) (図3)。この h_1 を上昇した液体に働く重力 (重力加速度を g とせよ) と α' との釣り合いを考慮することによって求めよ。ただし、液面形状の水平面からの変形は高さ h_1 と比べて無視できるものとし、接触線 C での接触角は常に θ であるものとする。また液体の密度は ρ で与えられ、液体より上にある気体の密度は無視する。

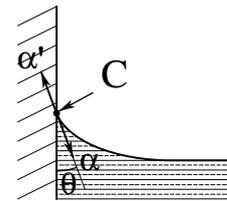


図2

(注) 二つの媒質が接する界面 (表面) を変形させる時に必要な仕事は、体積変化に伴う仕事 (=体積変化 \times 圧力差) と表面積を変化させるのに伴う仕事 (=表面積変化 \times 表面エネルギー α) に分類される。この表面エネルギーは表面張力とも呼ばれ (エネルギー \div 面積) の次元を持つ量である。

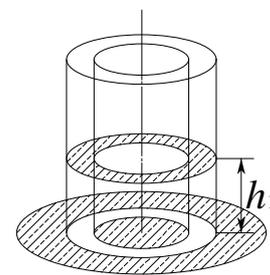


図3

- (3) このときのコンデンサーの静電容量 C_1 を測定した。液の高さ h_1 を C_1 より求めよ。ただし液体の誘電率は ϵ 、気体の誘電率は ϵ_0 と書けるものとする。
- (4) 極板間に電位差 V を与えると液面はさらに h_2 だけ上昇した (図4)。この状態の静電容量 C_2 を用いて h_2 および液体の密度 ρ を求めよ。

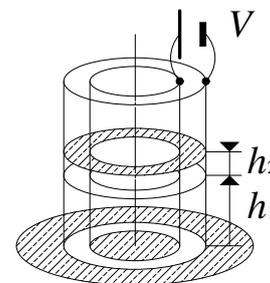


図4

- (5) コンデンサーを液体中に完全に沈めたときの静電容量 C_3 を測定すれば、液体の誘電率 ϵ を知ることができる。このことを利用して $a, b, C_0, C_1, C_2, C_3, V, \epsilon_0, \theta$ を用いて表面張力 α を表せ。

II-3 (Ising モデル) (100 点)

- (1) 体積 V の結晶の全原子数を N とする。各原子が磁気モーメント μ を持ち、磁場 H に対して平行 (+) か反平行 (-) のいずれかの状態のみを取るものとする。各格子点の状態を表す変数を $\sigma_i (i = 1, \dots, N)$ とし、磁場 H に対して平行な時 +1、反平行な時 -1 とする。また隣り合うスピンの間のみ相互作用が働くものとする。この時の系全体の Hamiltonian は

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - \mu H \sum_i \sigma_i \quad (\text{A})$$

と書ける。ただし、 $\langle ij \rangle$ は隣り合うスピンに対する和である。ここで i 番目の格子点にあるスピンの Hamiltonian \mathcal{H}_i を σ_i の平均値 $\langle \sigma \rangle$ を用いて次の形で書けると仮定する。

$$\mathcal{H}_i = -Jz \langle \sigma \rangle \sigma_i - \mu H \sigma_i \quad (\text{B})$$

ここで z は最隣接原子の数である。また $Jz \langle \sigma \rangle = \mu H'$ と置けば、一つのスピンには有効磁場 $H_{\text{eff}} = H + H'$ が働いているとみなすことができる。

- (a) 一つのスピンに対する分配関数 Z_1 を H_{eff} を用いて書け。
 (b) 各スピンが独立であるとして、系全体についての Helmholtz の自由エネルギー F を求めよ。更にエントロピー S と内部エネルギー U の表式を導け。
 (c) この系の磁化の強さ $M (= \frac{N}{V} \mu \langle \sigma \rangle)$ が次の式を満たすことを示せ。

$$M = \frac{N\mu}{V} \tanh\left(\frac{\mu H}{kT} + \frac{JzVM}{kT\mu N}\right) \quad (\text{C})$$

- (d) 式 (C) が $H = 0$ で $M = 0$ 以外の解を持つ条件を求めよ。ここで、Curie 温度 $T_c = Jz/k$ (k は Boltzmann 定数) を用いよ。

- (2) 同じことを統計力学的に考える。原子の総数を N とし、磁場 H に対して平行 (+)、反平行 (-) にあるスピンの数をそれぞれ N_+ 、 N_- とする。またパラメータ Φ を $N_+/N = (1 + \Phi)/2$ 、 $N_-/N = (1 - \Phi)/2$ により定義する。隣接原子対 (総数 $zN/2$) を +, - で区別し、隣接原子の両方が磁場に平行である対の数を N_{++} 、以下同様に N_{--} 、 N_{+-} と置くと、この時の相互作用エネルギー U は

$$U = -J(N_{++} + N_{--} - N_{+-}) \quad (\text{D})$$

となる。ここで一つの格子点が + または - により占められる確率 $p_+ = N_+/N$ 、 $p_- = N_-/N$ を導入し、 U の式の中の N_{++} 等をその平均値

$$\overline{N_{++}} = \frac{1}{2}zN_+p_+ = \frac{z}{8}N(1 + \Phi)^2 \quad (\text{E})$$

$$\overline{N_{+-}} = zN_+p_- = \frac{z}{4}N(1 - \Phi^2) \quad (\text{F})$$

$$\overline{N_{--}} = \frac{1}{2}zN_-p_- = \frac{z}{8}N(1 - \Phi)^2 \quad (\text{G})$$

で置き換える近似を行う。

- (a) N 個のスピンのうち、 N_+ 個が平行スピン、 N_- 個が反平行スピンであるときの系全体のエントロピーを Φ を用いて書き表せ。ただし、Stirling の公式 ($\log x! \simeq x \log x - x$) を用いること。
- (b) 磁場 H をゼロとしたときの Helmholtz の自由エネルギー F を Φ を用いて書け。
- (c) Φ の平衡値を求める式が、式 (C) で $H = 0$ としたときと同じ形になることを示せ。またパラメータ Φ の物理的意味を説明せよ。
- (d) 定積比熱 C_v の T_c 近傍での振舞いがどうなるか、グラフを用いて説明せよ。

平成16年度大学院入学試験問題III (3時間)

注意

- (1) 問題はIII-1からIII-8まで8問ある。これから3問選択せよ。
- (2) 選択した問題の回答はそれぞれ別の用紙一枚に記入せよ（裏面を用いてもよい）。
- (3) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

III-1 (選択)(振り子の実験) (100点)

剛体を水平な固定軸で支えた実体振り子で重力加速度 g を求める実験を行うものとする (Borda の振り子)。この振り子は図1のように細い針金で吊られた半径 r 、質量 M の金属球からなり、支持体のナイフエッジ K を支点として振動する。針金の長さを l 、振り子が最大振幅になるときの角度を α 、振動の周期を T とすると、重力加速度 g は次の式で求めることができる。

$$g = \frac{4\pi^2(l+r)}{T^2} \left[1 + \frac{2r^2}{5(l+r)^2} \right] \left[1 + \frac{\alpha^2}{8} \right] \quad (\text{A})$$

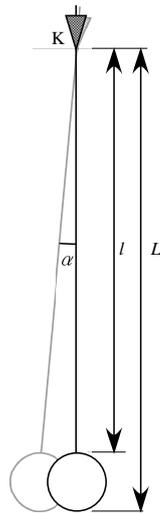


図1



図2

- (1) 金属球の直径をノギス (キャリパー) を用いて測定したところ、図2のような表示だった。直径の値を誤差を含めて書け。

- (2) 振り子の周期 T を測定するため、振り子を 190 回振動させて 10 回ごとのラップタイムを測った。表はその結果である。1 列目は 0 から 90 回目、2 列目は 100 から 190 回目のラップタイムで、3 列目は 1 列目と 2 列目の差にあたる 100 周期分の時間である。

回数	ラップタイム	回数	ラップタイム	100 回ごとの時間
0	1 分 40 秒 5	100	5 分 09 秒 7	3 分 29 秒 2=209.2 秒
10	2'01.2	110	5'30.7	3'29.5=209.6
20	2'22.0	120	5'53.7	3'31.7=211.7
30	2'43.1	130	6'14.5	3'29.4=209.4
40	3'03.8	140	6'35.5	3'29.7=209.7
50	3'24.8	150	6'56.5	3'29.7=209.7
60	3'45.8	160	7'17.3	3'29.5=209.5
70	4'06.6	170	7'38.3	3'29.7=209.7
80	4'27.6	180	7'59.5	3'29.9=209.9
90	4'48.6	190	8'20.5	3'29.9=209.9

このデータを用いて、平均周期 T とその誤差 ΔT を求めよ。測定データの取り扱いには十分注意すること。また、 ΔT は平均値の標準偏差より求め、 $\sqrt{\frac{4.32}{90}} = 0.219089$, $\sqrt{\frac{0.43}{72}} = 0.077281$ を用いて良い。

長尺ノギスを用いた測定により、支点 K から金属球の下端までの長さ L は 110.96 ± 0.01 cm であった。また周期の測定前後において求めた振り子の振幅を求めそれらの幾何平均をとることにより、 $\alpha^2 = 1.54 \times 10^{-3}$ を得た。

- (3) 針金の長さ l はいくらか。誤差を含めて示せ。
- (4) g の計算式を書き下せ。ただし、数値計算は行わなくて良い。
- (5) 問(4)の計算を電卓を用いて行ったところ、979.60184 という値が出た。 g の値はいくらか。
- (6) l, r, T の誤差を $\Delta l, \Delta r, \Delta T$ としたとき、 g の相対誤差が次の形で近似できることを示せ。

$$\left| \frac{\Delta g}{g} \right| = \left| \frac{\Delta L + \Delta r}{L - r} \right| + 2 \left| \frac{\Delta T}{T} \right| \quad (\text{B})$$

また、有効数字を考えて g の誤差 Δg を求めよ。

III-2 (選択)(回路) (100 点)

超伝導電磁石の「永久モード」と「永久モードスイッチ」に関する以下の記述を読んで、下記の問いに答えよ。

一般に常伝導線材でできた電磁石に大電流を流すと、線材の電気抵抗に伴う自己発熱のため、発生磁界の限界が小さくなる。超伝導転移点以下に冷却された超伝導電磁石ではこのような問題はなく、小型の電磁石で強磁界を発生できる。また、超伝導物質のみで作られた閉回路に流れる定常電流は減衰しない。この特質を利用したものが超伝導電磁石の永久モードである。超伝導電磁石の巻き線の両端を常伝導物質を介さずに接続しておけば、外部電源から電流を供給し続けなくても、電流および磁界を高精度に維持することができる。しかしながら、当然、超伝導体の閉回路中の電磁石に外部から電流を流し込むことはできない。このままでは超伝導体となった時に流れていた電流が維持されるだけである。永久モードスイッチがこの問題点を打開する。超伝導電磁石の両端を結ぶ超伝導線材の一部に、局所的に熱を加えて超伝導転移温度以上に加熱保持できる仕組みが取り付けられてある。この部分が超伝導状態の時は永久モード、常伝導の時には外部から電流を流し込める通常モードとなり、あたかも永久モードのスイッチのように働く。

- (1) 超伝導線を巻いた直径 10 cm、長さ 50 cm の巻き線の厚みの無視できる空芯ソレノイド形の電磁石がある。この磁石に 100 A の電流を流した時、中心部で 10 T の磁束密度が得られた。この磁石のインダクタンス L はいくらか。ただし、このソレノイドは十分細長く、無限長近似を適用してよいものとする。ソレノイド内部の空間の透磁率としては $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{C}^{-2}$ を用いよ。
- (2) 永久モードスイッチの常伝導部分の線材の電気抵抗率が $1 \times 10^{-8} \Omega\cdot\text{m}$ 、線材の半径 0.1 mm、長さ 1 m とした時の電気抵抗を R とする。今、超伝導電磁石に流れる電流が 0 の状態の時に永久モードスイッチのヒーターに熱を入れ通常モードにした。時刻 $t=0$ にこの電磁石に接続した電源より電流 I_0 (一定値) を流しはじめたとする。時刻 t において磁石中心部における磁束密度 B を I_0, L, R を用いて求め、時間変化の様子を L, R の数値を用いてグラフに示せ。
- (3) 問(2)の状態ですぐ十分時間が経って定常状態になったところで永久モードにすれば、その時ソレノイドに流れる電流を永久に保持することになる。しかし、現実的な超伝導磁石では、超伝導の完全な閉回路を作ることは難しい。技術的な理由で超伝導線は多数本の超伝導体の細線を束ねて銅線の中に埋め込んだ構造をとっており、超伝導線の閉回路を作ろうとしても接続部分において超伝導体同士の間この銅が挟まれてしまうからである。しかしながら、ソレノイドの両端からの二本の超伝導線を十分な長さだけ平行にハンダ付けすることにより接続部分の電気抵抗 r を小さくし、擬似的に永久モード動作を

させることができる。今、永久モードにしてから電源を切り離れた状態で、磁場が1時間あたり1 ppm($=1 \times 10^{-6}$)の精度で安定していることを要求するには接続部分の電気抵抗 r の値の上限はいくらか。

- (4) 永久モードスイッチのついた超伝導電磁石では問(2)のように外部から流した電流が即電磁石に流れる電流にはならないことに注意しなければならない。今、超伝導電磁石に流れる電流が0の状態から永久モードスイッチのヒーターに熱を入れ、通常モードにしてあるものとする。時刻 $t=0$ にこの電磁石に接続した電源より時間に対して線形に変化する電流 $I_0 = \beta t$ を流し始めたとする。時刻 t において磁石中心部の磁束密度 B を I_0, L, R, β を用いて求め、時間変化の様子を $\beta = 0.1$ A/sec の場合について L, R の数値を用いてグラフに示せ。
- (5) 100A の電流を流して永久モードにしてからスイッチ (S1) で電源を切り離れた状態の超伝導電磁石がある (図1)。この超伝導電磁石の永久モードスイッチ (PSW) を誤操作により通常モードにしてしまった。このとき、電磁石に貯えられていた磁気エネルギーは常伝導になった部分でジュール熱として発散される。この発熱で超伝導転移温度を超える領域が周辺の線材部分に拡大し、磁気エネルギーはすべて熱となってしまう。このとき局所的に著しく発熱することとなるため、最悪の事態では線材の融点を超えて電磁石巻き線を焼損することになる。このような事態を防ぐため、通常は保護回路 (D1, D2, R1 よりなる) が取り付けられている。この保護回路の動作を説明せよ。ただし D1, D2 の電圧電流特性は図2に示されているものを使用するとし、R1 の抵抗値は 0.02Ω とする。また、この保護回路を付加することによって超伝導電磁石の使用条件に制約を受けることになるが、その条件を説明せよ。

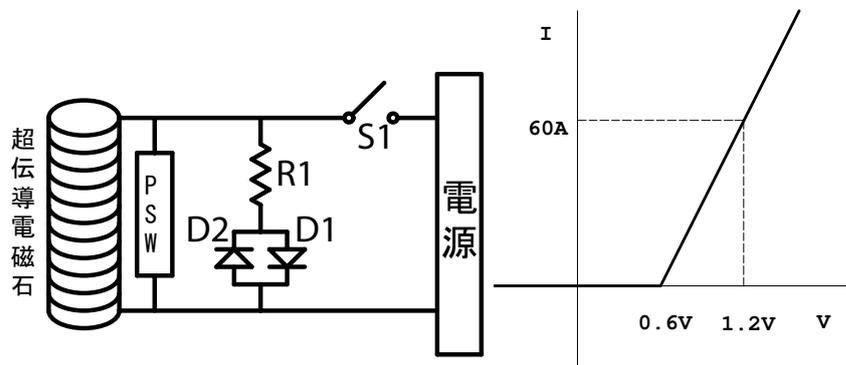


図1

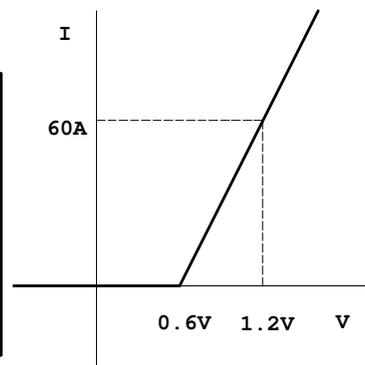


図2

III-3 (選択)(調和振動子) (100点)

一次元調和振動子のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 x^2)$$

である。ここで、 x , p は座標および運動量の演算子を表わし、 ω は角振動数である。また質量は簡単のため 1 にとった。系が量子力学に従うとして

$$a = (2\omega)^{-1/2}(p - i\omega x)$$

$$a^\dagger = (2\omega)^{-1/2}(p + i\omega x)$$

と表わされる消滅演算子 a 、生成演算子 a^\dagger を導入する。ただし、 $\hbar = 1$ とした。

(1) a と a^\dagger の交換関係を求めよ。また H は

$$H = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

のように書き換えられることを示せ。

(2) 系の基底状態 $|0\rangle$ は式

$$a|0\rangle = 0$$

を満たす。この式から基底状態の波動関数 $\varphi_0(x) = \langle x|0\rangle$ についての微分方程式を導き、その規格化された解を求めよ。なお、必要ならば次のガウス積分を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

(3) 第一励起状態 $|1\rangle = a^\dagger|0\rangle$ の規格化した波動関数 $\varphi_1(x) = \langle x|1\rangle$ を求めよ。

次に、二次元の調和振動子を考える。そのハミルトニアン H_0 は

$$H_0 = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

と与えられる。この系に

$$H' = -\lambda \left[(\vec{p} \cdot \vec{e})^2 - \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) \right]$$

の摂動が加わったとする。ただし、 $\vec{p} = (p_x, p_y)$ であり、 \vec{e} は単位ベクトル $(\cos \theta, \sin \theta)$ を表わしている。

(4) $\theta = \pi/4$ のとき、基底状態のエネルギーを H' の 2 次の摂動項まで求めよ。

摂動が加わらないときには第一励起状態には 2 重の縮退がある。その縮退は H' によりとれる。

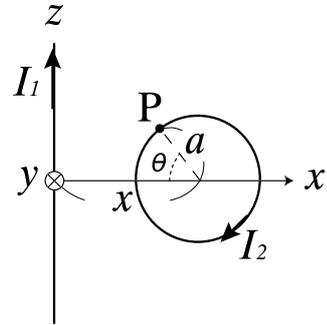
(5) $\theta = 0$ のとき、エネルギーの低い方の状態を表わす波動関数とそのエネルギーを一次の摂動により求めよ。 $\lambda > 0$ と $\lambda < 0$ の 2 つの場合に分けて考えよ。なお、波動関数の答えは $\varphi_0(x)$, $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_1(y)$ を用いて書くこと。

(6) 一般の θ の場合にエネルギーの低い方の状態を表わす波動関数とそのエネルギーを一次の摂動により求めよ。

(7) 問 (5) の結果を考慮して、問 (6) の結果がなぜそのようになったか説明せよ。

III-4 (選択) (電磁誘導) (100 点)

透磁率 μ_0 の真空中に、 z 軸に沿った無限に長いまっすぐな導線と、それから距離 $x(> a)$ を隔てて半径 a の円形一巻きコイルとが $x-z$ 平面内にある (右図)。以下の問に答えよ。



- (1) 導線に電流 I_1 、コイルに電流 I_2 を図の向きに流す。このとき、電流 I_1 によって図の P 点の位置に生じる磁界の向きと大きさ H を答えよ。
- (2) 問 (1) の磁界によって、P 点の線要素 $ds = a d\theta$ を流れる電流に作用する力の x 軸方向成分 dF_x と z 軸方向成分 dF_z を求めよ。
- (3) コイル全体に作用する力の方向と大きさ F を求めよ。必要ならば、

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{u - t \cos \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{u^2 - t^2}} \quad (u > t)$$

を用いてよい。

- (4) この後、一旦両方の電流を切り、導線に $I_1 = I \sin \omega t$ と時間変化する電流を流した。導線とコイルの相互インダクタンス M を求め、このときコイルに発生する起電力 e (時計周りを正にとる) を求めよ。
- (5) 次に導線に $I_1 = I$ の定常電流を流し、コイルを x 軸の正の方向に一定速度 v_0 で動かした。このとき、コイルが場所 $x(> a)$ を通過する時点でのコイルに流れる電流 I_2 の向きを答え、大きさを求めよ。コイルの抵抗を R とし、また自己インダクタンスは無視できるものとする。
- (6) 問 (5) の場合、コイルを $x = d_1(> a)$ から $x = d_2$ まで動かしたときの仕事 W を求めよ。またこの仕事は、発生するジュール熱 Q と等しいことを示せ。

III-5 (選択) (量子統計) (100 点)

ボゾン、フェルミオンといった量子力学的粒子は、状態の占有に関して古典的な Maxwell-Boltzmann 粒子とは大きく異なったルールに従っている。このため、さまざまな熱力学的性質にも統計性の効果が出してくる。以下では、状態方程式を例にとり、

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 \quad (\text{A})$$

のような分散を持って 3 次元空間中を運動する質量 m の Maxwell-Boltzmann 粒子からなる気体 (古典気体) と量子力学的粒子の気体とが、どのように異なっているかを考察してみよう。以下の問題では、**粒子間の相互作用は無視するものとし**、プランク定数を h (あるいは \hbar)、ボルツマン定数を k_B などとするものとする。

- (1) まず、古典気体を考えよう。体積 V の箱に閉じこめられ、温度 T で熱平衡にある**一個の**古典粒子の分配関数 Z_1 を計算せよ。ただし、必要があれば Gauss 積分公式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

を用いてよい。

- (2) 上の問題と同じ設定で、同種粒子が N 個あるときの分配関数 Z_N も計算せよ。(ただし、気体分子の位置は空間内に固定されていないので、エネルギー、エントロピーなどの物理量が正しく示量的になるように、分配関数にある因子で割る必要があることに注意せよ。)
- (3) この系の粒子数 N が変化できるようにする。化学ポテンシャルを μ として、大分配関数 Ξ を計算せよ。
- (4) 熱力学関係式 $N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}$ ($\Omega = -pV = -k_B T \ln \Xi$ はグランドポテンシャル) により、古典気体の化学ポテンシャル $\mu = \mu_{cl}$ を粒子数 N 、温度 T 、体積 V の関数として定めると、

$$\mu_{cl} = k_B T \ln \left[\left(\frac{N}{V} \right) \lambda_T^3 \right]$$

となることを示し、状態方程式を導け。ただし、熱的ドブロイ波長 λ_T は、

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m k_B T}}$$

で与えられる。

- (5) 次に**量子力学的粒子**の場合を考えよう。古典粒子と同じ質量 m 、式 (A) で与えられる同一の分散 $\varepsilon(\mathbf{p})$ を持つボゾン、フェルミオンについて、そのグランドポテンシャルが

$$\Omega = -\frac{2}{3} \frac{V m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{3/2} \frac{z e^{-\beta\varepsilon}}{1 - g z e^{-\beta\varepsilon}} \quad (\text{B})$$

で与えられることを示せ。ただし、 $\beta = \frac{1}{k_B T}$ で、 $z = e^{\beta\mu}$ (μ は化学ポテンシャル) はフガシテイ、統計性を表す定数 g は、ボゾンのとき+1、フェルミオンのとき-1をとるものとする。

- (6) 状態方程式を求めるには、式 (B) の右辺に現れる z を、 N 、 V 、 T など表す必要がある。以下、フガシテイ $z = e^{\beta\mu} \ll 1$ の状況を考えよう。式 (B) の右辺を z について2次まで展開し、 $N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}$ を用いて、 z と N とを結びつける方程式を作れ。ただし、最終的な結果は、積分を全て実行した上で、 λ_T 、 V 、 z 、 N 、 g だけを用いて**できるだけ簡潔な形で**表せ。ただし、必要ならば Γ 関数の公式:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dx x^{z-1} e^{-x} \quad , \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad , \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

を用いてよい。

- (7) 今の方程式で条件: $z = e^{\beta\mu} \rightarrow 0$ を仮定して、 z について最低次の項のみを残すと、問 (2) で計算した古典気体のフガシテイ $z = \exp(\beta\mu_{cl})$ が得られることを示し、量子気体が古典気体で近似できるためには粒子数密度に対してどのような条件を課す必要があるか述べよ。
- (8) 問 (6)、(7) の結果を考慮すると、フガシテイ z を、微小パラメータ: $x \equiv \frac{N}{V} \lambda_T^3$ についての巾級数の形に求めると良いことが示唆される。問 (6) で得られた方程式の解 z を x の巾級数として求めよ (x の2次まででよい)。
- (9) また、物理量: $\frac{pV}{Nk_B T}$ を古典近似の次のオーダーまで計算し、ボゾン、フェルミオンの両方について、圧力 p が量子効果により古典気体からどのようにずれるかを調べよ。さらに、その結果を粒子の統計性と関係付けながら物理的に解釈せよ。

III-6 (選択)(天文学:銀河) (100点)

円盤銀河(渦巻銀河)では、星や水素ガスが薄い円盤状に分布しており、その円盤中心を中心として回転運動をしている。円盤部では、ガスから星が形成されているが、銀河のある半径より内側だけで星形成が起こっているのが普通である。このことを NGC6946 という円盤銀河を例にとって見てみよう。図1は、この円盤銀河を回転軸方向から見た時の、ガスの面密度の半径方向の変化を表したものである。横軸は kpc (キロパーセク、 $1 \text{ kpc} = 3.1 \times 10^{21} \text{ cm}$) という長さの単位で表示してある。ガス面密度は、銀河中心付近から外側に向かって減少しているが、10 kpc を越えてもガスが存在していることがわかる。一方、図2は、星形成量の指標である水素 H α 輝線の、回転軸方向から見た表面の明るさ(面輝度)の半径方向の変化を表している。図2から、H α 輝線の面輝度は半径約 8 kpc 付近で急にほぼゼロに落ちていることがみてとれる。このことは、8 kpc より外側では、ガスは存在しているのだが、星は生まれていないことを示している。この半径を臨界半径と呼ぶ。臨界半径がどのように決まっているのかについて、以下、回転するガス円盤の安定性を考察しながら考えてみよう。

$x-y$ 平面内で回転する無限に薄いガス円盤を考える。この系を記述する基本方程式は、以下の3式である。

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma \vec{v}) = 0 \quad (\text{A})$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\sigma} - \nabla \Phi - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \Omega^2(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \quad (\text{B})$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \sigma \delta(z) \quad (\text{C})$$

ここで、 σ はガス面密度、 \vec{v} は回転円盤に乗った系からみた速度、 p はガス圧、 Φ は重力ポテンシャル、 $\vec{\Omega}$ は円盤の回転角速度で、ここでは時間と半径に依らず一定とし、向きは z 軸方向でその大きさを Ω とする。 \vec{e}_x 、 \vec{e}_y はそれぞれ x 方向、 y 方向の単位ベクトル、 G は重力定数、 $\delta(z)$ はデルタ関数である。また、ガス圧 p はガス面密度 σ のみに依存する。すなわち、

$$p(x, y, t) = p(\sigma(x, y, t)) \quad (\text{D})$$

である。

- (1) このガス円盤に摂動を与えてその成長を調べたいわけだが、まず非摂動状態を添字 0 をつけて表し、 $\sigma = \sigma_0 = \text{一定}$ 、 $\vec{v} = 0$ 、 $p = p_0 = p(\sigma_0) = \text{一定}$ 、 $\Phi = \Phi_0$ の場合を考える。この場合、上の式(A)~(C)は次の2式になることを示せ。

$$\nabla \Phi_0 = \Omega^2(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y), \quad \nabla^2 \Phi_0 = 4\pi G \sigma_0 \delta(z) \quad (\text{E})$$

- (2) 次に、以下の摂動を与える。

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1(x, y, t), \quad \vec{v} = \vec{v}_1(x, y, t), \quad p = p_0 + p_1(x, y, t) \quad (\text{F})$$

ここで、添字 1 がついている量は微小量と考え、その1次の項まで展開すると、以下の3式が得られることを示せ。ただし、 $v_s^2 = \frac{dp(\sigma)}{d\sigma} \Big|_{\sigma_0} = \text{一定}$ を用いる。 v_s は音速である。

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \sigma_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad (\text{G})$$

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{v_s^2}{\sigma_0} \nabla \sigma_1 - \nabla \Phi_1 - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_1 \quad (\text{H})$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \sigma_1 \delta(z) \quad (\text{I})$$

(3) 摂動量として、

$$\sigma_1 = \sigma_a \exp[i(kx - \omega t)] \quad (J)$$

$$\vec{v}_1 = (v_{ax}\vec{e}_x + v_{ay}\vec{e}_y) \exp[i(kx - \omega t)] \quad (K)$$

$$\Phi_1 = -\frac{2\pi G \sigma_a}{|k|} \exp[i(kx - \omega t) - |kz|] \quad (L)$$

を考える。(x 軸方向の摂動だけが一般性を失わない。また式(L)は式(I)を考慮したものである。) この摂動を与えたとき、 σ_a, v_{ax}, v_{ay} が自明でない解を持つために必要な条件(これを分散関係という)を求めよ。また、得られた分散関係から、この摂動に対してガス円盤が安定となる条件を求めよ。

(4) より一般的なケースとして、 $\vec{\Omega}$ が半径 r 方向に変化するようなガス円盤を考え、渦巻パターン摂動を与えた場合には、上で求めた分散関係と少し異なる分散関係が得られる。それから得られる、軸対称摂動に対するガス円盤の安定条件は、次式のように与えられる。

$$\sigma_0(r) < \frac{v_s [r \frac{d\Omega(r)^2}{dr} + 4\Omega(r)^2]^{1/2}}{\pi G} \quad (M)$$

この安定条件が満たされる場所では星は誕生せず、この条件が満たされない半径にあるガス円盤は不安定を起こしてガス密度が上がり、星が誕生すると考えられる。この考えに基づいた場合、NGC6946 の臨界半径が約 8 kpc になることを、図 1 を利用して説明せよ。ただし、この円盤銀河内のガスの回転速度は、半径 2 ~ 3 kpc より外側では、 200 km s^{-1} で一定であるとする。計算には以下の数字を用いよ。 $G = 6.7 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $v_s = 5 \text{ km s}^{-1}$, $1 \text{ kpc} = 3.1 \times 10^{21} \text{ cm}$ 。

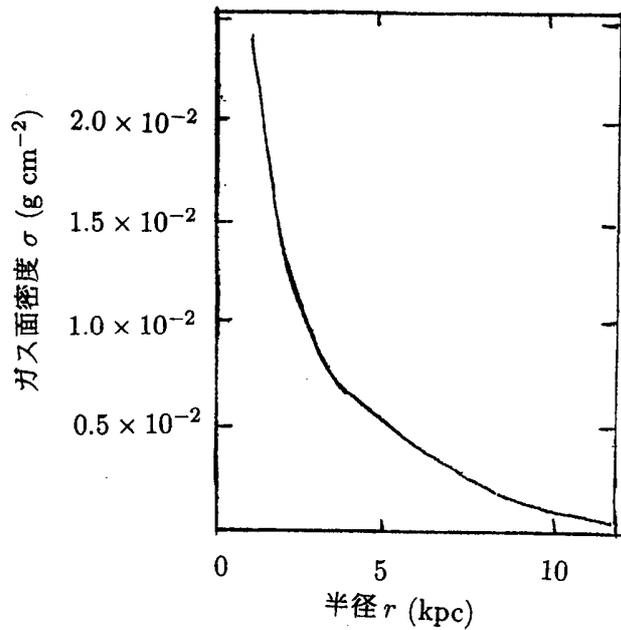


図 1

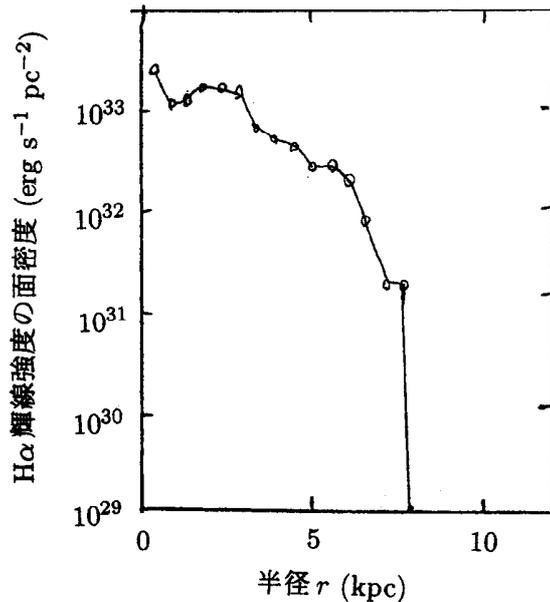


図 2

III-7 (選択)(天文学:恒星) (100 点)

恒星からの定常的な球対称質量放出（恒星風）について考える。恒星風は理想気体からなり、温度一定としよう。恒星風中では重力と圧力勾配による力のみが働くものとし、また、質量放出量は小さく、恒星本体の質量は一定とみなせるものとする。恒星本体の質量を M 、恒星中心からの距離が r である点での恒星風の圧力、密度、速度をおのこの $p(r)$, $\rho(r)$, $v(r)$ として以下の問に答えよ。

(1) この恒星風における質量保存の式と運動方程式を書け。

(2) 恒星風中の速度 v は

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \frac{\frac{2a^2}{r} - \frac{GM}{r^2}}{v^2 - a^2} \quad (\text{A})$$

で記述されることを示せ。ここで、 $a \equiv \sqrt{p/\rho}$ は音速、 G は重力定数である。

式 (A) の解のうち、右辺の分母がゼロとなる点を通る解は、その点で分子もゼロにならない。右辺の分子、分母ともにゼロとなる点を臨界点 (critical point) と呼ぶ。右図に、距離を臨界点の位置 r_{crit} 、速度を音速 a を単位にして、式 (A) のすべての解を示してある。臨界点を通る解には、距離 r が大きくなるにつれて、亜音速から超音速になる解と超音速から亜音速になる解があるが、実際の恒星風では前者が実現している。

(3) v と r に対して分離型の式となっていることを利用して、式 (A) を積分せよ。

(4) 問 (3) の積分形から、臨界点を通る解がどのように得られるか説明せよ。

(5) 太陽風は高温のコロナから流れ出す恒星風である。太陽風を等温とみなした場合、臨界点の位置は太陽半径の何倍か、また臨界点での流出速度はいくらか、以下の数値を用いて答えよ。

重力定数 $6.7 \times 10^{-8} \text{ dyn cm}^2 \text{ g}^{-2}$

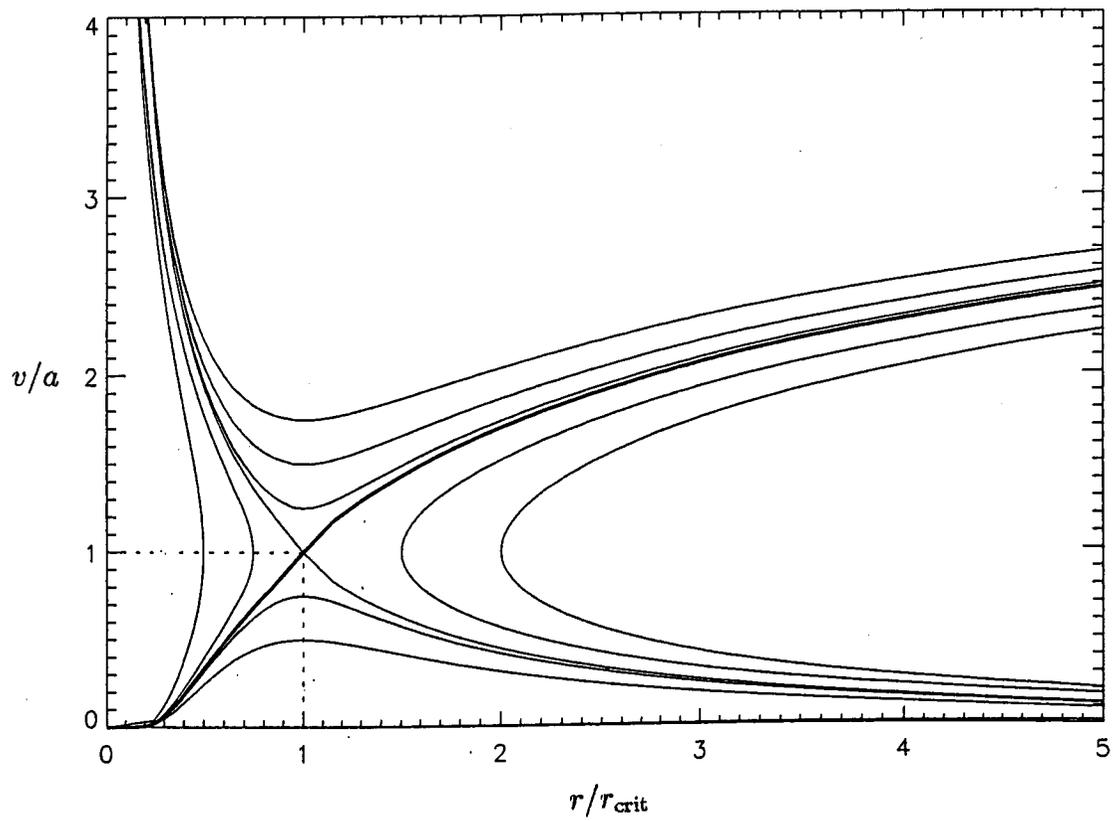
ガス定数 $8.3 \times 10^7 \text{ erg deg}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

平均分子量 0.60

太陽質量 $2.0 \times 10^{33} \text{ g}$

太陽半径 $7.0 \times 10^{10} \text{ cm}$

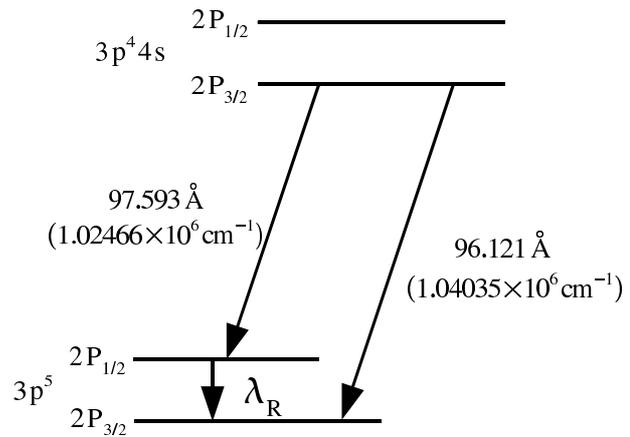
恒星風の温度 $1.0 \times 10^6 \text{ K}$



III-8 (選択) (天文学：太陽) (100点)

(注意) この問題の解答は、問題冊子の最終ページに綴じてある解答用紙を用いること。

皆既日食で見られる太陽コロナの温度が百万度を越える高温であることは、1940年代に入るまで誰にも気付かれなかった。コロナの分光スペクトルに見られる緑色輝線や赤色輝線などは、実験室では非常に弱いため長い間同定できなかつたので、未知の元素の線と考えられ、コロナに因んでコロナニウムと呼ばれる。これらの輝線が高階電離の Fe XIV イオンや Fe X イオンから出る輝線であることが判るきっかけとなったのは、実験室における極紫外線領域のデータであった。Edlen によって同定された極紫外線領域の輝線 (図 1) に着目し



て、Grotrian はこの Fe X イオンの基底 2 重項のレベル間の遷移に対応する波長が、ちょうどコロナニウムの赤色輝線の波長と合致することを 1939 年に初めて示したのである。

- (1) 図 1 の基底 2 重項レベル間の遷移による赤色輝線の波長 λ_R を計算せよ。
- (2) これら Fe X や Fe XIV イオンの電離ポテンシャルの平均値が約 300eV であることを用いて、コロナの電離平衡温度の近似値を有効数字 2 桁で計算せよ。但し、 $1\text{eV}=1.60\times 10^{-12}\text{erg}$ 、ボルツマン定数 $k=1.38\times 10^{-16}\text{erg}\cdot\text{K}^{-1}$ を用いよ。

皆既日食の時以外でも、コロナグラフを 3000m 級の高山に設置すれば、地上でコロナを観測できる。図 2 はコロナグラフの原理を示している (光軸方向に圧縮して作図している)。L1 は対物レンズで、L2 はリレーレンズ、L3 はコロナ像を最終焦点面 F 上に再結像するレンズである。この光学系では、L1 によって出来た明るい太陽本体の像を遮光円錐 C で除去して、コロナからの光だけが通過するようにしている。破線は太陽中心からの光線が遮光円錐 C の中心に結像し、実線はコロナ中のある 1 点からの光線が点 A に結像していることを示している。3 本ずつ描かれている破線と実線のうち、両端の 2 本はそれぞれ対物レンズ L1 の縁より少し内側を通る光線を示しており、真中の線はレンズ L1 の中心を通る光線を示している。また、L2 によって、対物レンズ L1 の像を絞り D (真中を円形にくり抜いた板) の位置に作り、対物レンズの縁やレンズ枠から生ずる散乱光を、この絞りによって除去している。

- (3) 図 2 で光線は途中の L2 の位置までしか書かれていないが、これを延長して、コロナ像上の 1 点 A が焦点面 F 上の A' 点に結像するまでの光路を解答用紙の図に実線で示せ。この際、L1 の縁より少し内側から出た光は、絞り D の開口の端を通過することに留意せよ。

コロナグラフを用いてコロナの分光スペクトルを観測すると、例えば Fe XIV の 5303Å 緑色輝線は、図 3 のように波長方向に広がった輪郭を示しており、この広がりからコロナの温度を求めることができる。

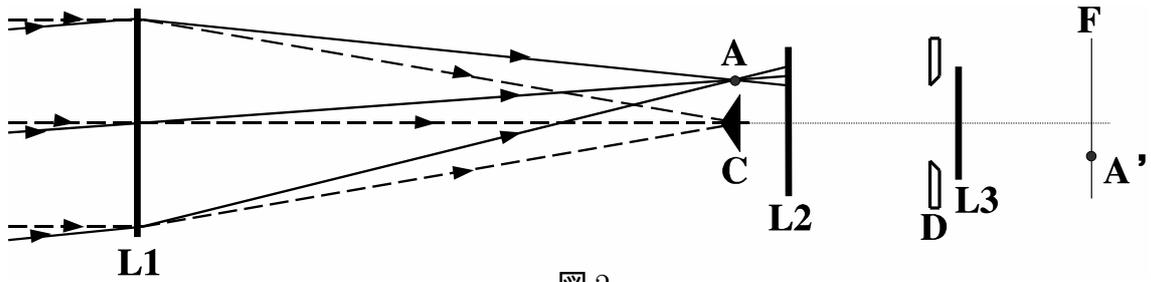


図 2

温度 T の熱平衡にある Fe XIV イオンプラズマの速度分布は等方的な Maxwell 分布をしていると考えられるが、今視線方向のみの運動を考えると、FeXIV イオン粒子が v と $v + dv$ との間の速度を持つ確率は、

$$f(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-mv^2/(2kT)} dv$$

で与えられる。但し、ここで m は鉄イオンの質量、 k はボルツマン定数である。

- (4) この分布における Fe XIV イオン粒子の平均運動エネルギーは $\frac{1}{2}kT$ で与えられることを示せ。

図 3 の Fe XIV 5303Å 輝線の輪郭の幅を広げる主たる要因は、望遠鏡の視線方向に沿って存在する Fe XIV イオン粒子の速度分布であると考えられる。すなわち、視線方向に沿って運動している Fe XIV イオン粒子から放射される光は、ドップラー効果によって、中心波長 $\lambda_0 = 5303\text{\AA}$ から運動速度に比例した量だけずれた波長で観測されるので、図 3 のようなガウス分布の線輪郭となる。

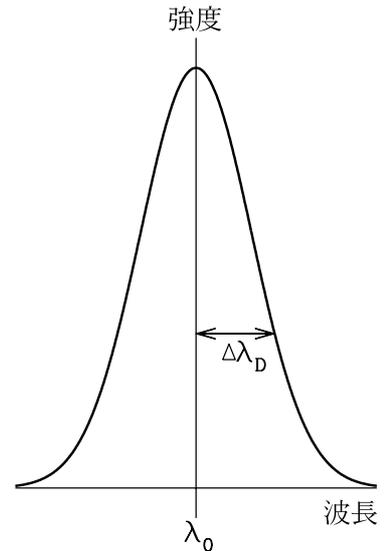


図 3: Fe XIV 5303Å 輝線の輪郭

- (5) 輝線の強度は図 3 のように輝線中心から外側に向けて弱くなるが、中心強度の $1/e$ にまで強度が落ちた波長での線輪郭幅 $\Delta\lambda_D$ をドップラー幅と呼んでいる。このドップラー幅が温度のみによって決まっていた時は、それらの関係は次の式で与えられることを示せ。但し c は光速である。

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda_0}{c} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2}$$

- (6) 核融合によって生成された太陽中心部の熱エネルギーは、放射と対流によって運ばれて、太陽表面(光球)では約 6 千度の熱力学的平衡状態が保たれている。同じ物理過程で、光球の外側に広がっているコロナを百万度まで加熱することができないことは明らかであるにもかかわらず、コロナが百万度に達しているのはなぜか。光球からコロナに、どのような物理過程によってエネルギーが輸送されてコロナを加熱しているかを答えよ。