

平成13年度大学院入学試験問題 I (3時間)

注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の用紙一枚に記入せよ。(裏面を用いてもよい。)
- (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

I-1 (量子力学) (100点)

ハミルトニアン H が

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

で与えられる1次元調和振動子を量子力学系として考える。従って、 q と p は交換関係 $[q, p] = i\hbar$ を満たすエルミート演算子である。

- (1) q と p を、別の演算子 a およびそのエルミート共役 a^\dagger の線形結合として

$$\begin{aligned}q &= z a + z^* a^\dagger \\p &= w a + w^* a^\dagger\end{aligned}$$

と表す。ここに z と w は複素数であり、 z^* と w^* はそれらの複素共役である。この時、ハミルトニアン H および交換関係 $[a, a^\dagger]$ が

$$H = \frac{1}{2} (a^\dagger a + a a^\dagger) \hbar\omega \quad \dots\dots\dots (A)$$

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad \dots\dots\dots (B)$$

となるための z と w に対する条件式を (A) と (B) それぞれについて書き下せ。更に、これらの条件式を満たす (z, w) として、 w が正の実数であるものを求めよ。

- (2) $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ を満たす H の規格化された固有状態 $|n\rangle$ と固有値 E_n ($E_0 < E_1 < E_2 < \dots$) を考える。基底状態 $|0\rangle$ は $a|0\rangle = 0$ を満たすが、この理由を述べよ。更に、状態 $|n\rangle$ を $|0\rangle$ と a^\dagger を用いて表し、固有値 E_n を求めよ。

以下では、この調和振動子ハミルトニアン H に (陽には時間に依らない) 小さな摂動項 h を加えた新しいハミルトニアン $H+h$ で記述される系を考える。なお、問(4) および (5) では、上の問(1)で得た、 q の a と a^\dagger による表現を用いること。

- (3) 新ハミルトニアン $H+h$ の n 番目の固有値が $E_n + e_n$ であるとする。摂動項 h の1次の近似では、固有値の変化分 e_n が

$$e_n = \langle n|h|n\rangle$$

で与えられることを示せ。

(4) $h = \lambda q^4$ (λ は定数) の場合に e_0 を求めよ。

(5) $h = g \delta(q)$ の場合に e_0 と e_1 を求めよ。ここに、 $\delta(q)$ はデルタ関数、 g は定数である。
必要ならば、以下の (i), (ii), (iii) を用いよ:

(i) デルタ関数の積分表示 (q が演算子の場合にも適用される)

$$\delta(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} e^{iuq}$$

(ii) 交換子 $[F, G]$ が c 数 (全ての演算子と交換可能な、ただの数) であるような演算子 F と G に対する公式

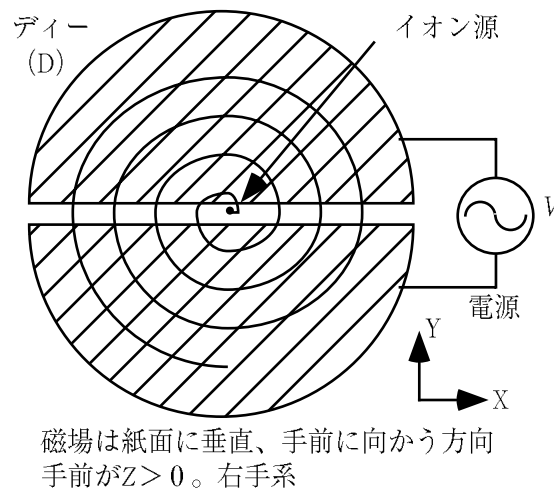
$$e^{F+G} = e^F e^G e^{-\frac{1}{2}[F,G]}$$

(iii) 積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}bu^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \quad (b > 0)$$

I-2 (電磁気・サイクロトロン) (100点)

サイクロトロンは1929年 E.O.Lawrence により発明され、1932年には加速に成功している。1932年のノーベル賞受賞はその発明と、それに付随する功績によるものである。荷電粒子加速器としてよく知られているこのサイクロトロンの加速原理について、および、加速中の荷電粒子を装置内に捕捉しておけるか考えてみよう。加速原理は直流一様磁場 $B (=B_z$ 、便宜上Z方向を向いているとする) により半径 r の円運動を行う荷電粒子 (運動量 p 、電荷 q 、質量 m) を磁場に直交する向きを持つ交流電場で加速するものである (図参照)。図中、斜線部分はその形状からディー (D) と呼ばれる中空の電極で、その内部では電場を感じないようになっていて、片方のディーからもう一方のディーに移る時に電場を感じるようになっている。ここでは相対論的效果を無視できる範囲で考えてよいとする。また、単一荷電粒子のみを考え、空間電荷効果などは無視する。磁場は軸対称性を仮定する。 ($B_\theta = 0, \frac{\partial B_z}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial B_r}{\partial \theta} = 0$)



- (1) 円運動を行う荷電粒子の角速度 $\omega (=v/r)$ を上記物理量で記述せよ。加速により運動量が増えるにつれ角速度 ω はどのように変化するか。
- (2) 交流電場は振幅 (電圧) V 、周波数 f 、位相 ϕ で記述できる。交流電場で加速するためにはこれらにどのような条件が必要になるか述べよ。
- (3) さて、ここからは軌道の安定性を検討するため、加速途中の状態を考察する。従って、運動量一定の定常状態を仮定し、加速を考えなくてよい。荷電粒子がZ軸方向に運動量を持っているとZ方向に一様な磁場による力はZ成分を持たないため、そのままではZ軸方向に走り去ってしまい、安定な加速ができない。このため、 B_z にわずかな半径依存性を持たせることが行われている。この磁場の変化を記述するため

$$n \equiv -\frac{r}{B_z(r)} \frac{\partial B_z(r)}{\partial r} \quad (\text{A})$$

を定義し、 n 値とよぶ。 B_z が半径依存性を持つと B_r が生じてくる。この場合でも $B_r = 0$

となる磁場中心面が存在し、その Z 座標を原点とする。

$$\nabla \times B = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r B_\theta}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \right) = 0 \quad (\text{B})$$

に着目すると、 $B_r=0$ の磁場中心面 ($Z=0$) 近傍での B_r を B_z で表すことができ、以下のように表すことができる。

$$B_r = \frac{\partial B_r}{\partial z} z = \frac{\partial B_z}{\partial r} z \quad (\text{C})$$

この磁場 B_r により円運動する荷電粒子がうける Z 方向の力を求めよ。また、係数に上記 n 値、 ω を用いて Z 方向の運動方程式を書け。 $\left(\frac{d^2 z}{dt^2} = (\text{constant})z\right)$ の形にする。

- (4) 上記 Z 方向の運動方程式の非発散解 (振動解) の条件を求めよ。それはどのような磁場分布となるか?
- (5) このように磁場が完全に一様ではなく、中心軸を持つようにした場合、円運動の中心は必ずしもこの中心軸と一致しなくなる。この中心軸を中心とし、半径 R を持つ円は運動量 mv を持つ粒子の平衡軌道と呼ばれる。ここで、実際の粒子の軌道半径を r とし、 $\xi \equiv (r - R)/R$ を定義する。(C) 式同様、係数に上記 n 値、 ω を用いて $r=R$ 近傍での磁場 $B_z(r)$ を $B_z(R)$ からの増分で記述せよ。
- (6) 平衡軌道からのずれ ξ に対応する半径方向の力は次のように遠心力とローレンツ力の差により与えられる。

$$\Delta F_r(r) = \frac{mv^2}{r} - qvB_z(r) \quad (\text{D})$$

$v = R\omega$ である粒子の平衡軌道からのずれを考えていることに注意して、(3) と同様に、 $\Delta F_r(r)$ を $q, R, \omega, B_z(R), \xi, n$ で表し、係数に上記 n 値、 ω を用いてこの磁場変化による の運動方程式を求めよ。

- (7) 上記 ξ 方向の運動方程式の非発散解 (振動解) の条件を求めよ。 Z 方向および ξ 方向ともに非発散解となる条件があれば示せ。

I-3 (熱力学) (100点)

1. 図1は等温圧縮・膨張、断熱圧縮・膨張の4つの過程を適当に組み合わせたカルノーサイクルである。このサイクルを温度 (T) - エントロピー (S) 平面で描け。そしてこのサイクルの効率、すなわち、(このサイクルで系がする仕事) / (高温熱源から系が得た熱エネルギー) を導き、その効率が温度 T_A 、 T_C の2つの熱源間で運転する熱機関の最大値であることを示せ。
2. 図2のような理想気体のサイクルの効率を求めよ。この効率と温度 T_E 、 T_G の2つの熱源間で運転するカルノーサイクルの効率とを比較し、異なる場合にはその理由を述べよ。
3. 異なった断熱過程の圧力-体積曲線が交叉しないことを熱力学第2法則に基づいて示せ。

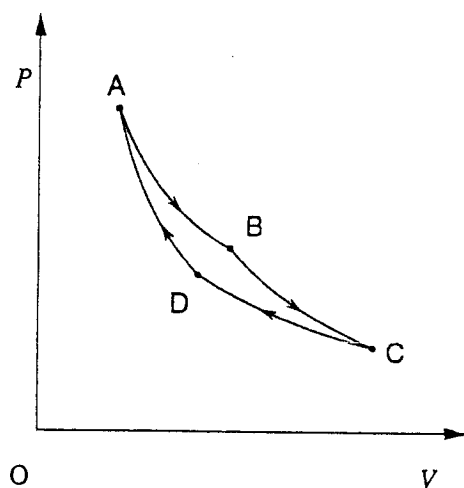


図1

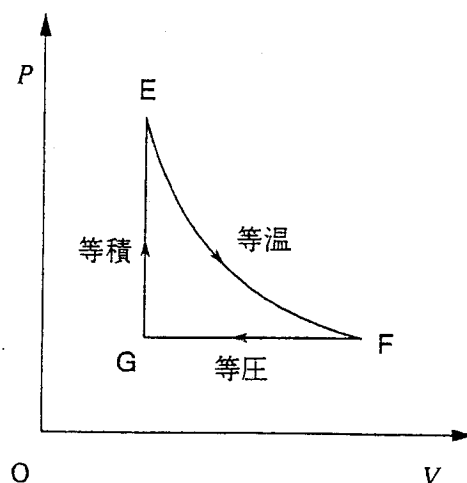


図2

平成 13 年度大学院入学試験問題 II (3 時間 30 分)

注意

- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の用紙枚に記入せよ。(裏面を用いてもよい。)
- (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

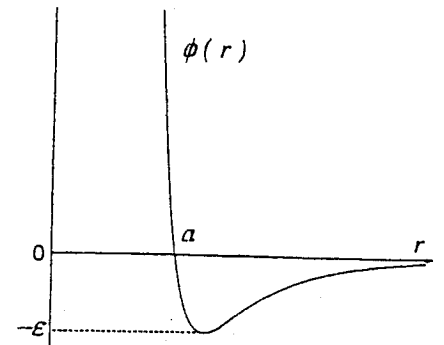
II-1: 統計力学 (100 点)

古典力学に従う N 粒子系を考える。体系は体積 V の容器内にあり全エネルギーは次のように運動エネルギーとポテンシャルエネルギーに分けられる。

$$H = K + U$$

$$K = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2m} (p_{xj}^2 + p_{yj}^2 + p_{zj}^2)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \phi(|r_i - r_j|)$$



この系の統計的性質は 分配関数

$$Z(N, T, V) = \frac{1}{N! h^{3N}} \int_V \cdots \int_V dr_1 \cdots dr_N \int \cdots \int dp_1 \cdots dp_N \exp\left(-\frac{1}{k_B T} H\right)$$

を計算することによって記述できる。ここで $\phi(r)$ は 2 体相互作用ポテンシャルであり、 h はプランク定数である。

- (1) 分配関数における二つの因子 $\frac{1}{N!}$ と $\frac{1}{h^{3N}}$ の存在は 量子力学から正当化されるのであるが、その物理的意味を述べよ。また相互作用のない理想気体における自由エネルギーを具体的に計算せよ。そして状態方程式と内部エネルギーを求めよ。
- (2) 図に示すような相互作用のある場合の近似計算を考えよう。まず 2 体ポテンシャルは近距離 $r < a$ では強い斥力部分を持つので、各粒子の動ける実効的体積は

$$V_{\text{eff}} = V - Nv_0$$

のように減少する。ここで $v_0 (\sim a^3)$ は 一粒子あたりの排除体積である。次に 2 体ポテンシャルは遠距離 $r > a$ で弱い引力部分を持つので、全ポテンシャルエネルギー U の引力部分は

$$U_{\text{ap}} = -A\epsilon v_0 N^2 / V$$

と近似できる。ここで $-\epsilon$ は $\phi(r)$ の最小値であり、 $n = N/V$ は 密度である。 A は 1 の程度の定数であるが以下では簡単のため 1 とおく。

上記二つの近似の物理的意味を述べよ。そして分配関数の表式で、体積を V_{eff} にポテンシャルエネルギーを U_{ap} に置き換えて自由エネルギーを計算すると次式が得られることを示せ。

$$F = F_{\text{ideal}} - Nk_B T \log(1 - v_0 n) - \epsilon v_0 N^2 / V$$

ここで F_{ideal} は 理想気体系での自由エネルギーである。

- (3) 上で述べた近似理論により van der Waals の状態方程式が導出されることを示せ。また内部エネルギー E 、定積比熱 C_V 、等温圧縮率 $K_T = (\partial n / \partial p)_T / n$ (ここでは p は圧力) を計算せよ。

II-2 (密度関数) (100点)

解析力学では、最小作用の原理から運動方程式が導かれる。即ち、作用とはラグランジアン
の時間に関する定積分であり、最小化は変分法を用いて実行される。このような最小化の
手続きは、解析力学に限らず、物理学の様々な分野で用いられている。

ここでは、固体壁に付着している液体の密度関数 $\rho(z) \geq 0$ を取り上げる。液体の密度は
固体壁面 ($z=0$) においては $\rho(0) = \rho_0$ であるが、壁からの距離 $z \geq 0$ が大きくなるにつれ
て単調に減少する。簡単のため、液体の密度は z に垂直な方向へは一様であると考え。こ
のとき $\rho(z)$ は、次式で表わされる積分 $I(\{\rho\})$ を、 ρ に関して変分することにより求められ
ると仮定する。但し、 K は正の定数である。

$$I(\{\rho\}) = \int_0^{\infty} \left[\frac{K}{2} \left(\frac{d\rho}{dz} \right)^2 - W(\rho) \right] dz \quad (\text{A})$$

ここで、被積分関数の第一項は解析力学における運動エネルギーに対応し、第二項はポテ
ンシャル・エネルギーに対応すると考えることができる。

- (1) (A) 式を ρ に関して変分することにより、解析力学におけるラグランジェの方程式 (即
ち、ニュートンの運動方程式) に対応する、 $\rho(z)$ の微分方程式を導出せよ。
- (2) 次に、(1) で得られた方程式から出発して、解析力学におけるエネルギー保存則に対応
する、 $\rho(z)$ の微分方程式を導出せよ。但し、全エネルギーに対応する量を λ と表わせ。
- (3) 特別な場合として、 $\lambda = 0$ とおく。さらに、

$$W(\rho) = -W_0 \rho(z)^2 [\rho(z) - \rho_s]^2 \quad (\text{B})$$

と仮定する。ここに、 W_0 は正の定数、 ρ_s も正の定数で、 $\rho_s > \rho_0 \geq \rho(z) \geq 0$ を満た
す。このとき、(2) で得られた微分方程式を解いて $\rho(z)$ を求めよ。また、その概形を
実線を用いて図示せよ。但し、曲線の形がよくわかるように、 $z < 0$ の範囲も補助的
に点線を用いて描け。

- (4) $\rho(z)$ を z について積分した量を被覆度 Γ と呼ぶ。すなわち、

$$\Gamma = \int_0^{\infty} \rho(z) dz \quad (\text{C})$$

前問で得られた $\rho(z)$ について被覆度 Γ を求めよ。

II-3 (電磁気学・鏡像法) (100点)

- (1) 真空中に電荷密度 ρ の電荷を分布させた場合、真空の誘電率を ϵ_0 として、静電ポテンシャル ϕ はラプラス方程式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{A})$$

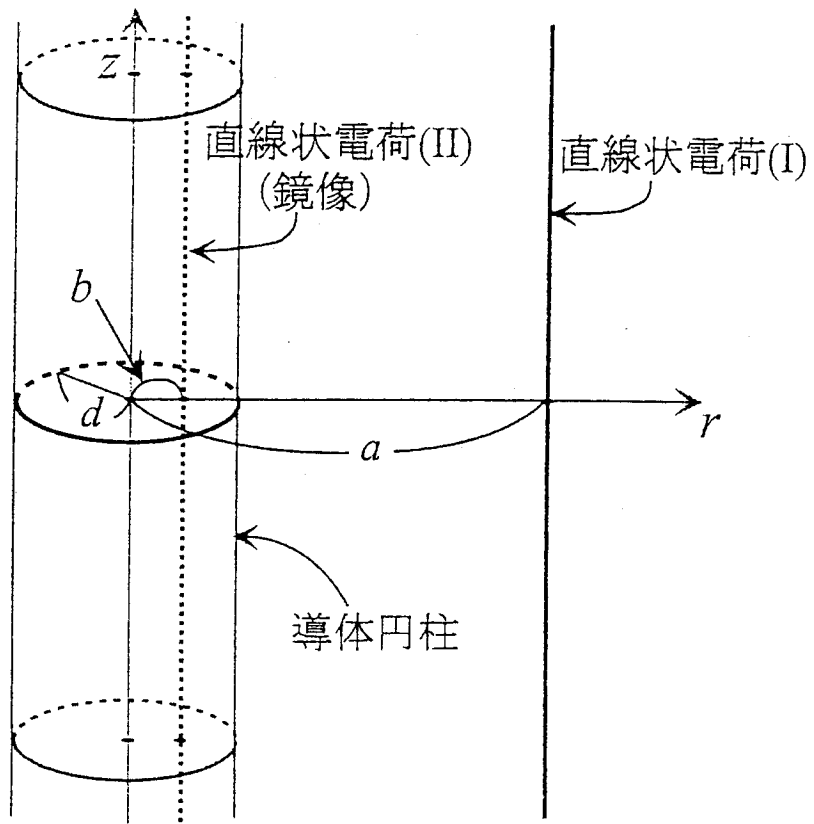
の解として与えられる。真空中に単位長さあたりの電荷が λ の無限に長い一様な直線状電荷を z -軸上に置いたとき、そのまわりにできる静電ポテンシャル ϕ は

$$\phi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log r + c$$

で与えられる。ただし、ここで $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ と定義した。また、 c は定数である。このときの電場 E を求めよ。また、この与えられた電荷分布、および、静電ポテンシャル ϕ に対して、 $r < r_0$ で長さが l の z -軸に平行な円柱状領域で、式 (A) の両辺をそれぞれ体積積分した量が等しくなることを、ガウスの定理を用いて示せ。

図のように、 $r = 0$ の直線を中心とする半径が d の無限に長い導体円柱をおき、単位長さあたり λ' の電荷を帯電させる。この導体円柱に平行に、単位長さあたりの電荷が λ の直線状電荷 (I) を $r = a$ のところにおく。この状態での導体円柱外部の静電ポテンシャルを求めたい。そのために、図中に示したように、導体円柱内部の $r = b$ の位置に単位長さあたりの電荷が λ'' の直線状電荷 (II) を導体円柱の代わりに鏡像としておくことを考える。

- (2) 導体円柱を鏡像 (II) に置き換えたとき、鏡像 (II) によって作られる電場が導体円柱外部の元の電場を与えるように鏡像を置く位置や鏡像の持つ電荷の大きさを決める。今の場合、導体円柱表面に現れる単位長さあたりの電荷 λ' と、鏡像 (II) の線電荷密度 λ'' は等しくなければならない。このことを示せ。
- (3) $r \rightarrow \infty$ の極限で静電ポテンシャルが一定値に近づくようにするには、 $\lambda'' (= \lambda')$ をどのように選べばよいか、答えよ。
- (4) 前問の λ'' の値に対して、鏡像 (II) によって作られる電場が元の導体円柱外部の電場を正しく与えるように b の値を求めよ。
- (5) 導体円柱にはたらく静電気力は、導体円柱を鏡像 (II) に置き換えたときに鏡像 (II) にはたらく静電気力に等しいことを示せ。
- (6) 導体円柱が問 (3) の λ' の値に帯電している状態で、直線状電荷 (I) を $r = a$ の位置から $r = a'$ の位置まで十分にゆっくりと移動させる。この移動で、直線状電荷 (I) の単位長さあたりになされた仕事を求めよ。



図

平成13年度大学院入学試験問題 III (3時間)

注意

- (1) 問題は III-1 から III-6 まで全部で6問ある。これらから3問を選択せよ。
- (2) 選択した3つの問題の解答はそれぞれ別の用紙一枚に記入せよ。(裏面を用いてもよい。)
- (3) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

III-1 (選択:物理数学) (100点)

ポテンシャル $V(x)$ のもとでの一次元直線 $(-\infty < x < \infty)$ 上の質量 m の粒子系に対するエネルギー E の定常状態の Schrödinger 方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi \quad \dots\dots\dots (I)$$

で与えられる。以下では、ポテンシャル $V(x)$ として

$$V(x) = V_0 (1 - e^{-x/a})^2$$

を考える。ここに、 V_0 と a は共に正の定数である。

- (1) このポテンシャル $V(x)$ を図示せよ。また、この系の束縛状態のエネルギー固有値 E はどの範囲にあるか?

さて、今のポテンシャル $V(x)$ に対して (I) 式の Schrödinger 方程式は、調和振動子や水素原子の系と同様の手法で近似無しに解くことが出来る。以下、順を追ってこれを実行しよう。

- (2) まず、変数 x の代わりに

$$y = b e^{-x/a} \quad (b \text{ は正の定数})$$

で与えられる新変数 $y (> 0)$ を取ることにより、Schrödinger 方程式 (I) を

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d\psi}{dy} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{A}{y} - \frac{B}{y^2} \right) \psi = 0 \quad \dots\dots\dots (II)$$

の形にすることが出来る。この時、変数変換に現れる定数 b 、および、微分方程式 (II) 内の定数 A と B を求めよ。解答は、 \hbar, m, a, V_0, E を用いて与えよ。

次に、微分方程式 (II) を y が大きな領域で考えるために、 y の負幂が掛かった項を単純に落とすと、 $d^2\psi/dy^2 - (1/4)\psi = 0$ となる。この解として $y \rightarrow +\infty$ で発散しないものを取ると $\psi = (\text{定数}) \times e^{-y/2}$ である。従って、(II) を y の全領域 $(0 < y < \infty)$ で解く際に、この無限遠における大まかな振る舞いを考慮して、

$$\psi(y) = e^{-y/2} f(y)$$

で与えられる新未知関数 $f(y)$ を考えると、微分方程式 (II) は

$$y \frac{d^2 f}{dy^2} + (1-y) \frac{df}{dy} + \left(A - \frac{1}{2} - \frac{B}{y} \right) f = 0 \quad \dots\dots\dots (III)$$

となる。

(3) 新微分方程式 (III) の解が

$$f(y) = y^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k \quad (a_0 \neq 0) \quad \dots\dots\dots (IV)$$

なる冪級数で与えられるとして (III) に代入することにより、

(3-1) 隣り合う係数 a_k と a_{k+1} の間の関係を求めよ (A, B, λ を用いて表せ)。

(3-2) 更に、初項の冪 λ を求めよ (A, B を用いて与えよ)。波動関数の規格化積分の $y \sim 0$ ($x \rightarrow \infty$) における有限性より、 $\lambda > 0$ が要求されることに注意せよ。

さて、前問 (3) で求めた a_k の漸化式より、

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \sim \frac{1}{k} \quad (k \rightarrow \infty)$$

であることが分かるが、これは、級数 (IV) が無限級数なら f の $y \rightarrow \infty$ での振る舞いは $f \sim e^y$ となり、波動関数 ψ は規格化不能であることを意味する。従って、級数 (IV) は有限の k で切れた多項式でなければならない。

(4) n をある非負の整数 ($n = 0, 1, 2, \dots$) として、『級数 (IV) が $k = n$ の項で切れる』、即ち、

$$a_k = 0 \quad (k \geq n+1) \quad \text{但し} \quad a_n \neq 0$$

を要求すると、問 (3) の結果より A と B の間に関係が付き、この関係と問 (2) で求めた A と B の表式より、エネルギー固有値が n の関数として求まる。このエネルギー固有値 E_n を \hbar, m, a, V_0, n を用いて与えよ。

(5) 前問 (4) のレベル数 n には上限があることを説明せよ。また、この系に少なくとも 1 つの束縛状態が存在するためには、 \hbar, m, a, V_0 は如何なる条件を満たす必要があるか?

III-2 (選択：実験物理) (100点)

(1) 回路：

図1のようなインダクタンス L, M 及び、キャパシタンス C でできた回路の共振周波数をすべて求め、そのときの電流 i_1 と電流 i_2 の比を求めよ。

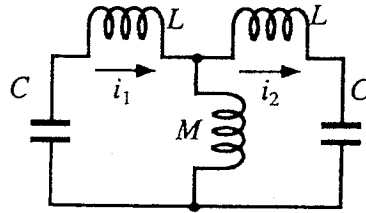


図1

(2) X線分光 - 1：

X線分光の主な目的は、

- (i) スペクトルを解析することにより、発光体、吸収体の微視的構造を明らかにする
- (ii) スペクトルの特色を利用して、物質の組成の分析をする

ことである。原子の発光スペクトルの解析から原子構造が解明されたことはよく知られており、(i) では、特性スペクトル（ダイヤグラムライン）の帰属、各殻の寿命の決定等および殻間の電子のスピン交換相互作用など複雑な現象の解明のため精密な分光器が必要となっている。

X線スペクトル $I(\omega)$ の形は、輻射原子を時刻 t での変位が $x(t)$ の減衰振動子として扱う事により次式より求められる。

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i\omega_0 t} \quad (A)$$

x_0 は振動子の振幅の初期値、 ω_0 は角振動数、そして γ は減衰の速さを表す定数である。このような振動子によって放出されるX線のスペクトルの形 $I(\omega)$ は、式 (A) の実数部を時間 t から角振動数 ω へのフーリエ変換をすることにより得られる。その式を求め、おおよその形状を示せ。

(3) X線分光 - 2：

X線分光法の原理は、極めて単純である。入射X線が完全に平行な光で拡がりが無視でき種々の波長を含んでいるとする。この完全に平行な種々の波長のX線が角度 θ で面間隔 d の結晶面に入射する（図2参照）と Bragg 条件 ($2d \sin \theta = \lambda$) を満たす時に波長 λ のX線だけが反射する。角度 θ を測定することにより波長 λ が決定される。しかしながら、実際には、入射光はある角

度拡がり $\Delta\theta$ を持っている、単色光でも波長拡がりをもっているように観測される。この値が分光器の分解能を決定する。

- (a) 有限の大きさを持つ光源から角度拡がり $\Delta\theta$ を小さくする目的で長さ l の距離をおいて幅 w の2枚のスリットを配置したとき (但し $l \gg w$ とする) (図2参照)、スリットによる角度拡がりの強度分布を θ の関数として求めよ。実際に観測されるX線スペクトルは、この強度分布とX線スペクトルとの convolution である。
- (b) 今、 $l = 100 \text{ mm}$, $w = 50 \mu\text{m}$ ($1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$) のスリットを通過した波長 $\lambda = 1.92 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$) のX線が Bragg 条件を満たして Si の結晶 (面間隔 $d = \frac{3.84}{2} \text{ \AA}$) に入射するとき、このスリットにより実際に観測されるX線の波長拡がり $\Delta\lambda$ を求めよ。

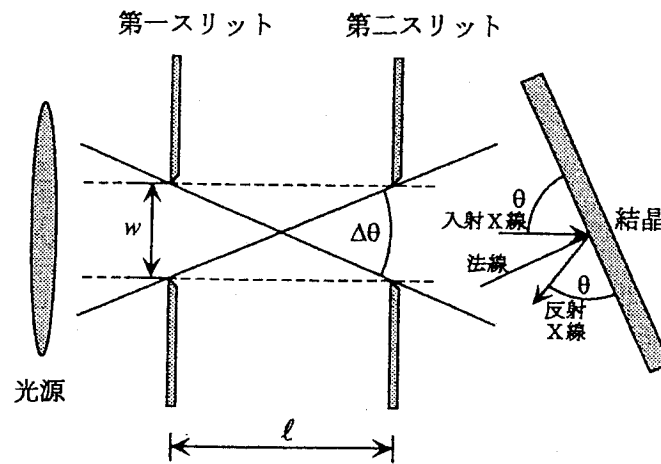


図2 スリットによる角度分散

III-3 (選択：チェレンコフ光) (100点)

真空中で等速運動する電荷は輻射しない。しかし、透明な媒質（誘電率 ϵ 、透磁率 μ ）中を高速で等速運動（速度 \mathbf{v} ）する荷電粒子（電荷 e ）がつくる場から電磁波が輻射されることがある。このことを考察するために、外部電荷密度 ρ 、外部電流密度 \mathbf{J} が存在するときのマックスウェル方程式から出発しよう。

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} &= \rho, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \end{aligned}$$

今の場合、外部電荷密度と外部電流密度は、デルタ関数 $\delta(x)$ を用いて、次式で与えられる。

$$\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \quad \mathbf{J} = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$$

ここで、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} とスカラーポテンシャル ϕ を導入しよう。

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi$$

また、ローレンツの条件

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

を課すことにしよう。

1) まず、ポテンシャル \mathbf{A} と ϕ に関する次式が得られることを示せ。

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -e\mu\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \quad (\text{A})$$

$$\Delta \phi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\left(\frac{e}{\epsilon}\right)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \quad (\text{B})$$

2) 次に、(A)、(B)式の両辺の空間座標 \mathbf{r} についてフーリエ変換を行なって、各ポテンシャルの波数 \mathbf{k} のフーリエ成分、 $\mathbf{A}_{\mathbf{k}} \equiv \iiint \mathbf{A} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ と $\phi_{\mathbf{k}} \equiv \iiint \phi \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ に関する方程式を導け。

3) $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ と $\phi_{\mathbf{k}}$ の時間依存性がともに $\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{v}t)$ で与えられるとして、 $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ と $\phi_{\mathbf{k}}$ を求めよ。

4) 上の3)の結果から、 $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ と $\phi_{\mathbf{k}}$ は $|\mathbf{k}| = (\epsilon\mu)^{1/2}(\mathbf{k}\mathbf{v})$ のとき発散するが、輻射強度は有限にとどまる事が知られている。この時、輻射される電磁波がチェレンコフ光である。チェレンコフ光が輻射されるときは荷電粒子の速さ v が媒質中の光速を越えていることを示し、チェレンコフ光の輻射方向と粒子の速度 \mathbf{v} の方向とのなす角 θ を求めよ。

5) チェレンコフ光は偏光している。チェレンコフ光の波数 \mathbf{k} の電場ベクトル $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ の方向は \mathbf{k} に垂直で \mathbf{k} と \mathbf{v} のつくる平面内にあることを示せ。

III-4 (選択：力学・波) (100点)

x 方向に無限に長い、一定の線密度 ρ をもったひもを考える。ひもの張力 T は一定とし、重力ははたらいっていないものとする。

- (1) ひもは z -方向にしか振動しないものとし、その z -方向の変位を $Z(t, x)$ と記述することにする。ひもの変位が微小であるとする、ひもの振動を記述する方程式は

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] Z(t, x) = 0 \quad (\text{A})$$

となる。このとき、定数 c^2 を求めよ。

以下では引き続き、微小振動を仮定する。

- (2) f, g を任意関数として

$$Z(t, x) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (\text{B})$$

が、このひもの運動の解であることを示せ。また、時刻 $t=0$ で

$$Z(0, x) = h(x), \quad \left. \frac{\partial Z(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

となる場合の解を求めよ。

- (3) 式(B)は方程式(A)の一般解である。更に、 $x = +\infty$ から $x = -\infty$ の方向に伝播する波が存在しないという条件を課すと、この一般解がどのように制限されるか述べよ。

図1のように、端を固定されたバネにつながれた質量 m のおもりを考える。この状態で、おもりを z -方向に振動させると角振動数 ω_0 で単振動する。図2のように線密度 ρ の無限に長いひもをこのおもりの左右につなぎ両側から張力 T で引く。ただし、ひもがおもりにつながれている位置は $x = \pm x_0$ である。これまでの設問と同様、 ρ, T は一定で、微小振動を考え、重力は無視できるものとする。この状況で、ひも、おもり、両方が静止した状態から、時刻 $t=0$ に、おもりに z -方向の初速度 v を与えた。

- (4) 仮に、ひもの変位 $Z(t, x)$ が既知のものであるとして、おもりがひもから受ける力を表わせ。更に、この力の表式を用いて、おもりの z -方向の変位 $q(t)$ の満たすべき運動方程式を書け。
- (5) 今、考えている状況では、ひもの運動には無限遠方からおもりに向かう内向きの波が存在しない。このことを用いて、前問(4)で得た $q(t)$ の満たすべき運動方程式を $Z(t, x)$ を含まない方程式に書き換えよ。
- (6) 前問(5)で得られた $q(t)$ の運動方程式を $T < mc\omega_0$ の場合に解き、 $t > 0$ でのおもりの変位を求めよ。
- (7) この系では、摩擦を考慮していないにもかかわらず、おもりの振動が減衰する。失われたおもりの振動のエネルギーはどこへ行ったのかを答えよ。

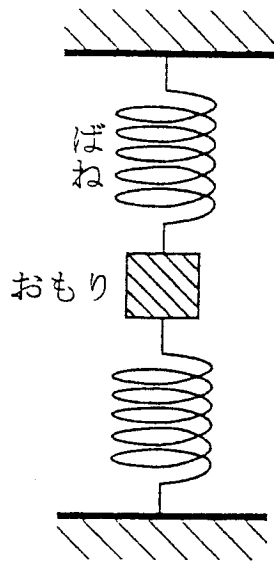


図 1

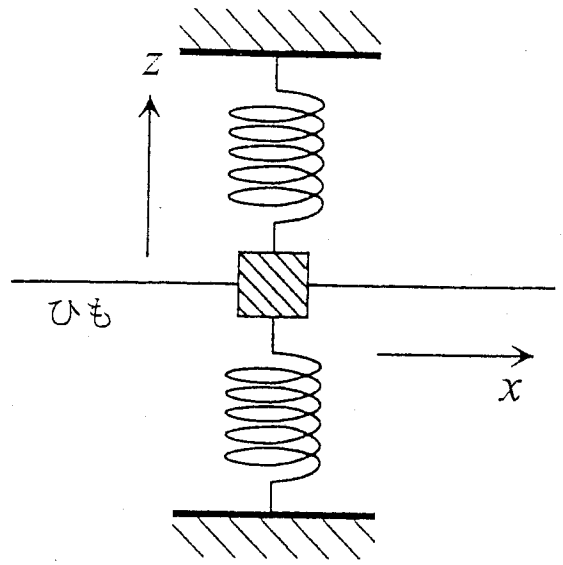


図 2

III-5 (選択): 量子力学 (100点)

一次元の量子的調和振動子を考える。この系のハミルトニアンは

$$H(t) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}k(t)x^2, \quad (\text{A})$$

で与えられる。簡単のためプランク定数 \hbar と質量 m が 1 となる単位系をとる。ここでバネ定数 $k(t)$ が時間的に変化するものとする。

- (1) 次のような x に関してガウス型の波動関数はシュレジンガー方程式の解 となることを示せ。

$$\psi(x, t) = f(t)^{-1/2} \exp \left[i \frac{f(t)}{2f(t)} x^2 \right]$$

ここで $f(t)$ は 時間に依存した複素関数であり 次の式に従う。

$$\ddot{f}(t) + k(t)f(t) = 0$$

なお、

$$\dot{f}(t) = \frac{d}{dt}f(t), \quad \ddot{f}(t) = \frac{d^2}{dt^2}f(t)$$

である。

- (2) 次の時間変化を考えよう。

$$\begin{aligned} k(t) &= \omega_0^2 & (t < 0) \\ &= \omega_1^2 & (t > 0) \end{aligned}$$

$t < 0$ では 系は基底状態にあるとする。 $f(t)$ が $t < 0$ でどのような関数形であれば基底状態となっているか答えよ。また $t = 0$ で波動関数は連続とすると、 $t > 0$ でどのような波動関数がえられるか答えよ。

- (3) 上記設問 (2) の場合 エネルギーの期待値 $E(t) = \langle H(t) \rangle$ が時間的にどのように変化するか計算せよ。 ガウス積分の公式 $\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2) = \sqrt{\pi/a}$ を使え。

III-6 (選択：波の伝播) (100点)

質量 m 、エネルギー E をもつ粒子が1次元ポテンシャル $V(x)$ のもとで運動するとき、その粒子の波動関数 $\psi(x)$ は次式 (A) で与えられる。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi \quad (\text{A})$$

さて、ここで波動関数 $\psi(x)$ とその x に関する1次導関数 $d\psi/dx$ を成分とするベクトル、

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \psi \\ d\psi/dx \end{pmatrix} \quad (\text{B})$$

を導入すると、(A) 式は次のような1階の微分方程式に書き直すことができる。

$$\frac{d}{dx}\Phi(x) = S(x)\Phi(x) \quad (\text{C})$$

ここで、 $S(x)$ は2行2列の行列である。

(1) 行列 $S(x)$ を求めよ。

(2) まず、ポテンシャル $V(x)$ が一定値 V_0 をもつ場合を取り上げる。このとき、 $\Phi(x)$ の $x = x_1$ での値 $\Phi(x_1)$ と $x = x_2$ での値 $\Phi(x_2)$ は、行列要素が $x_2 - x_1$ の関数である2行2列の行列 $M(x_2 - x_1)$ を用いて、

$$\Phi(x_2) = M(x_2 - x_1)\Phi(x_1) \quad (\text{D})$$

と結び付けられることを示せ。また、 $E > V_0$ の場合について、 $M(x_2 - x_1)$ の各成分を求めよ。ヒント：波動関数 $\psi(x)$ は、 x 軸の正の方向に進む波と負の方向に進む波の重ね合わせとして、一般的に記述できる。

(3) 次に、 $0 < x < a$ で $V(x) = V_0 < 0$ 、 $x \leq 0$ と $x \geq a$ で $V(x) = 0$ である井戸型ポテンシャルを想定する。今、エネルギー $E > 0$ の粒子が振幅 A の平面波として、 $x \leq 0$ の領域を x 軸の正の方向に進み、このポテンシャルによって散乱される場合を考える。このとき反射波は、 x 軸の負の方向に進む振幅 B の平面波として表わされ、一方、透過波は、 $x \geq a$ において、振幅 F で x 軸の正の方向に進む平面波として表わされる。この場合の反射係数 B/A および透過係数 F/A を求めよ。また、 $|F/A| = 1$ 、即ち完全透過になるための条件を求めよ。ヒント：ポテンシャルが不連続でも、 $\Phi(x)$ は連続であることに注意せよ。

(4) ポテンシャル $V(x)$ が x に依存して変動するときには、特殊な場合を除いて解析的に $\Phi(x)$ を求めることは困難であるが、本問の行列を用いる方法を応用して、近似解を求めることは可能である。 $x \leq 0$ と $x \geq a$ で $V(x) = 0$ であり、 $0 < x < a$ で変動する任意のポテンシャル $V(x)$ によって、(3) と同様に振幅 A の平面波が散乱される場合の、反射係数 B/A および透過係数 F/A を計算する方法を考案せよ。