

# 平成 12 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

## 注意

- (1) 問題 I-1、I-2、I-3 の解答はそれぞれ別の用紙一枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
  - (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。
- 

## I-1 (物理定数) (100 点)

以下の定数のおおよその大きさ (桁だけでもよい) を書き、それぞれの定数の測定が可能な方法 (概数が知ればよい) を 1 つずつあげ、原理を簡単に述べよ。但し、被測定量以外の定数は知られているものとせよ。また、異なった定数に対して同じ測定法が適用できる場合には、必ず異なった方法を述べること。

- (1) プランク定数
- (2) ボルツマン定数
- (3) アボガドロ数
- (4) 電子の電荷
- (5) 電子の質量
- (6) 万有引力定数

## I-2 (量子力学) (100 点)

最近、磁場を用いて真空中のある空間の中に閉じ込めた(トラップした)アルカリ気体でボースアインシュタイン凝縮(BEC)を起すことに成功した。BECとはある量子状態に多数の粒子が凝縮している状態のことである。アルカリ気体のBECにおいて気体は十分希薄であり、原子間の相互作用が無視できるとすると、原子が凝縮する状態を表わす波動関数はシュレディンガー方程式に従う。また、重力の影響は考えないことにする。なお、以下の計算で必要ならば積分公式

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}/2, \quad \int_0^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} = \sqrt{\pi}/4$$

を用いよ。

- (1) 最初に次元の問題を考える。 $m$  をアルカリ原子の質量とする。 $(1/2)m\omega^2 x^2$  と近似できるポテンシャルで原子を  $x = 0$  近傍にトラップしているとする。波動関数  $\psi(x)$  が従うシュレディンガー方程式および固有値方程式を書け。次に

$$\psi(x) = C \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right) \quad (\text{A})$$

と置いて  $x_0$  を適当に選べば(A)式の波動関数は固有値方程式を満足することを示せ。また  $x_0$  を求めよ。ここで  $C$  は規格化定数である。 $C$  も求めよ。(A)式は節を持たないことから明らかのように基底状態の波動関数である。BECでアルカリ原子はこの状態に凝縮する。したがって、凝縮した原子の密度分布は

$$C^2 \exp\left(-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right) \quad (\text{B})$$

に比例する。

- (2) (A)式をフーリエ変換して基底状態の波数表示  $\psi(k)$  を求めよ。次にこの  $\psi(k)$  を用いて基底状態での原子の速度  $v$  の二乗平均  $\langle v^2 \rangle$  を計算せよ。
- (3) BECの観測はトラップポテンシャルをゼロにして、アルカリ気体の分布が適当に広がった後行う。トラップポテンシャルをゼロにする時間は非常に短いのでその間に波動関数は変化しないものとして、その後の時間発展を考える。時間  $t$  経過したあとの波動関数を求めよ。また、気体の広がりを表わす  $x_0$  と規格化定数  $C$  はともに時間変化するが、凝縮した原子の密度分布は(B)式と同じ関数形になることを示せ。

- (4) つぎに二次元のポテンシャル  $\frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2)$  でトラップされたアルカリ気体の BEC を考える。ここで  $\omega_x > \omega_y$  とする。このとき、原子が凝縮する基底状態の波動関数はどう書けるか。また、トラップポテンシャルをゼロにした後、 $x$  方向の気体の広がり  $x_0$  と  $y$  方向の気体の広がり  $y_0$  は時間とともに変化する。 $x_0/y_0$  の時間変化を求めよ。ポテンシャルにトラップされていたときとポテンシャルをゼロにしてから十分時間がたった後とを比較すると、 $x_0$  と  $y_0$  の大小関係が変化する。その理由を物理的に説明せよ。

### I-3 (電磁誘導) (100 点)

図のように長さが半径に比べて十分長い同軸で中空のふたつの円筒 1 と 2 を考える。円筒の厚さは無視できるとし、それらの半径を  $R_1$  と  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) とする。1 および 2 の円筒は単位長さ当たりそれぞれ  $-Q$  と  $+Q$  の一様に分布した電荷を持っているが、その電荷は円筒に固定され、円筒と一緒にしか動かないものとする。また、ふたつの円筒ともその軸の周りに摩擦なしで回転できるとし、その慣性モーメントを単位長さ当たりそれぞれ  $I_1$  および  $I_2$  とする。このような円筒の系に、最初、外部から一様な磁場  $H_0$  を回転軸に平行にかけておき、次にその磁場をゆっくりゼロにすると、円筒は回転を始める。このとき、円筒は電荷を持っているためその内部に一様な磁場ができる。

(1) 最初、内側の円筒の半径  $R_1 = 0$  とする。

a) 外部磁場  $H_0$  をゼロにしたときに外側の円筒の持つ単位長さ当たりの角運動量が  $L_2$  になったとする。  $L_2$  が与えられたとして、円筒間の磁場  $H_2$  を求めよ。

b) 磁場が時間的に変化するときにはファラデーの電磁誘導則が成立する。この誘導則から円筒にかかるトルクが求まる。円筒 2 の従う運動方程式を導け。

c) a)、b) で得られた方程式を解いて、  $H_2$  を求めよ。

d) ポインティングベクトル  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$  を用いると、電磁場の持つ角運動量は式  $\vec{L} = \frac{1}{c^2} \int d^3r \vec{r} \times \vec{S}$  から計算できる。最初の外部磁場  $H_0$  がかかっている状態での電磁場の持つ角運動量を計算せよ。ここで誘電率を  $\epsilon$ 、磁率を  $\mu$  とすると  $1/c^2 = \epsilon\mu$ 、 $c$  は光速である。

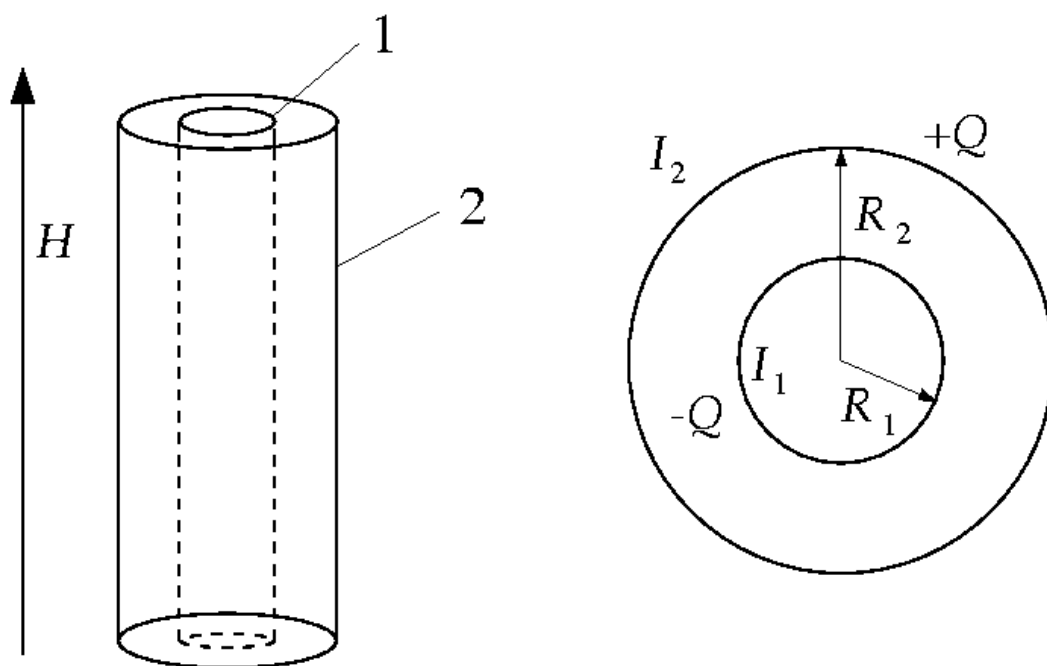
e) c) の結果を角運動量保存則から説明せよ。

(2) 次に  $R_1 \neq 0$  とする。外部磁場をゆっくりゼロにした後での円筒 1、2 の単位長さ当たりの角運動量をそれぞれ  $L_1$ 、 $L_2$ 、円筒 1 内部の磁場を  $H_1$ 、そして円筒 1 と円筒 2 の間の磁場  $H_2$  をとする。

a)  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $H_1$ 、 $H_2$  を決定するための方程式を導け。

b)  $I_1$  が無限に大きいときの  $H_1$ 、 $H_2$  を求めよ。(ヒント：角運動量は無限に大きくなることはない。)

c)  $I_1 = 0$  のときの  $H_1$ 、 $H_2$  を求めよ。(ヒント：角速度は無限に大きくなることはない。)



# 平成 12 年度大学院入学試験問題 II (3 時間 30 分)

注意

- (1) 問題 II-1、II-2、II-3 の解答はそれぞれ別の用紙一枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
- (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

II-1 (中性子干渉) (100 点) スピンが  $s = 1/2$  で磁気能率が  $\mu$  の中性粒子が、 $z$  方向に向いている磁場  $\vec{B} = (0, 0, B)$  の中にあるときのスピンの時間発展を考える。 $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$  をスピンの演算子とするとハミルトニアンは次のように書ける。

$$H = -\frac{\mu}{s} \vec{s} \cdot \vec{B}$$

- (1) Heisenberg 表示での  $\vec{s}$  の運動方程式を書き、それを解いてスピンの歳差運動の周期  $T$  を求めよ。
- (2) Schrödinger 表示での波動関数の時間発展を、スピンの  $z$  成分  $s_z$  を対角化する基底で表せ。特に、歳差運動の周期  $T$  だけ時間がたつと、波動関数はどう変化するか。

以上の結果をふまえて、次のような実験を考える。図の左上では  $+y$  方向に進む、エネルギーが一定で  $x$  軸の正の向きに偏極した中性子線が入射している。B と C に置かれた物体は中性子を完全に反射するが、A と D に置かれた物体は中性子をちょうど半分透過し、残りを反射するとする。また、反射や透過に際してはスピンの状態が変化することはないとする。二つの経路 A B D と A C D を通った中性子は干渉し、検出器 1 または検出器 2 によって検出される。また、中性子の経路 C D をはさむように電磁石が置いてあり、 $z$  方向にいろいろな大きさの磁場がかけられるようになっている。電磁石の磁場がゼロのとき、中性子はすべて検出器 1 で検出され、検出器 2 では検出されなかったとする。スピンの演算子を

$$s_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と表示することにし、次の問いに答えよ。

- (3) 入射してくる中性子のスピン波動関数は、

$$w = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書けることを示せ。

- (4) 中性子が D を通過したのち検出器に入るまえのある時点における波動関数  $\Psi$  を

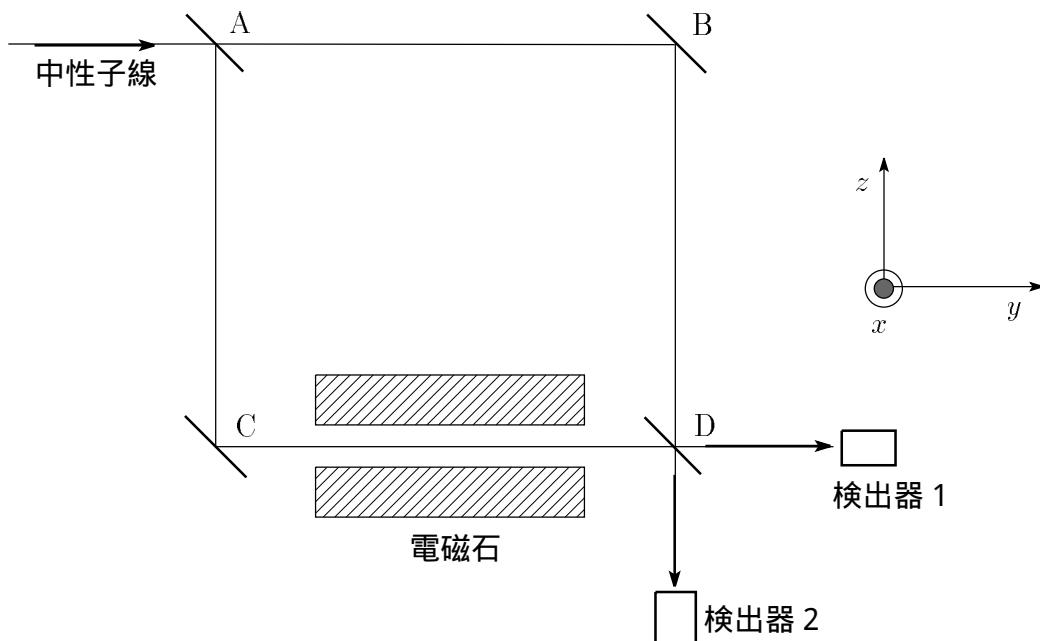
$$\Psi = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

のように表すことにする。ここで、 $w_1$ は検出器1に向かう中性子のスピン波動関数を表す2次元縦ベクトルであり、 $w_2$ は検出器2に向かう中性子のスピン波動関数を表す2次元縦ベクトルである。 $\Psi$ を経路A B Dを通ってきた成分 $\Psi_{ABD}$ と経路A C Dを通ってきた成分 $\Psi_{ACD}$ の重ね合わせの形 $\Psi = \Psi_{ABD} + \Psi_{ACD}$ に書こう。また、 $\Psi_{ABD}$ と $\Psi_{ACD}$ をそれぞれ $\Psi$ と同様に、

$$\Psi_{ABD} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{ACD} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

と表すことにする。 $\Psi$ の上下の成分の位相を適当に選ぶと、 $u_1 = \frac{1}{2}w$ 、 $u_2 = \frac{1}{2}w$ と書けることを示せ。ここで、 $w$ は前問で与えられたものとする。

- (5)  $\Psi_{ABD}$ と $\Psi_{ACD}$ は互いに直交しているはずであるが、これはなぜか説明せよ。この事実と $\Psi = \Psi_{ABD} + \Psi_{ACD}$ が検出器1に向かう状態を表していることに注意して、上の位相の選び方のもとで、 $v_1 = \frac{1}{2}w$ 、 $v_2 = -\frac{1}{2}w$ となっていることを示せ。
- (6) 磁場の大きさを調節して中性子が磁場のあるところを通過する間に、スピンのまわりを右向きにちょうど一周だけ歳差運動するようにした。このとき、中性子は各検出器によってどのように検出されるか。
- (7) 磁場の大きさを半分にして、中性子が磁場のあるところを通過する間に、スピンのまわりをちょうど2分の1周期だけ歳差運動するようにした。このとき、中性子は各検出器によってどのように検出されるか。また、各検出器によって検出される中性子は、どの向きに偏極しているか。磁場の向きを逆にするとうなるか。



## II-2 (統計熱力学) (100 点)

統計熱力学を学ぶ際、系と熱浴を分ける考え方やその設定方法にとまどう場合がある。ここでは分布関数の導出を行ないながら、系と熱浴の設定の重要性を再確認する。相互作用のない、同一粒子が  $N_0$  個ある状態を考える (全エネルギーを  $U_0$  とする)。この状態を以下のように熱浴と系に分ける。すなわち、系には  $N$  個の粒子があり (熱浴には  $N_0 - N$  個)、系はエネルギー  $E_S$  の量子状態  $S$  にあるとする (熱浴のエネルギーは  $U_0 - E_S$ )。系と熱浴は粒子の移動を許す熱平衡状態にあるものとする。以下でボルツマン定数を  $k_B$  とし、系のエネルギーの原点を 0 とする。

系がこの特定の量子状態  $S$  をとる確率  $P(N, E_S)$  を考える。 $P(N, E_S)$  は、系と熱浴がとりうる状態数の積に比例するが、上のように系の粒子数と量子状態を決めた場合、系のとりうる状態数は 1 である。したがって  $P(N, E_S)$  は熱浴がとりうる場合の数に比例する。

- (1) 熱浴のエントロピー  $\sigma(N_0 - N, U_0 - E_S)$  を使って<sup>注1)</sup>  $P(N, E_S)$  を書き下せ。ただし比例定数を  $C$  とする。

ここで  $N_0 \gg N$  かつ  $U_0 \gg E_S$  なので、(1) で求めた右辺を  $N_0$  と  $U_0$  の周りで展開すると、

$$P(N, E_S) = C \exp(\sigma(N_0, U_0)) \exp(-N(\partial\sigma/\partial N_0)_{U_0} - E_S(\partial\sigma/\partial U_0)_{N_0})$$

となる。

- (2) 温度  $T$  と化学ポテンシャル  $\mu$  の定義を使い、 $P(N, E_S)$  を大きな分配関数  $Z$  (ギブス和、大きな状態和とも呼ばれる)  $T$  および  $\mu$  を用いて書け。その際、導出過程も書くこと。ここで  $P(N, E_S)$  は全ての粒子数  $N$  と量子状態  $S$  について和をとると 1 になることを用いよ。また  $Z$  は次式のように定義されており、和は全ての粒子数  $N$  (0 も含む) と量子状態  $S$  について実行するものとする。

$$Z = \sum_N \sum_S \exp((N\mu - E_S)/k_B T)$$

フェルミ粒子の分布関数を導出する。今までは  $N$  粒子系の量子状態を考えしたが、以下では系のエネルギーは、1 粒子エネルギー準位を占有する粒子数  $N$  と、その準位のエネルギー  $\varepsilon$  との積で書けるものとする (このように系をとることで  $Z$  の計算が非常に簡単になる)。フェルミ粒子の場合、ある準位  $\varepsilon$  を占有する粒子数は、0 または 1 個 (ここではスピン量子数については考えない) なので、それに対応した系のエネルギーはそれぞれ 0 と  $\varepsilon$  になる。

- (3) フェルミ粒子系の  $Z$  を求めよ。

- (4) 分布関数  $f(\varepsilon)$  の定義を 25 字以内で述べ、フェルミ粒子系の分布関数を定義式から導け。



- (5) 同様の方法でボーズ粒子系の分布関数を導出せよ。その際、導出過程も書くこと。熱浴は充分大きく、実質的に  $N_0$  を無限大にしてもよいとする。

注1) 通常のエントロピーは  $S = k_B \sigma$  で定義される場合が多い。

### II-3 (磁気レンズ) (100 点)

図のように4つの四角形のコイルが組み合わされた磁気回路がある。これについて以下の問いに答えよ。 $xy$ 平面上のそれぞれの導線の座標が $(a, b), (a, -b), (-a, b), (-a, -b)$ にあるものは紙面に向かって入って行く方に電流が流れ、座標が $(b, a), (b, -a), (-b, a), (-b, -a)$ にあるものは紙面から出てくる方向に電流が流れている。また、 $a > b > 0$ である。また磁気回路の中央部( $z = 0$ )ではそれぞれのコイルは反平行に電流 $I$ の流れる無限に長い2本の導線で近似できると考えてよい。

- (1)  $xy$ 平面上( $z = 0$ )での磁力線の様子を定性的に図示せよ。
- (2) 原点付近での $x$ 軸上の磁場 $B(x, 0, 0)$ を求めたい。
  - (a)  $x$ 軸上の磁場は $B_y$ 成分しか持たないことを示せ。
  - (b)  $B(x, 0, 0)$ を $x$ 座標の一次までの関数として求めよ。
  - (c) 同様に $y$ 軸上の磁場 $B(0, y, 0)$ も求めよ。
- (3) この磁気回路は電荷を持った $z$ 軸方向に運動する粒子に対して、有効長が $L$ の磁気レンズとして働く。この事実を確認してみよう。コイルの $z$ 方向終端での磁場の乱れを無視できるとすると、コイルに囲まれた空間では、

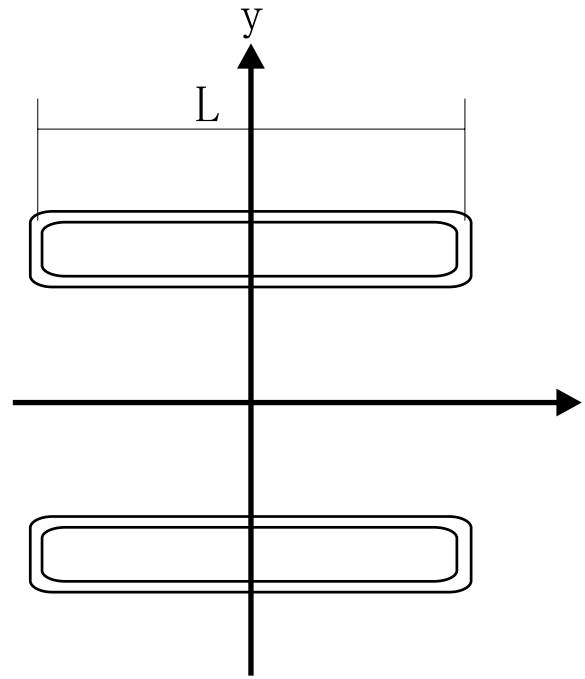
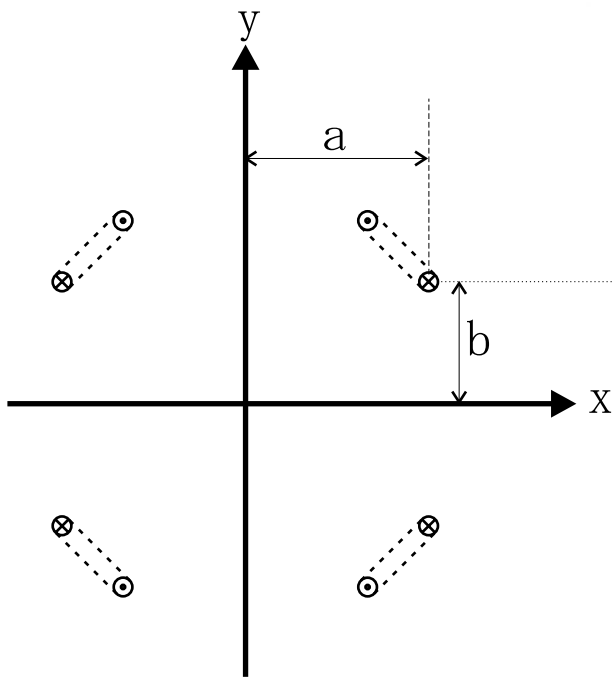
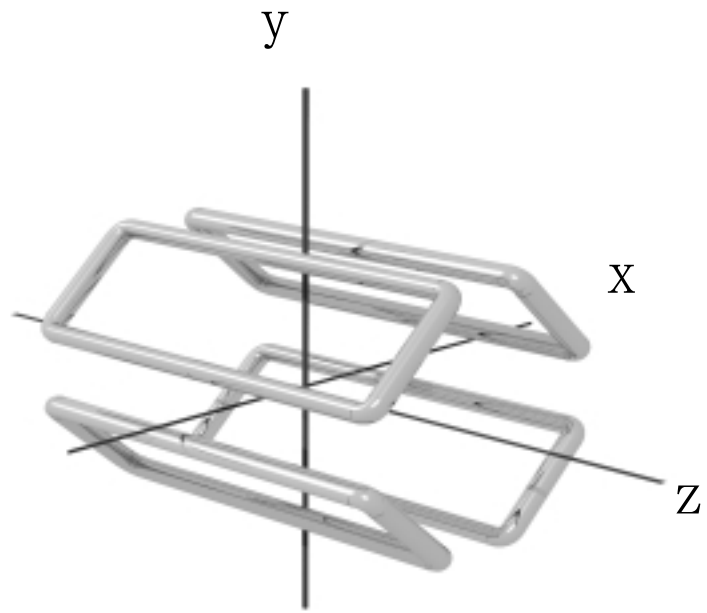
$$B(x, y, z) = B(x, y, 0) \quad (|z| < \frac{L}{2})$$

でそれ以外では

$$B(x, y, z) = 0 \quad (|z| > \frac{L}{2})$$

が成り立つと考えることができる。次にレンズとしての厚み $L$ は運動する粒子にとっては十分薄いとすると、粒子はレンズを通過するときその座標を変えず、磁場によって方向のみ変えると近似することができる(薄いレンズの近似法)。正の電荷 $e$ と運動量 $p$ を持った粒子を、 $xz$ 平面上を $z$ 軸の負の方向から $z$ 軸に平行にレンズに入射した場合を考察し、焦点距離 $f_x$ を求めよ。また同様に $yz$ 平面上に入射したときの焦点距離 $f_y$ をもとめよ。但し、凹レンズの焦点距離は負の値を取るとせよ。

- (4) 同様なもうひとつの磁気回路を $z$ 軸の回りに $90$ 度回して、中心距離 $D$ だけ離しておいたとする。この複合磁気回路のレンズとしての働きを前問と同様に考察し焦点距離 $F_x, F_y$ を求めよ。ただし $|f_x| \gg D, |f_y| \gg D$ としてよい。



# 平成 12 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題は III-1 から III-7 まで 7 問ある。これから 3 問選択せよ。
- (2) 選択した問題の解答はそれぞれ別の用紙一枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
- (3) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

## III-1 (選択) (解析力学) (100 点)

ラグランジアンが  $L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, s)$  で与えられる力学系を考える。ここで、 $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  は一般座標、 $\dot{q}_i, (i = 1, \dots, n)$  は一般速度で、 $q_i$  の上につけられたドットは、時間  $s$  による微分を表す。 $q_i$  に正準共役な一般運動量を  $p_i$  とする。

そこで次のような作用積分

$$W = \int_0^t L(q_1(s), \dots, q_n(s), \dot{q}_1(s), \dots, \dot{q}_n(s), s) ds \quad (\text{A})$$

を考える。ここで、 $q_i(s)$  は、オイラー・ラグランジュ方程式を解いて、実現される運動である。 $W$  は、時間  $t$  のほかに、 $q_i(t), (i = 1, \dots, n)$  および初期値  $q_i^0 = q_i(0), (i = 1, \dots, n)$  に依存すると考えられる。

$$W = W(q_1, \dots, q_n, q_1^0, \dots, q_n^0, t) \quad (\text{B})$$

ここで  $q_i(t)$  をあらためて  $q_i$  と書いた。

- (1) このようにして作られた  $W$  について

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial W}{\partial q_j^0} = -p_j^0, \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (\text{C})$$

が成り立つことを示せ。ここで、 $p_j^0 = p_j(0)$ 。

- (2)  $W$  がハミルトン・ヤコビの方程式

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, t\right) = 0 \quad (\text{D})$$

を満足することを証明せよ。ここで、 $H(\dots)$  はハミルトニアンである。

- (3)  $W$  は、正準変換  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \longrightarrow (q_1^0, \dots, q_n^0, p_1^0, \dots, p_n^0)$  の母関数になっていることを証明せよ。

- (4) 1 次元調和振動子のハミルトニアンが

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 \quad (\text{E})$$

で与えられているとき、 $W$  は

$$W = \frac{\omega}{2 \sin(\omega t)} [(q^2 + (q^0)^2) \cos(\omega t) - 2qq^0] \quad (\text{F})$$

で与えられることを示せ。ただし、 $q^0 = q(0)$ 。

- (5) 表式 (F) で与えた  $W$  を  $t$  で微分し、 $-\partial W / \partial t$  が (E) で与えられているハミルトニアン  $H$  になっていることを示せ。

### III-2 (選択) (等角写像) (100 点)

比抵抗  $\rho$  の一様な材質でできている半径  $a$ 、厚み  $d$  の薄い円板の周上に小電極を 4 つ付ける。電極 A と電極 B を定電流電源につなぎ、円板を通して電極 A から電極 B に流れる電流が  $I$  になるようにした。また、電極 C と電極 D では外部との電流の出入りはないとする。このときの電極 C と電極 D の間の電位差  $V$  を求めたい。

まず、円板の中心を原点とする極座標  $r, \theta$  を考え、それぞれの電極の  $\theta$  座標を  $\theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D$  とする。電位差  $V$  を  $\rho, a, d, I, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D$  の関数として表したとき、 $V$  は  $\rho, a, d, I$  にどのように依存するか考えよう。

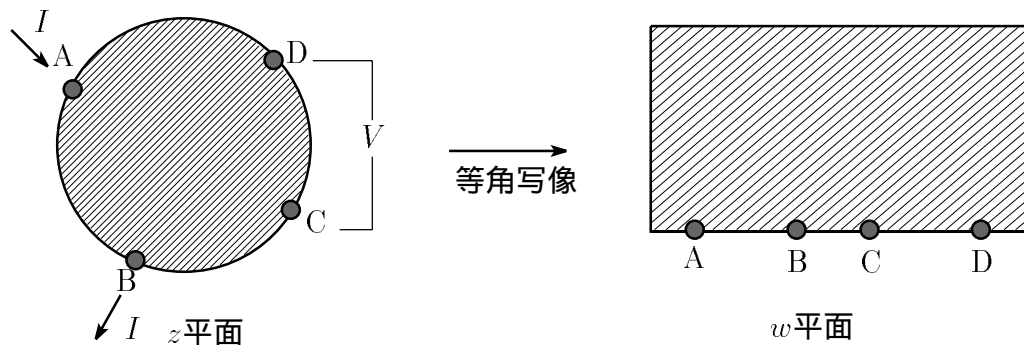
- (1)  $V$  は  $\rho$  と  $I$  に比例し、 $d$  には反比例すること、すなわち、 $a, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D$  だけに依存する関数  $f$  があって、

$$V = I \frac{\rho}{d} f(a, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D)$$

と書けることを示せ

- (2) 上式右辺の  $f$  が無次元量であることを示し、そのことから  $V$  が  $a$  にはよらないことを説明せよ。

$V$  が  $a$  に依存しないことがわかったので、以下では  $a = 1$  とし、円板を複素平面  $z = re^{i\theta}$  上の単位円板  $|z| \leq 1$  とみなし、 $V$  を  $z_A = e^{i\theta_A}, z_B = e^{i\theta_B}, z_C = e^{i\theta_C}, z_D = e^{i\theta_D}$  で表すことを考える。そのために、単位円板  $|z| \leq 1$  を等角写像によって上半平面  $\{w; \text{Im } w \geq 0\}$  に写し、その写像で、 $z_A, z_B, z_C, z_D$  はそれぞれ  $w_A, w_B, w_C, w_D$  に写るとする。



- (3) 知りたい電位差  $V$  を求めるためには、円板と厚みが同じで同じ材質からなる上半平面  $\{w; \text{Im } w \geq 0\}$  に、4 つの電極 A, B, C, D が  $w_A, w_B, w_C, w_D$  のところに付いているとして、円板のときと同様の設定で、電極 C と電極 D の間の電位差を求めればよい。これはなぜか説明せよ。

- (4) 上半平面でもし電極 B がなくて、電極 A から流れ込む電流が無限遠まで流れていくと仮定すると、座標が  $w$  である点における電位  $\phi_A(w)$  は、

$$\phi_A(w) = -I \frac{\rho}{d} \frac{1}{\pi} \log |w - w_A| + \text{const.}$$

と書けることを示せ。同様に、もし電極 A がなくて、無限遠から流れてきた電流が電極 B から出て行くと仮定したときの  $w$  における電位  $\phi_B(w)$  はどう書けるか。

- (5) 今考えたい場合、すなわち電極 A から流れ込んだ電流が電極 B から出て行く場合の  $w$  における電位は、上の  $\phi_A(w)$  と  $\phi_B(w)$  の和で与えられる。これはなぜか。このことから  $V$  は

$$V = -I \frac{\rho}{d} \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{(w_C - w_A)(w_D - w_B)}{(w_C - w_B)(w_D - w_A)} \right|$$

と書けることを示せ。

最後に、上で得られた結果を  $z_A, z_B, z_C, z_D$  で書きなおすことを考える。一般に、複素平面上の 4 つの点の座標を  $z_1, z_2, z_3, z_4$  としたとき、次の量をその 4 点の非調和比と呼んでいる。

$$u = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}$$

- (6) 非調和比は分数一次変換  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  ( $ad - bc \neq 0$ ) をほどこしても不変に保たれることを示せ。
- (7) 単位円から上半平面への等角写像の一例を示し、それが分数一次変換であることを確かめよ。
- (8) これらのことを使って  $V$  を  $z_A, z_B, z_C, z_D$  で表せ。

### III-3 (選択) (行列式の計算) (100 点)

- (1)  $N$  次複素正方行列  $L$  が  $N$  個の固有値  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_N$  を持つとき、行列  $L$  の指数写像  $\exp L$  の固有値は、 $\exp \ell_1, \exp \ell_2, \dots, \exp \ell_N$  と書けることを示し、さらに 次の公式 (A) が成り立つことを証明せよ。

$$\det(\exp L) = \exp(\operatorname{Tr} L) \quad (\text{A})$$

ここで、 $\det(\exp L)$  は行列  $\exp L$  の行列式を表し、 $\operatorname{Tr} L$  は行列  $L$  の跡(トレース)で

$$\operatorname{Tr} L = \sum_{k=1}^N L_{kk}$$

によって定義される。(行列  $L$  は対角化可能として証明してよい。)

- (2) 上記公式 (A) を利用して行列式

$$\det(I - gM) \quad (\text{B})$$

を  $\operatorname{Tr} M^k$ , ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) などを用いて展開し、 $g$  の 4 次の項まで計算せよ。ただし、 $I$  は  $N$  次単位行列、 $M$  は  $N$  次複素正方行列 ( $N > 4$ )、 $g$  は定数で、 $gM$  のノルム  $\|gM\|$  は

$$\|gM\| = |g| \left( \sum_{i,j=1}^N |M_{ij}^2| \right)^{1/2} < 1 \quad (\text{C})$$

なるものとする。

- (3)  $M$  が 3 次の複素正方行列であるとき

$$\frac{1}{6}(\operatorname{Tr} M)^3 - \frac{1}{2}(\operatorname{Tr} M)(\operatorname{Tr} M^2) + \frac{1}{3}\operatorname{Tr} M^3 = \det M \quad (\text{D})$$

が成り立つことを証明せよ。

- (4) 一般に、行列  $M$  が  $N$  次の正方行列、 $I$  が  $N$  次の単位行列であるとき、行列式 (B) を  $g$  で展開すると  $g^N$  の項の係数は  $(-1)^N \det M$  となることを証明せよ。

- (5)  $I - gM$  が 4 次の正方行列で、 $M$  の成分が

$$M_{i4} = -M_{4i} = E_i, \quad M_{jk} = \epsilon_{ijk} B_i \quad (i, j, k = 1, \dots, 3) \quad (\text{E})$$

で与えられるとき、行列式  $\det(I - gM)$  を計算せよ。ここで  $\epsilon_{ijk}$  の値は、添字  $ijk$  が 123 の偶置換ならば 1、奇置換のときは  $-1$  なるものとする。

### III-4 (選択) (一次元スピン系) (100 点)

量子スピン (大きさ 1) が 1 次元的に並んだ系を考える。そのハミルトニアンを次式で与える。

$$\mathcal{H} = J \sum_{i=1}^N (S_{ix}S_{i+1x} + S_{iy}S_{i+1y} + S_{iz}S_{i+1z}) + D \sum_{i=1}^N S_{iz}^2 \quad (\text{A})$$

第 1 項はスピン間の結合のエネルギーであり、隣りあうスピンどうしだけが相互作用するとした。また、第 2 項のため、各サイト  $i$  で  $|S_{iz} = \pm 1\rangle$  の状態と  $|S_{iz} = 0\rangle$  の状態のエネルギーが異なっている。以下では  $|D| \gg |J|$  であると仮定する。

$D > 0$  の場合:

$D \gg |J|$  では (A) の第 1 項が近似的に無視でき、ハミルトニアンは次式のようになる。

$$\mathcal{H}' = D \sum_{i=1}^N S_{iz}^2 \quad (\text{B})$$

- (1) (B) 式で与えられるスピン系の分配関数  $Z$  と自由エネルギー  $F$  を求めよ。さらにエントロピーと比熱を計算し、それらの温度変化の概略を図で示せ。
- (2) つぎにこの系に磁場をかけその磁氣的性質を調べる。
  - a)  $z$  方向に磁場  $H$  をかけたときのハミルトニアンは

$$\mathcal{H}'' = D \sum_{i=1}^N S_{iz}^2 - \mu H \sum_{i=1}^N S_{iz} \quad (\text{C})$$

- b)  $x$  方向に磁場  $H$  をかけたときのハミルトニアンは

$$\mathcal{H}'' = D \sum_{i=1}^N S_{iz}^2 - \mu H \sum_{i=1}^N S_{ix} \quad (\text{D})$$

となる。ここで  $\mu$  はスピンが持つ磁気モーメントである。帯磁率  $\chi = -d^2F/dH^2$  を a) と b) のそれぞれの場合に計算せよ。また、その温度変化の概略をひとつの図に描け。

ヒント：

$S^\pm = S_x \pm iS_y$  についてつぎの関係式が成立する。

$$S^+|S_z\rangle = \sqrt{S(S+1) - S_z(S_z+1)}|S_z+1\rangle, S^-|S_z\rangle = \sqrt{S(S+1) - S_z(S_z-1)}|S_z-1\rangle$$



$D < 0$  の場合:

- (3) 温度  $T$  に対して  $k_B T \ll |D|$  の条件が成立する低温において (A) のミルトニアンは次式のようなイジングスピンのハミルトニアンで近似できることを示せ。ここで  $k_B$  はボルツマン定数である。

$$\mathcal{H}_{\text{Ising}} = J \sum_{i=1}^N S_{i,z} S_{i+1,z} \quad (\text{E})$$

- (4) 1次元のイジングスピンの分配関数は  $N \gg 1$  のときには  $Z = (2 \cosh(J/k_B T))^N$  と求められている。この結果を用いてエントロピーの温度変化を計算せよ。また  $|J| \ll k_B T \ll |D|$  の温度領域ではエントロピーが  $N k_B \ln 2$  になることを示し、その物理的解釈を述べよ。
- (5)  $k_B T \gg |D|$  のときには (A) のハミルトニアンにもどって考える必要がある。この高温の極限ではエントロピーが  $N k_B \ln 3$  になる。(4) で議論したイジング模型で近似できるときの高温の極限と比較してその違いの理由を説明せよ。

### III-5 (選択)(電送線) (100 点)

平行 2 線の電送線と同軸ケーブルをつないでパルス信号を送りたい。これに関して以下の問いに答えよ。光速  $c$  は  $3 \times 10^8$  m/sec であり、真空の透磁率  $\mu_0$  と誘電率  $\epsilon_0$  の間には  $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$ 、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  [H/m] の関係がある。

- (1) 平行 2 線の電送線の場合、媒質は空気と考えられる。導線の半径を  $d$ 、相対距離を  $D$  としたとき 特性インピーダンスと信号の伝搬速度を求めよ。いま、 $d = 1$  mm、 $D = 7.39$  mm である。特性インピーダンスと伝搬速度を数値的に求めよ。なお、単位長さあたりのインダクタンスとキャパシタンスは平行 2 線の場合それぞれ

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \log_e \left( \frac{D}{d} \right), \quad C = \frac{\epsilon_0 \pi}{\log_e \left( \frac{D}{d} \right)}$$

と近似できる。必要ならば  $e^2 \approx 7.39$  を用いよ。

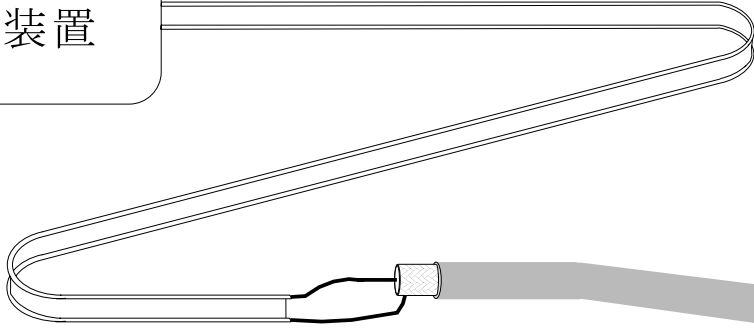
- (2) 同軸ケーブルの場合媒質があり、比透磁率  $\mu$ 、比誘電率  $\epsilon$  をもつ。芯線の半径を  $r$ 、外皮の半径を  $R$  としたとき特性インピーダンスと信号の伝搬速度を求めよ。いま、 $r = 1$  mm、 $R = 7.39$  mm であり、媒質の比透磁率は 1、比誘電率は 4 である。特性インピーダンスと伝搬速度を数値的に求めよ。なお、単位長さあたりのインダクタンスとキャパシタンスは同軸ケーブルの場合それぞれ

$$L = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \log_e \left( \frac{R}{r} \right), \quad C = \frac{2\epsilon\epsilon_0\pi}{\log_e \left( \frac{R}{r} \right)}$$

で近似できる。

- (3) 直接ケーブルをつなぐと接続部で反射がおこる。図で示されたように出力インピーダンスが平行 2 線の電送線の特性インピーダンスに等しいパルス発生装置をつなぎ、幅 50 nsec、波高 1 V の矩形波を発生した。30 m 先で無限に長い同軸ケーブルに接続してある。接続部での反射係数を数値的にもとめ、パルス発生装置出力につないだオシロスコープで観測される波形を図示せよ。図には縦軸と横軸に数値および単位を記すこと。時間軸の原点はパルス発生装置から出た矩形波の立ち上がる時間にとること。
- (4) 反射は接続部にトランスを挿入することによって防ぐことができる。トランスの巻き線比  $n_1/n_2$  を数値的に求めよ。ここで  $n_1$  は平行 2 線側の巻き数であり、 $n_2$  は同軸側の巻き数である。
- (5) 平行 2 線と同軸ケーブルのどちら側から信号を送っても反射が起らないように抵抗だけを使って接続したい。抵抗のみの回路を設計せよ。抵抗値には数値を与えること。

パルス  
発生装置



III-6 (選択) ( $\gamma$ 線) (100 点)

波長を自由に変えられる 線光源として以下のようなものを考えよう。

エネルギー  $E_e$ 、質量  $m_e$  ( $m_e c^2 = 0.51 \text{ MeV}$ ) の電子が蓄積リングの中を周回している。これにレーザーからの光子 (エネルギー  $E_\omega$ ) を正面衝突させ、電子の進行方向から角度  $\theta$  の方向に弾性散乱させる。レーザー光は電子から運動エネルギーをもらい波長が短くなる。

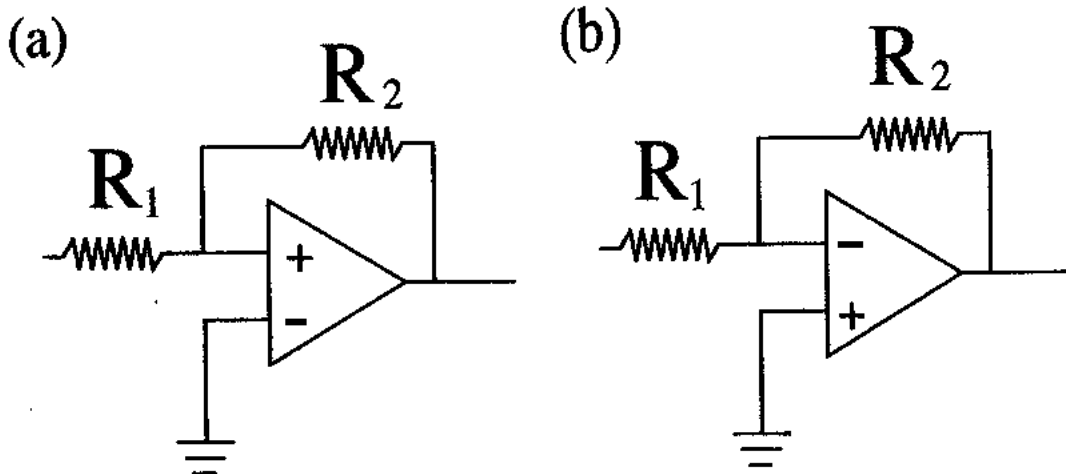
- (1) このとき散乱された光子のエネルギーを  $\theta$  の関数として求めよ。

すなわち散乱された光のエネルギーを変えることは電子のエネルギー、レーザー光の波長、あるいは散乱角を変えることで実現できる。

- (2) (1) で求めた式では散乱される光子のエネルギーは  $\theta = 0$  で最大になる。レーザー光の波長を  $500 \text{ nm}$  とし、周回している電子の全エネルギー  $E_e$  を  $260 \text{ MeV}$  にしたとき、散乱される光の最大のエネルギーは約何  $\text{MeV}$  になるか？

NaI(Tl) シンチレーション検出器及び光電子増倍管を用いて  $1 \text{ MeV}$  の単色ガンマ線のエネルギースペクトルを測定したい。

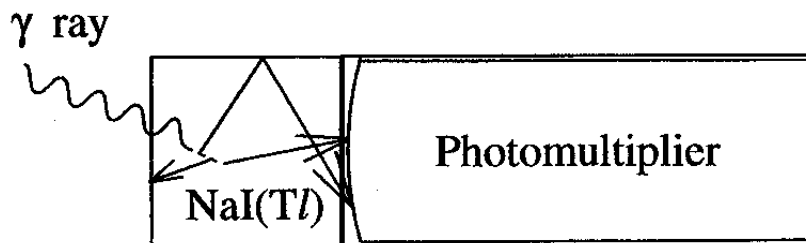
- (3) シンチレーション検出器からの出力信号は通常増幅器を通して増幅、整形されて波高分析器にいれられる。増幅器には一定の増幅度を得るために、通常演算増幅回路が用いられている。以下の (a) と (b) のどちらが正しい回路か？ そしてその場合の増幅回路の増幅度はいくらか？ 図で  $R_1, R_2$  は抵抗を示し、演算増幅器の入力端子の + ( - ) の意味は出力に対して入力と同 ( 逆 ) 位相であることを示す。



- (4) 波高分析器では 線と NaI(Tl) の相互作用を反映したエネルギースペクトルが得られる。得られたガンマ線のエネルギースペクトルはどのようになるか図示せよ。エ

エネルギースペクトルのどの部分に主にどの相互作用が効いているかを明示すること。

- (5) エネルギースペクトル中に見られる全エネルギーピークの幅について考えよう。1MeVの $\gamma$ 線はその全エネルギーがNaI(Tl)結晶中で吸収されたとすると、平均約25 eVのエネルギー損失に対して1つのシンチレーション光の割合で発光する。このシンチレーション光の数が電気信号の波高に対応している。NaI(Tl)結晶を図に示すように、光電子増倍管(Photomultiplier)に接続したとしよう。シンチレーション光の数は光電子増倍管で電気信号になるまでに各種の効率のために減少していく。それゆえ電気信号の波高はゆらくことになる。この揺らぎが全エネルギーピークの幅に対応している。考慮すべき各種の効率としてはどのようなものが考えられるか？この幅は全エネルギーピークの波高の約何パーセントになるか？



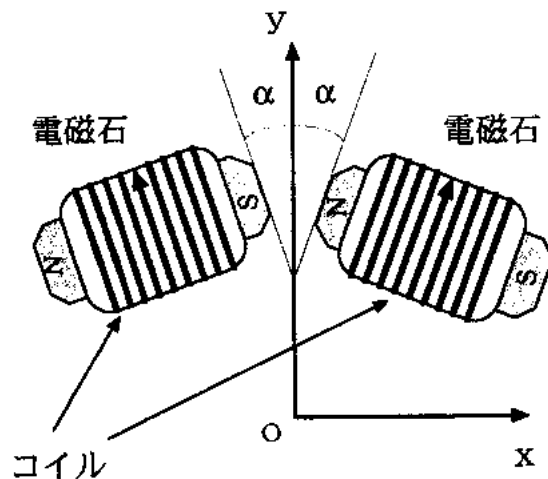
### III-7 (選択) (磁化率測定) (100点)

ピエール・キュリーは約100年前に、さまざまな物質の磁化率を広い温度範囲で測定し、常磁性体でのキュリーの法則を見つけた。彼の用いた方法は、磁場勾配の中では、磁性体に力が作用することを利用したもので、その力による測定試料の僅かな変位を測定し、磁化率を求めるものである。この実験に関する以下の問に答えよ。

同一の電磁石2台を図のように配置する。各電磁石のNとS極を向かい合うようにコイルに電流を流し励磁すると、原理的には $y$ 軸上の $y$ 方向の磁場成分 $H_y$ を0にすることができる。 $z$ 方向(紙面に垂直)の磁場成分は、磁極の中心では無視でき、さらに $x=0$ の近傍での磁場勾配、 $\partial H_x/\partial x$  および $\partial H_x/\partial z$  も無視できるとする。

#### 図の説明

測定系を真上から見た図。同一の電磁石2台が図の $y$ 軸からそれぞれ角度 $\alpha$ だけ傾いている。(ただし電磁石の中心軸は $xy$ 平面内にあるものとする)。コイルに流す電流の向きを図の矢印の方向で示してある。測定試料は $y$ 軸上に設置する。



- (1)  $H_x$  と  $\partial H_x/\partial y$  の  $y$  依存性の定性的なグラフを描け。縦軸は任意のスケールでよい。また図の電磁石の傾き角  $\alpha$  を小さくするとこれらのグラフはどのように変化するか。2つの電磁石の磁極の中心間隔を固定した場合について、定性的に述べよ。
- (2) 磁場と常磁性体の相互作用エネルギーを考えて、測定試料に働く力の大きさを磁場の強さ、磁場勾配および単位質量当たりの磁化率  $\chi$  と試料の質量  $m$  であらわせ。
- (3) 実際に磁化率を測定する場合、有限の大きさの試料は、どの場所に配置するのがよいか、またその理由を述べよ。
- (4) 高温での磁化率を測定するために、キュリーは下のような電気炉を用いた。金属線(直径0.25mm)をヒーターとし、セラミックスの円筒の外周に巻いていく。100Vの直流電圧を加える場合に、必要なヒーター線の長さを、金属の電気抵抗率の常識的な値を用いて計算せよ。必要とする発熱量は1500Wである。ただし抵抗率の温度変化を考慮する必要はない。

- (5) キュリーはヒーター線を巻く場合に、必要な長さを二つ折りにし、その二重線を互いに接触しないようにして外周に巻いた。その理由としてどんなことが考えられるか。また円筒の内部に置かれた有限の大きさの試料の垂直方向の温度不均一を小さくするために、彼はヒーター線の巻き方を工夫した。どんな工夫をしたと考えられるか、その理由と共に答えよ。
- (6) 試料の温度を測定するのに、熱電対が利用された。熱電対の原理とそれを用いて温度を測定する場合の測定系(必要な装置、接続方法など)を書け。またよく利用される熱電対の具体例を一つあげよ。

### 図の説明

装置を横から見た断面図を示している。測定試料はガラスのアンプルの中に入れてある。耐熱磁器パイプの外側にヒーター線が巻かれ、外側は断熱材で覆ってある。試料の温度は熱電対で測定する。電気炉全体が2つの電磁石の磁極間に設置される。試料は可動棒に取り付けられ、磁場による微小変位を先端のねじればかり(省略)に伝えて測定する。

