

平成 11 年度大学院入学試験問題 I (3 時間)

注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
- (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

I-1 (電磁気学：同軸ケーブル) (100 点)

実験室では目的に応じて様々な検出器を使用するが、検出信号を同軸ケーブルでオシロスコープ等の種々の測定器につないで観測することが多い。同軸ケーブルについて、基礎的な事を理解しておくことは大事である。内導体の直径が $2a$ 、外導体の直径が $2b$ の無損失の同軸線路について考える。観測する信号の波長が $\pi(a+b)$ より十分長い場合には、線路内を自由空間におけると同じ横波 (Transverse electromagnetic wave TEM 波) として図 1 に示す様に z 軸方向に伝わる。

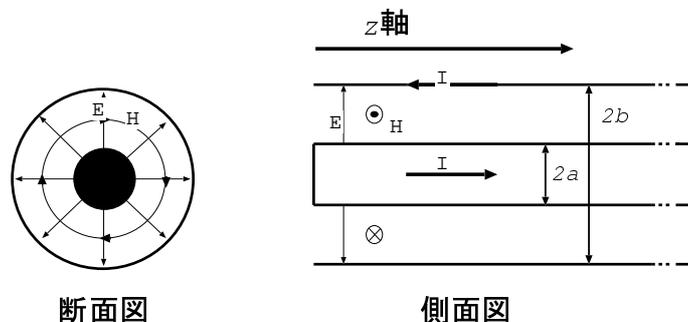


図 1

- (1) 媒質が真空の場合の Maxwell 方程式を用いて、TEM 波の電場は 2 次元の静電場の問題の解と変わらないことを示せ。真空の誘電率、透磁率を ϵ_0 , μ_0 とし、電場、磁場の伝播方向に垂直な成分を \mathbf{E}_t , \mathbf{H}_t 、平行な成分を \mathbf{E}_z , \mathbf{H}_z とせよ。
- (2) 内導体と外導体の間が真空だとして、
 - (a) 単位長さ当たりの静電容量 C とインダクタンス L を求めよ。
 - (b) Maxwell 方程式に基づいて、円筒座標を用いて電場 \mathbf{E} 、磁場 \mathbf{H} の波動方程式を導け。
 - (c) \mathbf{E} , \mathbf{H} とともに時間 t に関して、 $e^{-i\omega t}$ で変化するものとして、(i は虚数単位、 ω は信号の角周波数である。)(b) で求めた波動方程式を書き換えよ。
 - (d) 平面波 $e^{i(kz-\omega t)}$ を考え、 ϵ_0 , μ_0 と光速 c との関係を示せ。
 - (e) 波動インピーダンス Z_w は \mathbf{E}/\mathbf{H} で表される。 Z_w を求めよ。

(f) (b) で求めた E の波動方程式、 H の波動方程式を内導体と外導体の間の空間でそれぞれ積分して、両導体間の電圧 V の方程式、両導体を流れる電流 I の方程式に書き換えよ。

(3) 無損失の伝送線路は分布定数 L, C の回路 (図 2) で表すことができる。

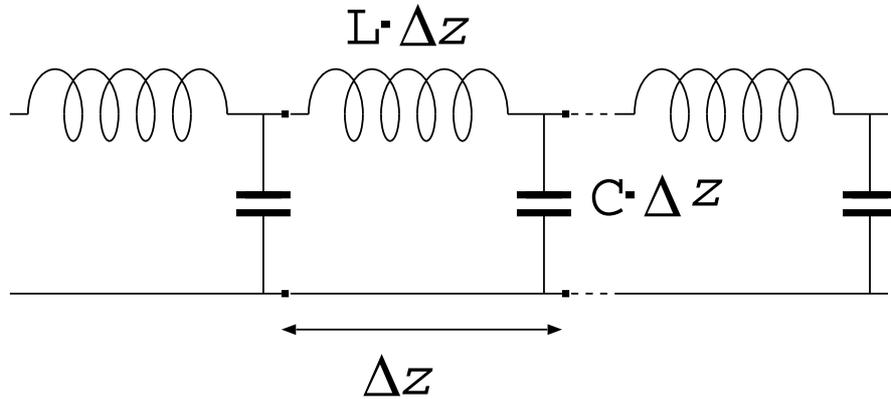


図 2

- (a) 線路上の、 V, I に関する微分方程式を示せ。
- (b) V, I が $e^{-i\omega t}$ で変化するものとして、求めた微分方程式を書き換えよ。
- (c) V, I が $e^{i(kz - \omega t)}$ で、変化するものとして、 L, C と位相速度との関係を示せ。
- (d) 線路の特性インピーダンスは、 $Z_0 = V/I$ で与えられる。 L, C との関係を示し、(2)(a) で求めた L, C を代入して Z_0 の値を求めよ。

付録

ベクトル公式:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

円筒座標 (r, θ, z) でのベクトル演算:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \hat{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) + \hat{\boldsymbol{\theta}} \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \hat{\mathbf{z}} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

I-2 (量子力学) (100 点)

ハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p}^2 + \hat{W}^2(\hat{x}) + \hbar\sigma_3 \frac{d\hat{W}(\hat{x})}{dx} \right) \quad (\text{A})$$

で表されるスピン $1/2$ を持つ粒子の 1 次元運動を考えよう。但し、 σ_i ($i = 1, 2, 3$) はパウリ行列で交換関係、及び反交換関係

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3, \quad [\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1, \quad [\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2, \quad (\text{B})$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \quad (\text{C})$$

を満たす。また、 $W(x)$ は x の実関数とする。

- (1) 具体的に $W(x) = m\omega x$ とすると、この模型は調和振動子ポテンシャル、及び定数磁場の中を 1 次元的に運動するスピン $1/2$ の粒子を記述し、状態は軌道部分である調和振動子の状態 $|n\rangle$ とスピン部分の状態 $|\pm\rangle$ の直積になる。ここで、 $|n\rangle$ は調和振動子のエネルギー固有値 $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ ($n = 0, 1, \dots$) を与える状態、 $|\pm\rangle$ はスピンの第 3 成分の固有状態 $\hat{S}_3|\pm\rangle = \frac{\hbar}{2}\sigma_3|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$ である。この場合のエネルギー準位を、縮退度を明記して図示せよ。

この具体例に現れる定性的な性質は、実はこの系の対称性に起因しており、一般的な $W(x)$ の場合にも成り立つことを示すことができる。このことについて、この系の保存量であるエルミート演算子

$$\hat{Q}_1 = \frac{1}{2\sqrt{m}}(\sigma_1\hat{p} + \sigma_2\hat{W}(\hat{x})), \quad \hat{Q}_2 = \frac{1}{2\sqrt{m}}(\sigma_2\hat{p} - \sigma_1\hat{W}(\hat{x})), \quad (\text{D})$$

を用いて、以下の手順で考察することにしよう。

- (2) $\hat{Q}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q}_1 \pm i\hat{Q}_2)$ の間の反交換関係 $\{\hat{Q}_+, \hat{Q}_+\}$, $\{\hat{Q}_-, \hat{Q}_-\}$ 、及び $\{\hat{Q}_+, \hat{Q}_-\}$ を計算せよ。またこれらと \hat{S}_3 との交換関係 $[\hat{S}_3, \hat{Q}_\pm]$ を計算せよ。

次に、 \hat{H} , \hat{S}_3 を対角化する表示で固有状態 $\{|n, \pm\rangle\}$; $\hat{H}|n, \pm\rangle = E_n^{(\pm)}|n, \pm\rangle$, $\hat{S}_3|n, \pm\rangle = \pm\hbar/2|n, \pm\rangle$, $n = 0, 1, \dots$ が求まったとしよう。

- (3) (2) で求めた関係式からエネルギー固有値が非負 $E^{(\pm)} \geq 0$ であることを示せ。また、エネルギー準位 $E^{(\pm)} \neq 0$ は、少なくとも 2 重に縮退していることを示せ。
- (4) (2) の関係式を用いて、もし存在するなら基底状態となる $E = 0$ の状態の満たすべき微分方程式を求め、それを形式的に積分せよ。
- (5) (4) で求めた状態が実際に存在するためには、この波動関数が規格化可能でなければならない。波動関数が規格化可能であるためには、 $W(x)$ はどのような性質を満たさなければならないか。 $W(x)$ が x の多項式の場合に、その条件を求めよ。

I-3 (量子統計：固体) (100 点)

金属の熱的性質について考察する。金属の性質は伝導電子と結晶の格子振動によって特徴づけられる。金属は1価金属とする。 $k_B = 1.4 \times 10^{-23} \text{J/K}$ (ボルツマン定数)、 $\hbar = 1.1 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{sec}$ (プランク定数/ 2π)、 $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{kg}$ (電子の質量)、格子定数 $= 3 \times 10^{-10} \text{m}$ 、 R (気体定数) $= k_B \cdot N_A = 8.3 \text{J/mol} \cdot \text{K}$ 、 N_A はアボガドロ数である。金属中の音速 v は $5 \times 10^3 \text{m/sec}$ とする。これらの値を用いて以下の問に答よ。数値は有効数字1桁まで求めよ。

(1) 伝導電子をフェルミ粒子の自由気体 (相互作用はない) として取り扱う。

(a) 自由電子の波動関数は $\Psi(\mathbf{r}) \sim \exp(i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k})$ であるから、一辺 L の立方体の試料 (体積 $V = L^3$) を考えると、周期境界条件より波数 $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ の取りうる値はどうか? エネルギーと波数の関係はどうか?

(b) 電子はフェルミ統計に従うので、低いエネルギー準位より順に2個ずつ (スピンの自由度) 電子を詰めていくと、絶対零度で結晶中の電子の取りうる最も大きい波数 k_F (フェルミ波数という) を求めよ。ここで L は十分に大きいとして波数を連続数として扱え。 k_F を持つ電子のエネルギーを E_F とし、 $E_F = k_B T_F$ よりフェルミ温度 T_F を求めよ。上の数値を用いて T_F の大きさを概算せよ (室温と比較せよ)。電子が古典統計に従う時は、1モル当たりの電子比熱は $C_e = 3R/2$ であるが、 $T \ll T_F$ の時は電子はフェルミ縮退しているので、 $C_e \sim R(T/T_F)$ である。

(2) 格子振動の比熱 C_p について、デバイモデルを用いて考える。格子振動を量子化したものをフォノンといい、フォノンの周波数 ω と波数 k の間には $\omega = v|k|$ の関係がある。ここで v は音速であり、デバイモデルでは v は等方的である。

(a) 格子点は不連続であるから、結晶中のフォノンの波数には上限があり、これを Debye 波数 k_D という。格子振動には1つの縦波と2つの横波の振動モードがあるが、縦波と横波の音速は等しいとし、 $k = 0$ から k_D までに含まれる各振動モードの数が格子点の数に等しいとして、 k_D を求めよ。波数 k_D を持つフォノンのエネルギーを温度で表わし、それをデバイ温度 Θ_D という。 Θ_D を求めよ (数値)。

(b) 1モル当たりの格子振動の内部エネルギーを求めよ。

$T \gg \Theta_D$ の時、格子振動のモル比熱 C_p を求めよ。

$T \ll \Theta_D$ の時、 C_p を求めよ。必要なら公式 $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$ を使ってよい。

(c) $T = 1\text{K}$ で、 C_e/C_p の比を求めよ。(数値)

(3) 低温 ($T \sim 1\text{K}$) での金属の性質は大体的場合、伝導電子によって決まる (フォノンの寄与は無視する)。伝導電子の平均散乱時間を τ として、熱伝導率 κ を求めよ。電子のフェルミ速度 $V_F = \hbar k_F/m$ 、単位体積当たりの電子比熱 $c = C_e/V_m$ を用いよ。

V_m はモル体積である。(ヒント：全ての電子は一定の速度 V_F で運動しており、一定時間 τ 毎に等方的に散乱されて、そこでの局所的な温度と熱平衡になるとする。即ち、電子は平均自由行程 $l = V_F \cdot \tau$ 行って、局所熱平衡に成る。微小な温度勾配 ∇T がある時、ある面を横切って流れる単位面積当たりの熱流 \mathbf{J} を求め、 $\mathbf{J} = -\kappa \nabla T$ と比較せよ。熱伝導率 κ の単位は $[\text{J}/\text{K} \cdot \text{sec} \cdot \text{m}]$ である。)

平成 11 年度大学院入学試験問題 II (3 時間 30 分)

注意

- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
 - (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。
-

II-1 (解析力学) (100 点)

Here we consider a model based on a linear symmetrical triatomic molecule¹. In the equilibrium configuration of the molecule two atoms of mass m are symmetrically located on each side of an atom of mass M (see Fig. 1). All three atoms are on one straight line, the equilibrium distances apart being denoted by b . For simplicity we shall consider only motion along the line of the molecule and the actual complicated interatomic potential will be approximated by two springs of force constant k joining the three atoms. There are three obvious coordinates x_1, x_2 and x_3 marking the position of the three atoms on the line as is shown in Fig. 1. Let us now introduce coordinates for each atom relative to the equilibrium positions as η_1, η_2 and η_3 . Here we only consider small oscillations.

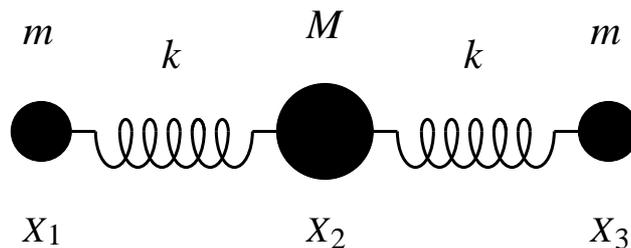


Fig. 1

- (1) Find the potential energy, the kinetic energy and the Lagrangian of the system.
- (2) Find the Lagrange equations of this system.
- (3) Now we are led to try an oscillatory solution of the form $\eta_j = A_j e^{-i\omega t}$. After substituting this solution into the equation of motion, find the equations for the amplitude factors A_j 's.
- (4) Find three non-negative solutions for ω .
- (5) For each normal mode, obtain the relative amplitudes of the three atoms and sketch their motions.

¹ triatomic molecule: 3 原子分子

- (6) This linear triatomic molecule system can be reduced to one of two degrees of freedom by introducing 'internal' coordinates $y_1 = x_2 - x_1$ and $y_2 = x_3 - x_2$, and eliminating x_2 by requiring the center of mass remains at rest. Obtain the frequencies of the normal modes and compare them with the results of (4). Note that it is convenient to introduce coordinates relative to the equilibrium as $\zeta_1 = y_1 - b$ and $\zeta_2 = y_2 - b$.
- (7) Let us take the initial condition ($t = 0$) that the center atom is at rest but displaced by an amount a_0 from equilibrium, the other two being at their equilibrium points. Give the time evolution of ζ_1 and ζ_2 defined in (6). Find the amplitudes of the small oscillations of each atom about the center of mass.

(注) 解答は日本語でよい。

II-2 量子力学（原子・分子）(100 点)

- (1) 固体基盤上に量子ドットをつくることが可能になってきた。量子ドットは、1 ~ 0.1 nm オーダーのスケールの空間に電子を閉じ込めることのできるポテンシャル場であり、電子を捕えた量子ドットは、疑似原子であると見なせる。そこで、球対称の量子ドットが集合してできる疑似分子の性質を考えて見よう。まず、二つの等価な量子ドット 1,2 からできる水素分子様の疑似分子を取り上げてみる。相互作用していないときの各々の波動関数を χ_1 、 χ_2 とする。対称性を考慮すると、弱く相互作用した 2 つの量子ドットでは、新たに 2 つの ”分子軌道” Ψ_s 、 Ψ_a が生じる。 Ψ_s 、 Ψ_a は、 χ_1 、 χ_2 の一次結合で表せると近似することにより、次のように表すことができる。

$$\Psi = c_1\chi_1 + c_2\chi_2$$

この疑似分子に対するハミルトニアン \mathcal{H} が、互いに相互作用していない 2 つの量子ドットに対するハミルトニアン \mathcal{H}_0 と相互作用による摂動項 V の和で表されるとして ($\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$)、 $\mathcal{H}\Psi = \epsilon\Psi$ の左から χ_1^* 、 χ_2^* を作用させ、空間積分をとる。すると、相互作用が小さいとすると、近似的に次のような c_1 、 c_2 に関する代数方程式が得られる。

$$\begin{aligned}(H_{11} - \epsilon)c_1 + V_{12}c_2 &= 0 \\ V_{21}c_1 + (H_{22} - \epsilon)c_2 &= 0\end{aligned}$$

ここで例えば、

$$\begin{aligned}H_{11} &= \int \chi_1^* \mathcal{H} \chi_1 d\tau \sim \int \chi_1^* \mathcal{H}_0 \chi_1 d\tau \\ V_{12} &= \int \chi_1^* \mathcal{H} \chi_2 d\tau \sim \int \chi_1^* V \chi_2 d\tau\end{aligned}$$

$c_1 = c_2 = 0$ でない解をもつためには、

$$\begin{vmatrix} H_{11} - \epsilon & V_{12} \\ V_{21} & H_{22} - \epsilon \end{vmatrix} = 0$$

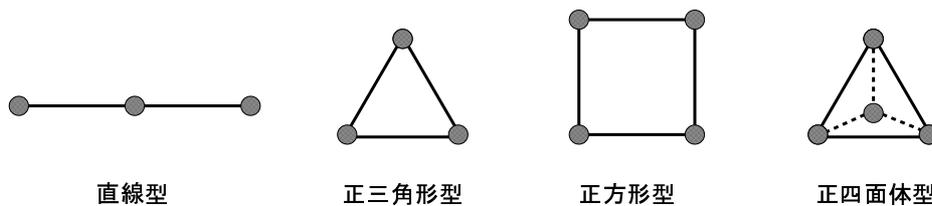
対称性により、 $H_{11} = H_{22} = \alpha$ 、 $V_{12} = V_{21} = \beta$ とすると、

固有エネルギー	固有関数
$\epsilon_s = \alpha + \beta$	$\Psi_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_1 + \chi_2)$
$\epsilon_a = \alpha - \beta$	$\Psi_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_1 - \chi_2)$

一般的に、 $\alpha > 0$ 、 $\beta < 0$ となることに注意すると、 Ψ_s が安定な分子軌道となる。孤立した量子ドットに 1 個の電子が入ると、 α の固有エネルギーをもつ。そこで、 Ψ_s に一対の電子が入った水素分子様の疑似分子では、一つの ”分子軌道” には、2 つまでの電子が占めることができる（パウリの原理）ので、 $2(\alpha + \beta) - 2\alpha = 2\beta$ だけ全

電子エネルギーが安定化することになる（全電子エネルギーは、各電子のエネルギーの和で表されるとの近似をとる）。換言すると、 $|2\beta|$ がこの疑似分子の”化学結合エネルギー”に相当する。以上の議論を参考にして、次の問に答えなさい。ただし、最近接ではない量子ドット間の相互作用は無視することにする。

- (a) 3つの等価な量子ドットからなる、疑似分子に2つの電子が捕えられている。正三角形型と、直線型の各々の構造について、全電子エネルギーを計算して求め、どちらの構造がより安定か、論じなさい。（但し、 α や β の値は、上記の水素分子様の疑似分子の場合と変わらないと仮定し、スピン多自由度によるエネルギー変化については無視することにする）。
- (b) (a) の疑似分子について、電子が4つ入っている場合の、正三角形型と、直線型の相対的な安定性について論じなさい。
- (c) 4つの等価な量子ドットからなる疑似分子に、電子が2つ入っている。正方形型と正四面体型について電子の全エネルギーを求め、どちらがより安定となるか論じなさい。



- (2) 次に、平面の固体基盤上に作った円環状（半径 r ）の量子細線（一次元の井戸型ポテンシャルの両端がつながったものと考えればよい）に、電子が捕えられたときの状態について考えて見よう。ただし、電子の質量 $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{kg}$ 、光速 $c = 3.0 \times 10^8 \text{m/s}$ 、プランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$ とする。

- (a) 二次元のシュレディンガー方程式は、以下の形で表される。これを参考にして、円環状の量子細線上の電子の状態を記述する波動関数（規格化すること）およびその固有エネルギーを求めなさい。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi = E \Psi \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, x = r \cos \phi, y = r \sin \phi \right)$$

但し、半径 r は一定。また、境界条件より、 $\Psi(\phi + 2\pi) = \Psi(\phi)$ が成り立つ。

- (b) 一個の電子が最低エネルギー準位に入っている（基底状態）。円環の半径を $r = 1.0 \text{nm}$ としたとき、基底状態から第一励起状態に遷移させるのに必要なエネルギーをもつ光子 ($h\nu$) の波長を計算して求めなさい。（有効数字一桁）
- (c) 第一励起状態での軌道角運動量の固有値をもとにして、古典的な回転運動と対応させたときの、電子の運動速度を求めなさい。（有効数字一桁）

II-3 (統計力学) (100 点)

- (1) N 個の分子 (質量 m) からなる古典的理想気体が一辺の長さ L の立方体に入っており、温度 T の熱浴に接している。以下、分子の内部自由度は無視する。
- (a) 立方体を仮想的な仕切りで高さ方向に半分に分ける。下半分に n 個の分子が存在する確率 $P(n)$ を求め、平均 $\langle n \rangle$ 、分散 $\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$ を求めよ。
- (b) (a) のような確率の計算では、気体分子があたかも区別できるように扱っても良い。その理由を簡潔に述べよ。
- (2) 今、この立方体に下向きの重力 (重力加速度の大きさ g) が働いているとする。
- (a) 1 個の分子が高さ z と $z + \delta z$ に置かれた仮想的な仕切りの間の、厚さ δz の薄い領域に存在する確率 $P(z)\delta z$ を求めよ。
- (b) 高さ z と $z + \delta z$ 間に気体分子が $n(z)$ 個存在する確率を求め、平均 $\langle n \rangle(z)$ と分散 $\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle(z)$ を求めよ。総分子数 N が十分大きい極限では、分子数密度はどうなるか考察せよ。
- (3) 前問で見たように、熱平衡状態にあっても空間の小領域に入っている分子数は統計的に揺らいでいる。このような気体の中に、気体分子に比べると大きい粒子 (質量 m_B) を加える (ブラウン粒子)。ブラウン粒子の運動は容易に観測できるが、気体分子の揺らぎの影響を受け不規則である。

ここでブラウン粒子の運動を、酔歩を使ったモデルで考えよう。簡単のため、 z 軸に沿った 1 次元運動をするとし、時間、空間とも離散的に扱う。時間、空間の単位をそれぞれ、 τ と a とおく。時刻 $n\tau$ における格子点 la での存在確率を $W(l, n)$ とし、時間 τ 後に両となりの格子 $l+1$ か $l-1$ にそれぞれ p か $q = 1 - p$ の確率で移動するとすると、次の関係が成り立つ。

$$W(l, n+1) = pW(l-1, n) + qW(l+1, n) \quad (\text{A})$$

- (a) 時刻 $n\tau$ での粒子の位置 $z_n (\equiv z(n\tau))$ を、総ステップ数 n と、正の方向に進んだステップ数 m を用いて表せ。ただし、 $z_0 = 0$ とする。 m を固定したとき、可能な経路はいくつあるか。
- (b) z_n の平均 $\langle z_n \rangle$ 及び $\langle (z_n - \langle z_n \rangle)^2 \rangle$ を求め、粒子の平均的な移動を考察せよ。(ヒント: $\langle (z(t) - \langle z(t) \rangle)^2 \rangle = 2Dt$ となるとき、 D を拡散係数と呼ぶ。)
- (c) 単位時間 τ や格子間隔 a が十分小さいとし連続変数 $t = n\tau$, $z = la$ を導入する。式 (A) の $W(l, n)$ を $w(la, n\tau) = w(z, t)$ とおいて、 a^2 と τ のオーダーまで展開し、時間発展を記述する偏微分方程式を求めよ。

ここで、無次元微小パラメーター ϵ を用いて、 $a = \epsilon a_0$ と置く (a_0 は定数)。この時、(i) q か $p \sim 1$ 、(ii) $|q - p| \ll \epsilon$ ($p \sim q \sim 1/2$)、(iii) $|q - p| \sim \epsilon$ の 3 つの場合に、(A) 式の振舞いと関連づけて得られた偏微分方程式の各項について考察せよ。

- (d) $|q - p| \sim \epsilon$ の場合に 1 粒子の定常分布を求め、 M 個の粒子に対する数密度分布関数を求めよ。

ブラウン粒子が熱平衡状態で理想気体分子と同じ統計に従うとすると、問 (2) で得た理想気体分子の数密度分布と同様の分布に従うことが言える。ブラウン粒子に対する熱平衡状態での分布と酔歩モデルでの定常分布が一致するとして、酔歩モデルのパラメーターを物理量で表せ。ただし、記号 $V \equiv (q - p)a/\tau$ 、 $D \equiv a^2/(2\tau)$ を用いよ。

平成 11 年度大学院入学試験問題 III (3 時間)

注意

- (1) 問題は、III-1 から III-7 まで全部で 7 問ある。これから、3 問選択せよ。
- (2) 選択した問題の解答は、それぞれ別の用紙 1 枚に記入せよ (裏面を用いてもよい)。
- (3) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

III-1 (水素原子) (100 点)

水素原子に対する Schrödinger 方程式は、極座標を用いて

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \right) + \frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{r} \right] \psi(r, \theta, \phi) = E\psi(r, \theta, \phi), \quad (\text{A})$$

のように書かれる。但し、ここで μ は電子の換算質量、 \hat{L} は軌道角運動量演算子である。

- (1) $\hat{L}^2 Y_m^l(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_m^l(\theta, \phi)$ を満たす球面調和関数 $Y_m^l(\theta, \phi)$, ($l = 0, 1, \dots, m = -l, -l+1, \dots, l$) を用いて $\psi(r, \theta, \phi) = R_l(r) Y_m^l(\theta, \phi)$ のように変数分離したとき、動径波動関数 $R_l(r)$ の満たす方程式を求め、無次元の変数 $\rho = \sqrt{2\mu|E|}r/\hbar$ 、及びパラメーター $\lambda = \frac{e^2}{\hbar} \left(\frac{\mu}{2|E|} \right)^{1/2}$ を用いて書き直せ。
- (2) (1) で求めた方程式を用いて $R_l(\rho)$ の無限遠方 $\rho \rightarrow \infty$ での振る舞いを求めよ。
- (3) $\rho = 0$ の近傍における級数展開を用いて、波動関数が規格化可能である条件から、ボーア半径を $a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$ とし、エネルギー固有値を求めよ。このとき、各エネルギー準位は何重に縮退しているか。
- (4) 陽子及び電子の質量を $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$, $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$ とし、ボーア半径、及び eV の単位を用いた基底状態のエネルギーを、有効数字 1 桁まで求めよ。但し、 $\hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$), $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$, とする。また、陽電子と電子の束縛状態であるポジトロニウムの場合、ボーア半径及び基底状態のエネルギーは、水素原子の場合と比べてそれぞれどうなるか。
- (5) 水素原子の場合について、基底状態における平均 2 乗速度 $\frac{\sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle}}{\mu}$ を計算せよ。それは光の速度の何分の 1 か。

III-2 (量子力学：磁場中スピンの運動) (100 点)

- (1) 時間に依存する磁場 $\mathbf{H}(t)$ 中のスピン \mathbf{I} の運動を考える。今 $\mathbf{H}(t)$ が (A) 式のように、定常磁場 $H_0\hat{z}$ が z 軸方向にあり、角周波数 ω_0 で回転する磁場が z 軸と垂直面内に掛かっている。スピン \mathbf{I} の磁気モーメントは $\boldsymbol{\mu} = \gamma\hbar\mathbf{I}$ であり、磁気回転比 γ は定数である。

$$\mathbf{H}(t) = \hat{z}H_0 + \hat{x}H_1 \cos \omega_0 t + \hat{y}H_1 \sin \omega_0 t \quad (\text{A})$$

- (a) Hamiltonian が $\mathcal{H} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}(t)$ で与えられるとき、Schrödinger 方程式を書け。
 (b) z 軸の回りに角周波数 ω_0 で回転する座標系での Schrödinger 方程式を求めよ。ここで ω_0 を $\omega_0 = -\gamma H_0$ に選ぶ (共鳴条件)。
 ヒント：

$$\begin{aligned} e^{-iI_z\phi} I_x e^{iI_z\phi} &= I_x \cos \phi + I_y \sin \phi \\ e^{-iI_z\phi} I_y e^{iI_z\phi} &= -I_x \sin \phi + I_y \cos \phi \end{aligned}$$

- (c) 回転系での Schrödinger 方程式の厳密解 $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$ を実験室系での初期状態の波動関数 $|\Psi(0)\rangle$ を用いて書け (スピン演算子は残したままでよい)。その結果を用いて実験室系での $|\Psi(t)\rangle$ を求めよ。
 (d) 共鳴条件の時の磁気モーメントの z 成分の期待値 $\langle \mu_z(t) \rangle$ を求めよ。共鳴条件のもとでは $\langle \mu_z(t) \rangle$ はどのような運動をするか、言葉で説明せよ？
- (2) 大きさ一定の磁場 $\mathbf{H}(t)$ が $t < 0$ で z 軸方向にあり、 $t = 0$ で x 軸の回りに角周波数 Ω で回転し始め $t = T$ で y 軸方向を向き、以後 y 軸方向を向いて止まる。

$$\mathbf{H}(t) = \begin{cases} H[0, \sin \Omega t, \cos \Omega t] & 0 \leq t \leq T \\ H[0, 1, 0] & T \leq t \end{cases}$$

ここで $\Omega T = \pi/2$ である。

- (a) $I = \frac{1}{2}$ の時、 $t = 0$ での波動関数が $|\Psi(0)\rangle$ であるとする、 $0 \leq t \leq T$ の間の $|\Psi(t)\rangle$ を求めよ。(ヒント： x 軸回りで Ω で回転する座標系で Schrödinger 方程式を解け。 \hat{n} を単位ベクトルとすると $e^{i\omega\mathbf{I}\cdot\hat{n}t} = \cos \frac{\omega t}{2} + i2\mathbf{I} \cdot \hat{n} \sin \frac{\omega t}{2}$ である。)
 (b) 初期状態が $|\Psi(0)\rangle = |I, m\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ であるとき、 $|\Psi(t)\rangle$ を求めよ (スピン演算子の部分を具体的に計算して、 $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ と $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ で表わせ)。
 (c) 瞬間近似 ($\Omega \rightarrow \infty, T \rightarrow 0, \Omega T = \pi/2$) の場合、 $|\Psi(t)\rangle$ を求めよ。
 (d) 断熱近似 ($\Omega \rightarrow 0, T \rightarrow \infty, \Omega T = \pi/2$) の場合、 $|\Psi(t)\rangle$ を求めよ。

III-3 (放射線計測) (100 点)

- (1) ガンマ線と物質との相互作用の機構を 3 つ挙げ、それぞれの説明をせよ。3 つの相互作用のガンマ線のエネルギーに対する依存性および物質を構成する原子の原子番号に対する依存性についても簡単に言及せよ。
- (2) 2 MeV 程度のガンマ線のエネルギースペクトルを測りたい。どのような検出器を用いるか、1 つ名前を挙げて、その原理を説明せよ。
- (3) 小さい検出器で 2 MeV のガンマ線のエネルギースペクトルを測るとする。どのようなスペクトルが得られるか概略図を描き説明せよ。特徴的なエネルギーについては概算して図中に書き込め。ただし、電子の質量を $0.5 \text{ MeV}/c^2$ とせよ。
- (4) 同一原子核から連続して放出される 2 本のガンマ線 γ_A 、 γ_B をそれぞれ検出器 A、検出器 B で検出して、その同時計数 C を測定する。線源の放射能を N_0 とし、 γ_A 、 γ_B のそれぞれの計数を S_A 、 S_B として以下の問いに答えよ。ただし、放射能の減衰を考慮しなくてよい。また、 C 、 S_A 、 S_B の測定時間 T は同じとする。さらに、同時計数回路に入るパルスは時間巾 τ の矩形波とする。
 - (a) 同時計数回路にはいるパルスの時間巾が 0 でないため、別々の原子核から放出される 2 本のガンマ線 γ_A 、 γ_B の検出に起因する偶然同時計数が測定した同時計数に必ず含まれる。即ち、測定した C は真の同時計数 TC と偶然同時計数 CC の和である。 $S_A\tau$ と $S_B\tau$ が T の値に対して十分小さいとして CC を S_A 、 S_B 、 τ 、 T を用いて表せ。
 - (b) 線源の放射能を同時計数から求める式を導出せよ。また、 TC と CC の比を N_0 などを用いて表せ。
- (5) 検出器とそれにつながる電子回路をまとめて検出系と呼ぶことにする。ほとんどの検出系はひとつの放射線を検出して処理するのに有限の時間 τ を必要とし、その時間内に別の放射線が検出器と相互作用してもそのシグナルを処理できない。時間 τ を不感時間 (dead time) という。検出系の不感時間の単純化したモデルとして麻痺型と非麻痺型の 2 つがある。麻痺型では不感時間の間に別の放射線が検出器と相互作用するとその時からさらに τ だけ不感時間が延びる。その延長された不感時間の間にまた別の放射線が検出器と相互作用するとさらに τ だけ不感時間が延びる等々。非麻痺型では不感時間の間に別の放射線が検出器と相互作用しても不感時間は τ のままである (図を参照)。ここでは麻痺型検出系を考え、処理されるべき真の計数率 N と不感時間のため実際に処理されて記録される計数率 M の関係を次の要領に従って導く。
 - (a) ポアソン分布の式 $P(x) = \mu^x e^{-\mu} / x!$ (μ は x の平均値) を用いて、真の平均計数率が N の場合、ひとつの放射線が検出器と相互作用した後 t 時間何事も起こらず、その後 dt 時間に別の放射線が検出器と相互作用する確率を求めよ。

- (b) (a) で求めた表式を用いて、麻痺型検出系において真の計数率 N と実際に処理されて記録される計数率 M の関係を導け。 N が大きくなると最初は当然 M も大きくなるが、ある N の値から N が大きくなると逆に M は小さくなる。麻痺型検出系では一般に測定されたひとつの M の値に可能な真の計数率 N として 2 つの値が対応する。さて、最大の M の値が $50,000\text{s}^{-1}$ であった。この検出系の不感時間 τ を有効数字 1 桁で求めよ。

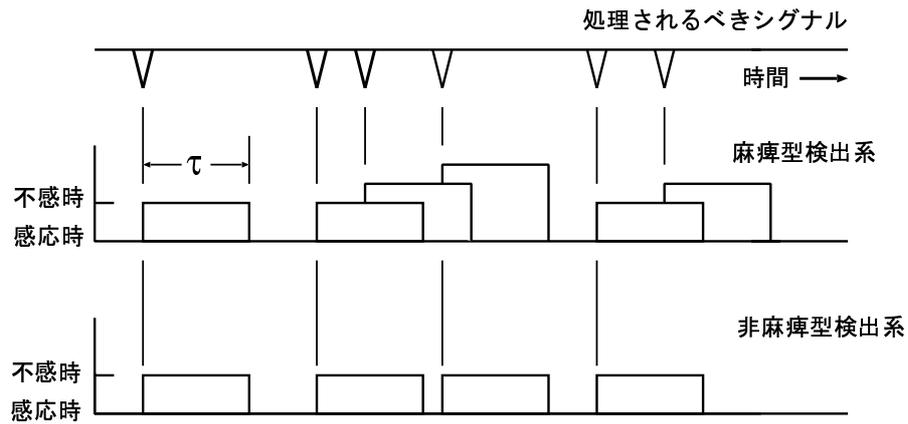
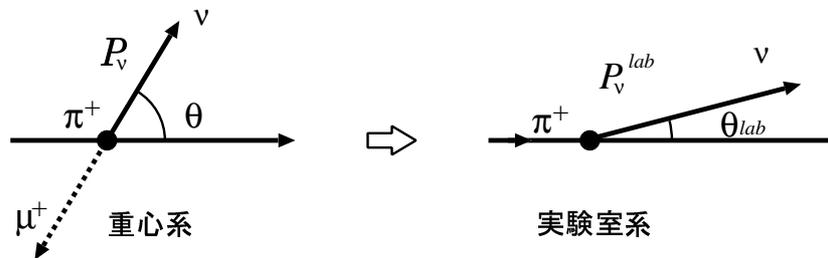


図 1: 図において処理されるべきシグナルの数は 6 個であるが、麻痺型検出系では 3 個が記録され、非麻痺型検出系では 4 個記録される。

III-4 (ニュートリノ) (100 点)

ニュートリノは謎の多い素粒子である。いま高エネルギー加速器で作られる π^+ 中間子ビームの崩壊 ($\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$) から (ミュー) ニュートリノ (ν_μ) のビームを作って実験を行いたい。そのことについて以下の設問に答えよ。(数値については有効数字1桁で良い。) ただし π^+ 中間子とミューオン (μ^+) の静止質量はそれぞれ M ($0.14\text{GeV}/c^2$) と m ($0.11\text{GeV}/c^2$) とし、ニュートリノの静止質量はゼロとせよ。

- (1) 静止した π^+ 中間子が崩壊したとき、ニュートリノの運動量の大きさ P_ν を M と m を用いて表わし、その数値をもとめなさい。
- (2) 速度 $\beta (= v/c)$ の π^+ 中間子が崩壊するとき、 π^+ 中間子の進行方向に対する実験室系でのニュートリノの角度と運動量を、 π^+ の重心系でのその進行方向に対するニュートリノの崩壊角 θ を使って表わしなさい (下図参照)。なお $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ を用いよ。



- (3) π^+ 中間子は平均寿命 $2.6 \times 10^{-8}\text{sec}$ でミューオンとニュートリノに崩壊する。いま π^+ 中間子ビームの運動量が $7.0 \text{ GeV}/c$ のとき、その平均飛行距離は何 m か?
- (4) 今この $7.0 \text{ GeV}/c$ の π^+ 中間子ビームの崩壊点から 200km 先に、正しく π^+ 中間子ビームの方向にその中心をあわせて半径 20m のニュートリノ検出器を設置したとする。(但し、 π^+ 中間子ビームの拡がりは無視できるとせよ。)
 - (a) π^+ 中間子ビームの全崩壊数にたいして検出器に入るニュートリノの割合はいくらか?
 - (b) そのニュートリノの平均運動量はおおよそいくらか (GeV/c)?
- (5) 今このニュートリノは 200km 地中を通過して地下の検出器に到達する。
 - (a) このニュートリノと核子との全散乱断面積を $1.0 \times 10^{-38}\text{cm}^2$ と仮定すると、 200km 先の検出器に到達するまでにニュートリノが地中で散乱される確率はいくらか? ただし地中の物質密度は $3.0\text{g}/\text{cm}^3$ 、アボガドロ数は $6.0 \times 10^{23}/\text{mol}$ とせよ。
 - (b) 毎秒 1×10^{10} 個の π^+ 中間子が崩壊するとして、ニュートリノ検出器の厚さが水 20m 相当のとき、その中でニュートリノと核子の散乱がおこる頻度はいくらか?

- (6) ニュートリノ振動はミューニュートリノや電子ニュートリノなどニュートリノの種類が飛行中に変化する現象である。これを調べるためにはニュートリノの種類を識別しなくてはならない。一般にニュートリノが核子と反応すると、ミューニュートリノの場合はミューオンが、電子ニュートリノの場合は電子が生成される。そこで数 GeV/c のミューオンと電子を区別するにはどうすればよいか？ 識別方法とその原理について述べよ。

III-5 (LCR 回路) (100 点)

実験室で大容積の強い磁場を必要とするとき、キャパシターバンクと空芯コイルを用いてパルス磁場を発生し利用することが多い。キャパシターバンクの静電容量を C 、空芯コイルのインダクタンスを L 、内部抵抗を R とすると、 L 、 C 、 R 回路の過渡現象の典型的な問題の 1 つである。 L 、 C 、 R 、スイッチ S は理想的なもので、配線の抵抗は無視できるとする。過渡現象の解析にはラプラス変換 (付録参照) を利用すると便利である。

- (1) 図の回路で、キャパシター C は電圧 V_0 ボルトに充電されている。時刻 $t = 0$ にスイッチ S を閉じた。 L 、 C 、 R の値の如何によって (i) 振動する場合、(ii) 臨界減衰、(iii) 過減衰の場合に分類される。

(a) それぞれの場合の L 、 C 、 R に対する条件を示せ。

- (b) 実用上殆どの場合が (i) に相当するので、以下 (i) の場合についてのみ考える。 C の両端の電圧 $V(t)$ 、 L を流れる電流 $I(t)$ を求めよ。記述を簡単にするため、 $\tau^{-1} = R/(2L)$ 、 $\omega_0^2 = 1/(LC)$ 、 $\omega^2 = \omega_0^2 - \tau^{-2}$ 、 $\tan \phi = 1/(\omega\tau)$ とせよ。

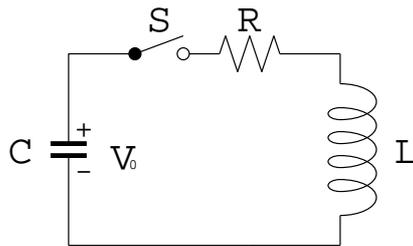


図 1

- (2) キャパシターには、直流用と交流用とがあるが、一般に、直流用の方が小型であり、値段も安いので、直流用キャパシターを利用するのが普通である。直流用キャパシターに振動電流を流すと、寿命が極端に短くなる。極端な場合は絶縁破壊をおこす。このようなことを避けるためと最大磁場に近い値を出来るだけ長く維持するためにダイオードを用いたクローバー回路と呼ばれる回路を使用する。

(a) 図の回路で S を閉じてから $I(t)$ が極大になる最初の時刻 t_I と $V(t)$ が 0 になる最初の時刻 t_V との関係を示せ。

(b) $R = 0$ として L 、 C 、 S からなる回路に、理想ダイオード D 1 ヶを付け加えてクローバー回路を構成し図示せよ。

(c) (b) の回路における $V(t)$ と $I(t)$ とを時刻 t を横軸としてグラフ表示せよ。特徴的な t 、 $V(t)$ 、 $I(t)$ の値を座標軸上に記入せよ。

(d) 現実の回路では、(2)(b) の様に $R = 0$ とはならないので、静電容量、充電電圧の異なる 2 系統のキャパシターバンクとダイオードを使って、パワークローバー

回路と呼ばれる回路を構成して使用する。

静電容量が C と C_1 の 2 つのキャパシターバンクがあり、それぞれ V_0 , V_1 に充電されている。 $C_1 > C$ 、 $V_0 > V_1 = V(t_I)$ 、 $\omega_0\tau > (1 + C_1/C)^{1/2}$ であるとして、 C 、 C_1 、理想ダイオード D 2 ヶ、 L 、 R 、 S を使って回路を工夫し図示せよ。

付録

- $F(t)$ のラプラス変換 $f(s)$ は、 $\mathcal{L}F(t) = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$ である。
- $f(s) = 1/s$ と $f(s) = 1/(s^2 + a^2)$ の逆変換は、 $\mathcal{L}^{-1}(1/s) = 1$ と $\mathcal{L}^{-1}(1/(s^2 + a^2)) = \sin(at)/a$ である。
- $\mathcal{L}^{-1}f(s) = F(t)$ のとき、 $\mathcal{L}^{-1}f(s - a) = e^{at}F(t)$ である。

III-6 (物理数学) (100 点)

- (1) Fourier 変換を用いて 1 次元の熱伝導の方程式

$$\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = 0 \quad (\text{A})$$

を初期条件 $u(x, 0) = \delta(x)$ の下に解き、任意の時刻 ($t \geq 0$)、任意の点での温度分布 $u(x, t)$ を求めよ。

- (2) “電荷” $\rho(\mathbf{r}, t)$ が存在する場合の Klein-Gordon 方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu^2 \right) \psi(\mathbf{r}, t) = g\rho(\mathbf{r}, t) \quad (\text{B})$$

について以下の問いに答えよ。

- (a) 運動量 \mathbf{p} 、エネルギー E を持つ平面波波動関数

$$\psi(\mathbf{r}, t) \propto e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar - iEt/\hbar} \quad (\text{C})$$

が、真空中 ($\rho(\mathbf{r}, t) = 0$) の方程式を満たすための条件から $\psi(\mathbf{r}, t)$ が記述する粒子の質量が $M = \hbar\mu/c$ で表されることを示せ。

- (b) 原点に静止した点電荷がある ($\rho(\mathbf{r}, t) = \delta^{(3)}(\mathbf{r})$) 場合の方程式を解き、点電荷の作る静的なポテンシャルを求めよ。

III-7 (低温物理) (100 点)

ヘリウム (He) は絶対零度まで液体の状態が存在するので、真空ポンプを用いて He の蒸気を強制的に排気することによって、低い温度を得ることが出来る。図 1 のような実験装置について考えてみよう。液体 He を入れる低温容器は、室温からの熱の流入を防ぐために A の空間は真空に保たれ、かつ多層の輻射遮蔽膜が挿入されている。液体 He は低温容器の B の空間に溜められる。低温容器の上部のフランジ部分からポンプで He の蒸気を排気する。今、液体 He 中に試料室 C があり、真空にしてある。種々の測定用のリード線 (金属) が室温部から試料室に導入される。

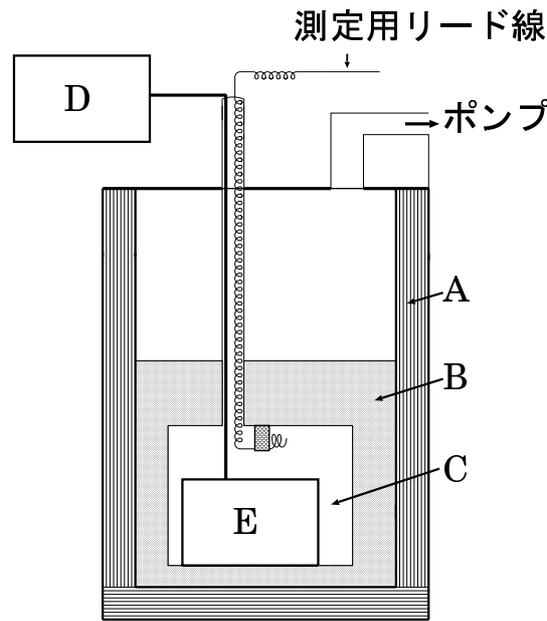


図 1

- (1) 圧力 P [Pa] の He 気体を排気速度 \dot{V} [m^3/sec] のポンプで排気した時に、何モル/sec で He が排気されるか? He を理想気体として計算せよ。室温を $T_0 = 300\text{K}$ とし、標準状態 (0.1MPa , 300K) の気体のモル体積は $2.24 \times 10^{-2}\text{m}^3$ である。
- (2) He の蒸発の潜熱を L とし、圧力 P が一様として、He の冷却能力を求めよ。ただし、蒸発した低温の He 気体が室温になる時の熱容量 (顕熱) は無視してよい。
- (3) 室温から液体 He への熱の流入は、室温部のフランジからの熱輻射と測定用のリード線からのものが考えられる。フランジの面積は 0.01m^2 として、そこからの輻射熱は全部液体 He に吸収されるとする。図 1 に示すようにリード線は室温から途中どこにも熱接触することなく真空中を通過して試料室に入り、そこで液体 He の温度に熱接触する。室温部から液体 He に入る総熱流 \dot{Q} を有効数字 1 桁まで計算せよ。ステファン・ボルツマン係数は $5.7 \times 10^{-8}[\text{W}/\text{m}^2\text{K}^4]$ 、フランジの放射率を 0.01 とする。リード線の直径を 0.1mm 、長さ 1m 、本数 10 本として、リード線に使われた金属の熱伝導率 κ は温度 T に依存し、 $25T[\text{W}/\text{m}\cdot\text{K}]$ とする。

- (4) $L = 100[\text{J/mol}]$ 、 $\dot{V} = 1 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{sec}$ の時に、定常状態の圧力 P を求めよ。
- (5) 図2に示すように、Heの蒸気圧 $P(T)$ は液体He温度に強く依存する。定常状態での液体Heの温度を有効数字2桁まで求めよ。

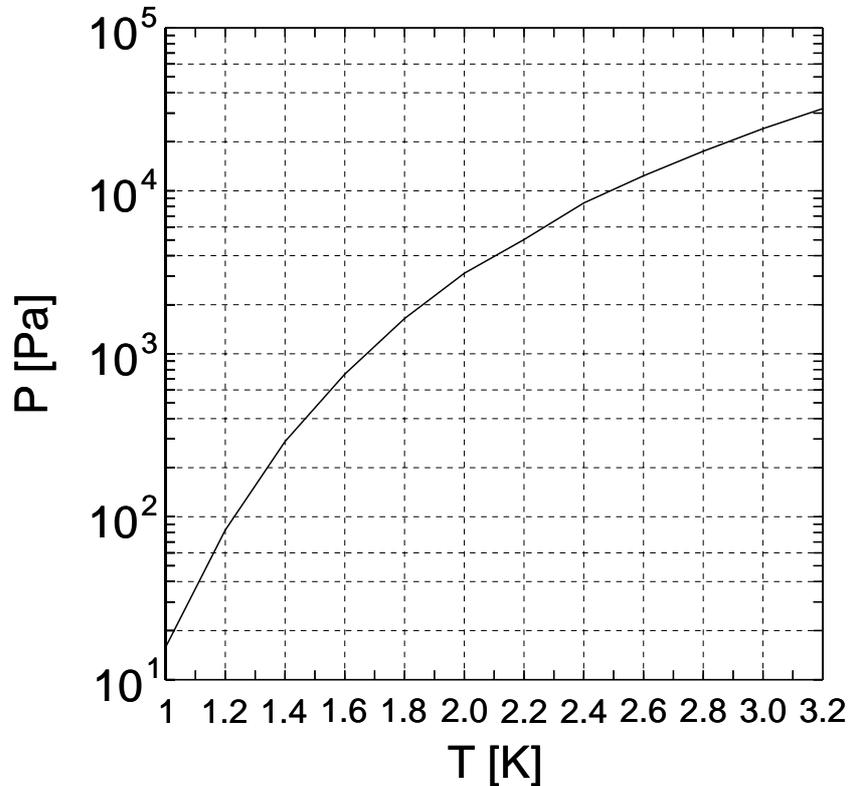


図 2

- (6) 図1のように同じ体積 V の密閉容器 D、E を D は室温に、E は液体 He 内の試料室の壁に熱接触させておき、その間を体積が無視できる細い管でつなぐ。最初、室温で D と E を 0.01MPa の He 気体で満たし、その後、液体 He を導入して上記のようにポンプを用いて He を排気し、試料室内の密閉容器の He 気体の温度を下げた。D には圧力計があり、その圧力から低温部の温度を推定できる。He は理想気体であるとして、D と E の圧力差はないとすると、定常状態になった時の密閉容器の He 気体の圧力 $[\text{Pa}]$ を求めよ。
- 最初、室温で D と E を 1MPa の気体で満たした後、上と同じように冷却した場合はどうなるか？