

平成10年度大学院入学試験問題 I (3時間)

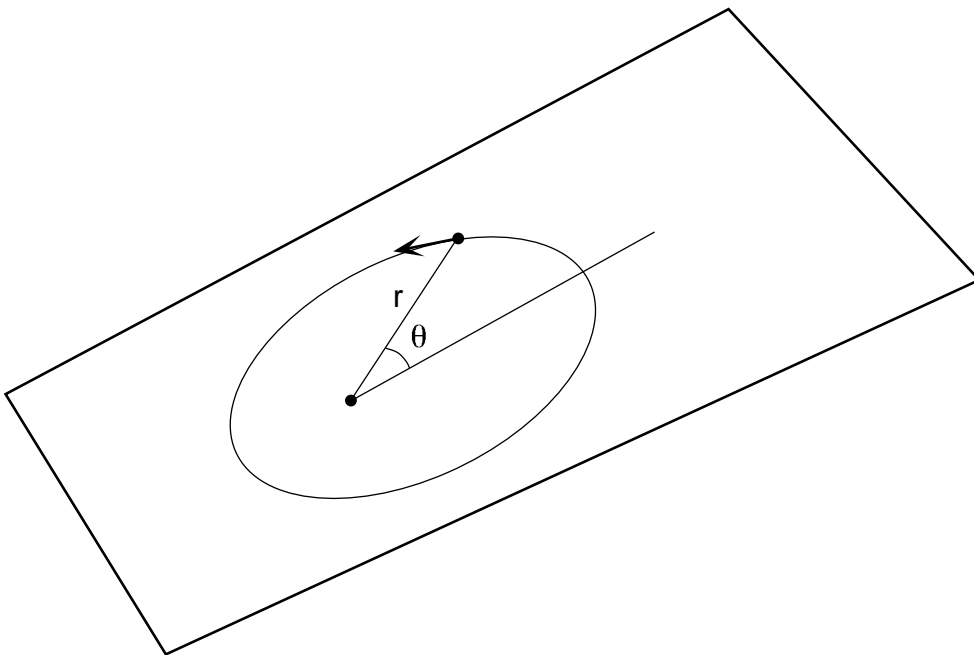
注意

- (1) 問題 I-1, I-2, I-3 の解答はそれぞれ別の用紙1枚に記入せよ(裏面を用いてもよい)。
- (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

I-1 (ケプラー問題) (100点)

原点からの距離を r として、ポテンシャルエネルギーが $U(r)$ で与えられるような中心力場中の質点の運動を考える。以下の問題について古典力学の範囲で答えよ。

- (1) 質点の運動は原点を含む平面内に限られることを示せ。
- (2) $U(r) \propto -1/r$ のポテンシャル中を運動する質点の束縛運動は楕円となることが知られている。古典力学を解くことによってその軌道の形を求めたい。以下簡単のため、質点の質量を1、ポテンシャルエネルギーを $U(r) = -1/r$ とおくことにする。次の問に答えよ。
 - (a) 原点からの距離 r と質点の運動する平面内の方位角 θ を変数として、質点の全エネルギー E と角運動量 L を $\{r, \dot{r}, \dot{\theta}\}$ を用いて表せ(ここでドットは時間微分)。



- (b) 次に $s = 1/r$ として、変数 r を s に置き換える。さらに $ds/d\theta = \dot{s}/\dot{\theta}$ を通して s を θ の関数とよみかえる。角運動量保存を考慮に入れることによって、全エネルギー E の表式から時間微分の項、 \dot{s} と $\dot{\theta}$ を消去し、全エネルギー E を $\{ds/d\theta, s, L\}$ を用いて表せ。

- (c) 上で求めた E の表式を θ で微分せよ。そこで得られた s の微分方程式を解くことによって $s(= 1/r)$ の θ 依存性を示せ。ここで求めた解が質点の軌道の形を表している。
- (d) 上に求めた $s(= 1/r)$ と θ の関係が楕円を表していることを示せ。
- (3) $U(r) \propto -1/r$ 以外には、どのような中心力ポテンシャルが楕円軌道を生成することが知られているか。

I-2 (中性子の磁気トラップ) (100 点)

- (1) 原点を通り z 方向に無限に長いワイヤーがある。これが線電荷密度 λ で一様に帯電している時、点 (x, y, z) における電場の大きさを求めよ。ワイヤーの太さは無視出来るものとする。これよりこのワイヤーが作る静電ポテンシャル $\phi(x, y, z)$ を求めよ。但しポテンシャルの基準は $\phi(a, 0, 0) = 0$ と定めよ。
- (2) 同様のワイヤーが 4 本、図 1 のように配置されている。但し x 軸上の位置 $(\pm a, 0, 0)$ を通るワイヤは $+\lambda$ 、 y 軸上の位置 $(0, \pm a, 0)$ を通るものは $-\lambda$ の線電荷密度を有する。原点付近の点 (x, y, z) に於ける静電ポテンシャル $\phi(x, y, z)$ を、微少量 $(x/a, y/a)$ の 2 次のオーダーまで求めよ。良く知られている様に、この結果は 4 重極場を表す。 $x - y$ 平面内を考えると荷電粒子は、1 方向には収斂する力を受けるがこれと垂直な方向には発散する力を受ける。

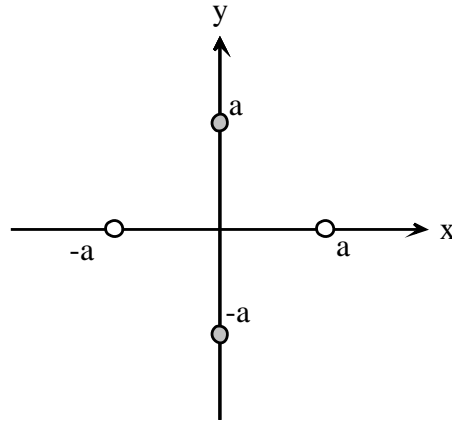


図 1: 4 本のワイヤーの配置図

- (3) 今度は帯電したワイヤーの代わりに電流 I の流れるワイヤーを考えよう。 x 軸上 $\pm a$ を通るワイヤーには $+I\hat{z}$ 、 y 軸上 $\pm a$ を通るワイヤーには $-I\hat{z}$ の電流を流す。但し \hat{z} は z 方向の単位ベクトルである。原点付近の点 (x, y, z) に於けるベクトル・ポテンシャル $\vec{A}(x, y, z)$ を求めよ。これより原点付近での磁場の大きさ $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ を求めよ。

(ヒント) 静電ポテンシャル $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$ と

ベクトル・ポテンシャル $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$ の類似性に注意せよ。

ここで ρ 及び \vec{j} は電荷密度及び電流密度、また ϵ_0 及び μ_0 は真空中での誘電率及び透磁率を表す。

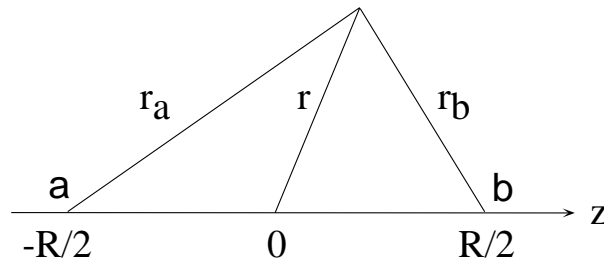
- (4) 原点付近に置かれた中性子の運動を考えよう。荷電粒子と異なり中性子は磁気双極子モーメント ($\vec{\mu}_n$) と磁場の相互作用により力を受ける。中性子のスピンは $\frac{1}{2}\hbar$ であるので、スピン方向は磁場と平行または反平行の状態が許される。もし中性子の感ずる磁場の変化が緩やか (断熱的) ならば、中性子のスピン (従って磁気双極子モーメント) は磁場の変化に追従し、常に平行または反平行状態を保つ。この結果、あるスピン状態の中性子に関しては (3) の磁場の原点付近において $x - y$ 平面内のどの方向にも復元力が働く。復元力の大きさを求めよ。(なおこの問題に於いては z 方向は無限に長いと仮定した。しかし実際の実験では z 方向についても円形に閉じているトーラス状磁場を用い中性子を閉じ込める。)

I-3 (量子力学) (100 点)

水素分子イオン H_2^+ の結合状態を、分子軌道法を用いて考えよう。電子に比べて 1800 倍重い陽子は静止していると近似すると、ハミルトニアンは原子単位系 ($\hbar = m = e = 1$) で

$$H = -\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} + \frac{1}{R} \quad (\text{A})$$

と書ける。ここで座標系の原点を陽子 a, b の中点にとり、陽子 a, b 間の距離を R とし、 $r_a = |\vec{r} - \vec{a}|$ 、 $r_b = |\vec{r} - \vec{b}|$ とした。



(1) シュレディンガー方程式

$$H\psi(r) = E\psi(r) \quad (\text{B})$$

の近似解を得るために、水素原子の $1s$ 軌道 $\phi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-r}$ の一次結合から作られた分子軌道

$$\psi(r) = C_a\phi_{1s}(r_a) + C_b\phi_{1s}(r_b) \quad (\text{C})$$

を考える。式 (A)、式 (C) から、エネルギー固有値は

$$E_{\pm} = \frac{H_{AA} \pm H_{AB}}{1 \pm S} \quad (\text{D})$$

と書けることを示せ。ただし

$$H_{AA} = H_{BB} = \int \phi_{1s}(r_a)H\phi_{1s}(r_a)d^3r \quad (\text{E})$$

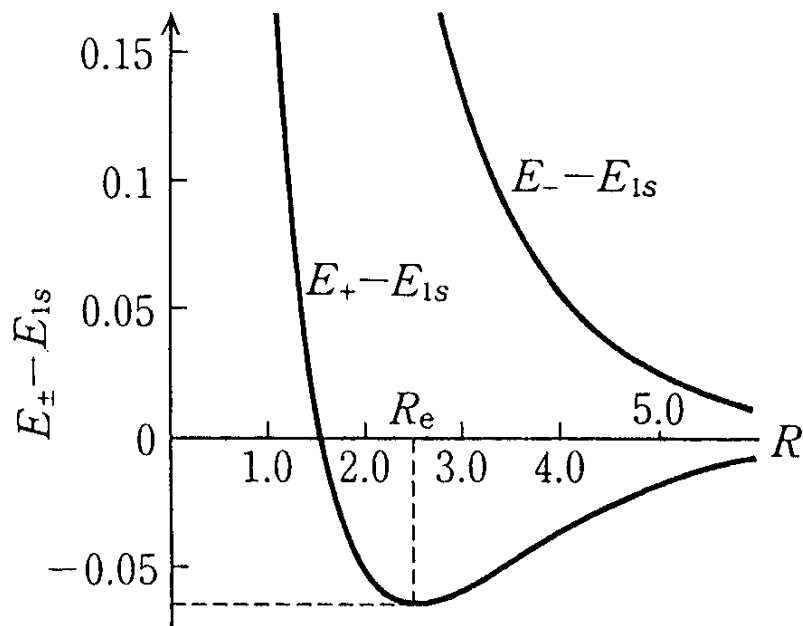
$$H_{AB} = \int \phi_{1s}(r_a)H\phi_{1s}(r_b)d^3r \quad (\text{F})$$

$$S = \int \phi_{1s}(r_a)\phi_{1s}(r_b)d^3r \quad (\text{G})$$

とする。

(2) (1) で求めたエネルギー固有値 E_{\pm} に対応する固有関数 $\psi_{\pm}(r)$ を求めよ。ただし式 (C) の固有関数は規格化されているものとする。また、 z 軸上の $|\psi_+|^2$ と $|\psi_-|^2$ の概略図を描け。

- (3) 式 (E) の H_{AA} の積分を、球座標を用いて実行せよ。ここで、ハミルトニアン (A) の第一項、第二項は水素原子のハミルトニアンであり、これらの項の積分は $1s$ 状態のエネルギー $E_{1s} = -\frac{1}{2}$ を与えることを使え。
- (4) (3) と同様にして式 (F)、式 (G) の積分を実行すると、エネルギー固有値 E_{\pm} の R 依存性が決定され、 $E_{+} - E_{1s}$ 、 $E_{-} - E_{1s}$ は下図のようになった。この図と、(2) で求めた電子密度とをあわせて、水素分子イオンの結合状態の安定性について議論せよ。また E_{+} の極小点から E_{-} に光励起をおこなうと、何が起こるか？



注：原子単位系ではボーア半径が長さの単位となり、リュードベリ定数の2倍がエネルギーの単位となる。

平成10年度大学院入学試験問題 II (3時間30分)

注意

- (1) 問題 II-1, II-2, II-3 の解答はそれぞれ別の用紙1枚に記入せよ(裏面を用いてもよい)。
- (2) 各用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。

II-1 (量子統計) (100点)

系の粒子数の変化を許すグランドカノニカル分布を考える。

粒子数、化学ポテンシャルをそれぞれ、 N 、 μ として N 個の粒子をもつ系が n 番目のエネルギー順位 E_{nN} にあるとき、その状態の確率(分布) $P_n(N)$ は

$$P_n(N) = e^{\Omega/k_B T} e^{(\mu N - E_{nN})/k_B T} \quad (\text{A})$$

で与えられる。ここで k_B, T, Ω はそれぞれ、ボルツマン定数、温度、熱力学ポテンシャルである。この系の熱力学ポテンシャル Ω は

$$\Omega = -k_B T \ln \left[\sum_N e^{\mu N/k_B T} \sum_n e^{-E_{nN}/k_B T} \right] \quad (\text{B})$$

で与えられる。

この分布を量子統計に従う理想気体に適用しよう。状態 k にある1粒子のエネルギーを ε_k 、1粒子状態 k にある粒子数を n_k とする。粒子の同等性にともなう量子力学的効果は同じ状態 k を占める粒子間のみが存在する。さらに粒子間の相互作用が無視できるとすると、 k の異なる状態は互いに独立だから、1つの量子状態 k のみが存在するとしてその部分系に (A)、(B) 式を適用してよい。

- (1) 理想フェルミ気体に対して、化学ポテンシャルを μ 、 k 番目の量子状態にある粒子全体からなる部分系の熱力学ポテンシャルを Ω_k とし、 $N = n_k$ 、 $E_{nN} = \varepsilon_k n_k$ とする。
 - (a) n_k 個の粒子が k を占める確率 $P(n_k)$ と、 Ω_k を求めよ。
 - (b) 平均の粒子数 $\langle n_k \rangle$ を求めよ。すべての k を含む全系の熱力学ポテンシャル Ω を求めよ。
 - (c) 全粒子数を N として μ を決定する関係式をかけ。
 - (d) 面積 A 、質量 m の2次元自由電子ガスの $T = 0$ における μ の値を求めよ(ただし、系の電子数を N 、プランク定数を h として $\hbar = h/2\pi$ とする)。
- (2) 理想ボーズ気体を考えて、(1) と同様の粒子がボーズ統計に従うとき、
 - (a) 分布 $P(n_k)$ と Ω_k を求めよ。
 - (b) 平均の粒子数 $\langle n_k \rangle$ と熱力学ポテンシャル Ω を求めよ。

- (c) $\varepsilon_k \geq 0$ とすると、ボーズ粒子の μ にはどのような制限がつくか。
- (d) 量子化された格子振動 (フォノン) や光子 (フォトン) もボーズ粒子とみなしてよい。このとき、 μ はどのような値をとるか。その理由を説明せよ。

II-2 (ハイゼンベルグモデル) (100 点)

強磁性体における比熱や帯磁率等の物性を議論する際には、スピン波の素励起(マグノン)を考えることが多い。ここでは、大きさ S のスピンを持った N 個の原子が一次元に並んだ原子鎖を考え、隣り合うスピン間に交換相互作用が働く場合(Heisenberg モデル)について考察する。一次元の Heisenberg モデルにおいては、ハミルトニアンは

$$H = -J \sum_{i=1}^N \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1} \quad (A)$$

(ただし、 $J > 0$, $\vec{S} = (S^x, S^y, S^z)$ はスピン演算子) と書ける。

- (1) スピン昇降演算子 $S_i^+ = S_i^x + i S_i^y$, $S_i^- = S_i^x - i S_i^y$ と S_i^z を用いて、ハミルトニアン(A)を書き直せ。
- (2) すべてのスピンの向きが揃った状態 $|F\rangle$ を考える。スピンの向きを z 軸に取り、その大きさを S とすると、 $S_i^z |F\rangle = S |F\rangle$ が成り立つ。この時、状態 $|F\rangle$ のエネルギー E_0 を求めよ。
- (3) ℓ 番目のサイトのスピン状態だけが変わった状態

$$|\ell\rangle = S_\ell^- |F\rangle \quad (B)$$

を考えたとき、以下の表式が成り立つことを示せ。

$$H |\ell\rangle = -NS^2J |\ell\rangle + 2SJ |\ell\rangle - SJ[|\ell+1\rangle + |\ell-1\rangle] \quad (C)$$

- (4) (B) 式の一次結合から得られる、 $|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=1}^N e^{ikR_\ell} |\ell\rangle$ は H の固有状態であることを示せ。また、その固有エネルギーを求め、波数 k の関数として概略図を描け。

但し、 R_ℓ は ℓ 番目のスピンの位置をあらわし、スピンは等間隔に $R_{\ell+1} - R_\ell = a$ の距離で配置され、周期的境界条件 $R_\ell = R_{\ell+N}$ が成り立つものとする。

- (5) (4) で求めた固有状態は、スピン波又はマグノンと呼ばれる。固有エネルギーの計算から、 $ka \approx 0$ でのマグノンの分散関係は $E(k) - E_0 = Ak^2$ (A は定数) と表される。三次元系でもこの分散関係は成り立つものとし、マグノンはボーズ粒子として扱えることを利用して、三次元系におけるマグノンによる比熱の温度依存性を導け。ここで、系は充分低温であるとする。

必要に応じて、公式 $\int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{e^x - 1} dx \cong 1.783$ を使ってよろしい。

- (6) EuO の低温における比熱を実際に測定したところ、図に示すような結果が得られた。ここで、縦軸は比熱 \times (温度)²、横軸は (温度)^{3/2} にとってある。上記の議論を参考に、比熱のデータから EuO の物性について何が言えるか。簡潔に述べよ。

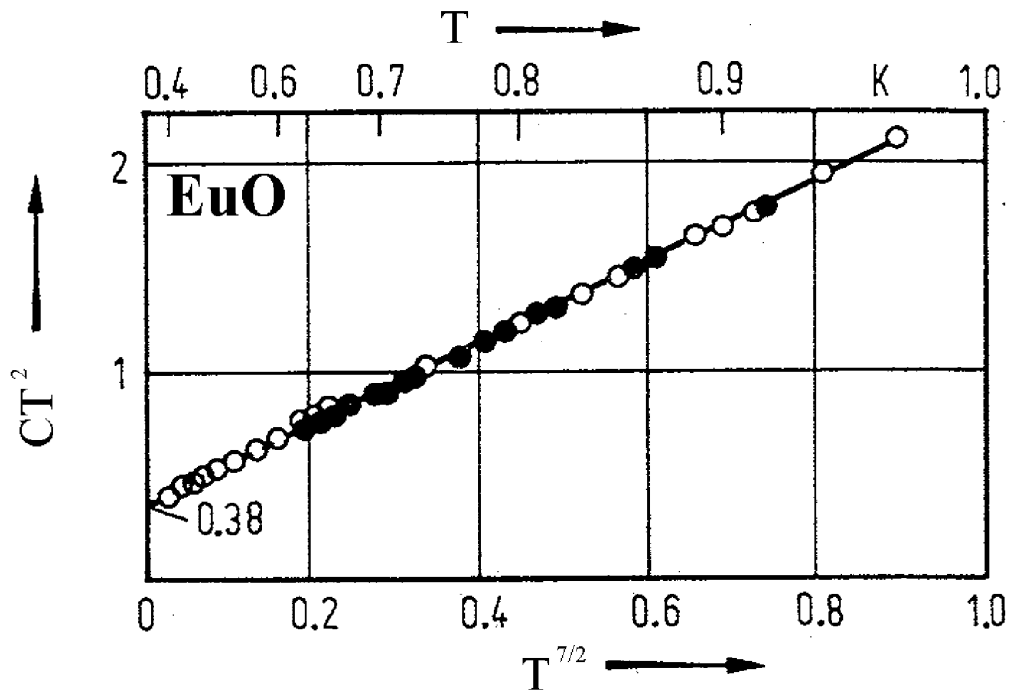


図 1: EuO の低温における比熱の測定データ

II-3 (WKB 法) (100 点)

- (1) 図のようなポテンシャル障壁 $U(x)$ を通過する質量 m 、エネルギー E の粒子の透過係数 (入射波のフラックスと透過波のフラックスの比) T は、WKB 近似を用いると、

$$T = e^{-2Y} \left(1 + \frac{1}{4}e^{-2Y}\right)^{-2}, \quad Y \equiv \frac{1}{\hbar} \int_a^b |p| dx, \quad p \equiv \sqrt{2m[E - U(x)]}, \quad (\text{A})$$

と表されることを示せ。

なお、WKB 法の公式によると、波動関数は図の $x = a$ の左右では、

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{p}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^a p dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{は} \quad \psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{|p|}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_a^x |p| dx\right) \quad \text{に、} \quad (\text{B})$$

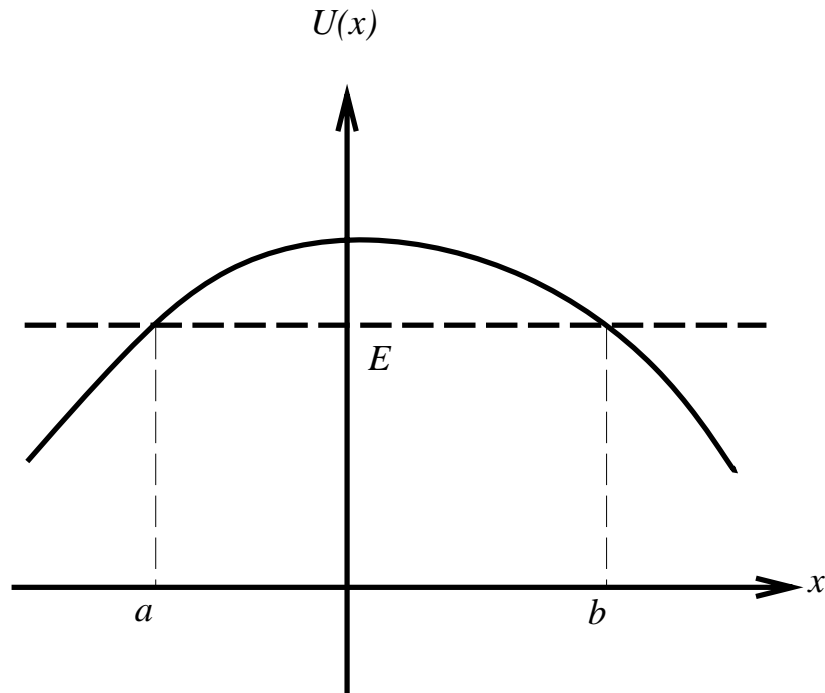
$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^a p dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{は} \quad \psi_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{|p|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_a^x |p| dx\right) \quad \text{に、} \quad (\text{C})$$

それぞれ接続し、図の $x = b$ の左右では、

$$\psi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{|p|}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^b |p| dx\right) \quad \text{は} \quad \psi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{p}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_b^x p dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{に、} \quad (\text{D})$$

$$\psi_4(x) = \frac{1}{2\sqrt{|p|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_x^b |p| dx\right) \quad \text{は} \quad \psi_4(x) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_b^x p dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{に、} \quad (\text{E})$$

それぞれ接続することが知られている。

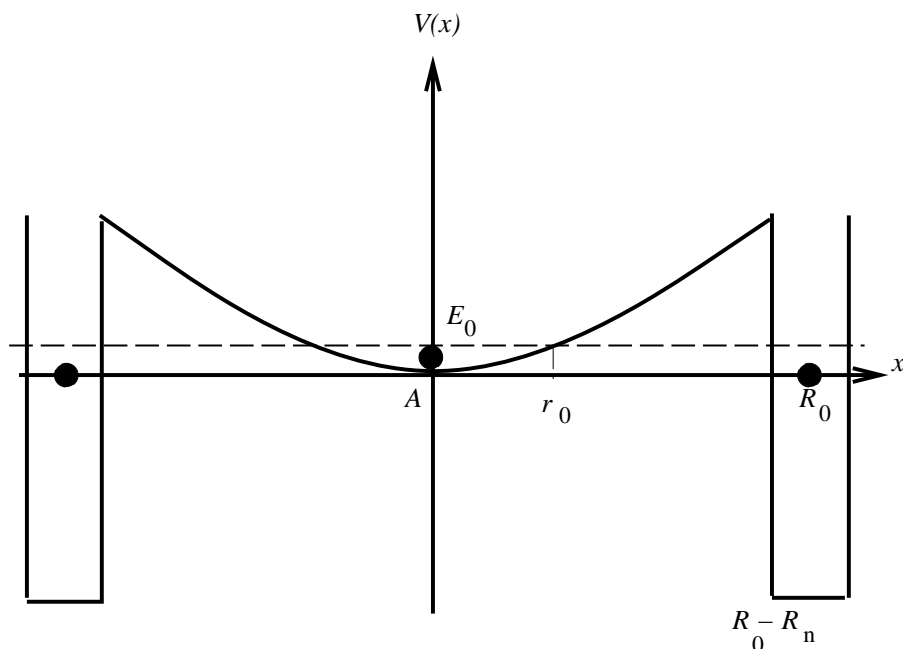


(2) 比較的小質量の恒星はその進化の最終段階で低温の白色矮星になる。このような星は、フェルミ縮退した電子の運動量による縮退圧で支えられ、一方イオンはクーロンエネルギーを最小にする配位として、格子状に配列することになる。そこでは熱核反応はもはや起こらないが、量子効果によってクーロンバリアを越えることによる核反応は起こり得る。これがどの程度の確率で起こるかを、以下のような簡単なモデルによって考察しよう。イオンの電荷を $Ze > 0$ とし、その運動は一次元に制限されるものとし、その方向 (x 軸方向とする) の隣接イオンとの相互作用のみ考慮することにする。下図のように、両側のイオンは $x = \pm R_0$ に固定されているものとし、真中のイオン A の運動は、ポテンシャル $V(x)$ に従うものとする。すなわち、 $|x| < R_0 - R_n$ ではクーロン力のみ働き、 $V(x)$ は

$$V(x) = \frac{Z^2 e^2}{R_0 - x} + \frac{Z^2 e^2}{R_0 + x} - \frac{2Z^2 e^2}{R_0}, \quad (\text{F})$$

で与えられ、 $|x \mp R_0| < R_n$ では核力の引力が勝り、深い井戸型ポテンシャルを持つものとする。イオンの質量を μ として、以下の問いに答よ。

- 原点付近 $|x| \ll R_0$ でのポテンシャルの近似形を求めよ。
- イオン A は原点付近に局在するとして、その基底状態のエネルギー E_0 を求めよ。
- 以下イオン A は上で求めた基底状態にあるとする。このとき、イオン A の古典的回帰点 (イオンが古典的に運動した場合に到達可能な x の上限) の座標 $r_0 > 0$ を求めよ。但し、 $r_0 \ll R_0$ とする。
- (1) の結果が用いられるとして、 $x = r_0$ から $x = R_0 - R_n$ への透過係数 T を WKB 近似で求めよ。 $r_0 \ll R_0, R_n \ll R_0$ として積分を行い、できるだけ簡単な形で表せ。
- このイオン格子が密度 $\rho = 2 \times 10^7 \text{ g/cm}^3$ の $^{12}\text{C}^{6+}$ イオンから成るとして、 $\log_{10} T \cong 0.43 \ln T$ を有効数字一桁で求めよ。ただし、核子一個当たりの質量を $9 \times 10^8 \text{ eV}/c^2$ とし、 $\hbar c \cong 2 \times 10^{-5} \text{ eVcm}$ 及び $e^2 \cong \hbar c/137$ という関係を用いよ。(なおこのとき、反応率は $10^{68} T / \text{cm}^3/\text{sec}$ 程度となる。)



平成10年度大学院入学試験問題 III (3時間)

- 注意 (1) 問題は III-1 から III-6 まで全部で6問ある。これらから3問を選択せよ。
(2) 問題の解答は、それぞれ別の用紙1枚に記入せよ(裏面を用いてもよい)。
(3) 各解答用紙ごとに、左上に問題番号、右上に受験番号と氏名を記入せよ。
-

III-1 (選択) (FET回路) (100点)

規格がわからない1個の電界効果トランジスタ(以後、FETと省略)がある。このFETの電気的特性を、図1のように $V_+ = +12\text{ V}$ および $V_- = -5\text{ V}$ の電源を用いた回路で調べた。 $R_S = 5.0\text{ k}\Omega$ をつなぎ、ゲート(G端子)の電圧 V_G およびソース(S端子)の電圧 V_S をそれぞれ測定した。得られたFETの測定データを表1に示す。

(解説: FETは、ゲート端子(G)に与えられる入力電圧 V_G に対応してドレイン(D)からソース(S)に流れる電流 I_{DS} が変化するという特性を持つ。この能動的機能を利用して信号増幅回路が作られる。)

- (1) 表1のデータに基づいて、この回路の電圧増幅率 $G(V_G$ の変化に対する V_S の変化の割合、すなわち $G = V_S / V_G$) の推定値を有効数字2桁で求めよ。(グラフ用紙の使用を希望する者は、右のページの最後の注意を参照せよ。)
- (2) ソース電圧 V_S を基準にしてゲート電圧を測った場合の、ゲート・ソース間電圧を、 V_{GS} とする。(すなわち、 $V_{GS} = V_G - V_S$)
一方、FETの性能を示す相互コンダクタンスと呼ばれる量 g_m は、 V_{GS} の変化に対して起きるドレイン・ソース電流 I_{DS} の変化の割合 $g_m = I_{DS} / V_{GS}$ として定義されている。

表1のデータを使って、FETの g_m の値を有効数字1桁で求めよ。

- (3) 設問(1)では、抵抗 $R_S = 5.0\text{ k}\Omega$ の場合について、増幅率 $G = V_S / V_G$ を数値的に求めたが、もし任意の抵抗 R_S と相互コンダクタンス g_m の2つのパラメータが与えられた場合には、電圧増幅率 G はどんな式で表せるか。(G を R_S と g_m の関数として表すこと。) また、もしも $g_m R_S \gg 1$ の近似が成り立っているとして良い場合には、 G の値はいくらになるか。
- (4) 次に抵抗 R_Z をグランド(電位は 0 V) と出力端子(S) との間に接続する。この場合の電圧増幅率 G を、 R_S 、 R_Z 、および g_m を使った式として求めよ。
また、設問(3)と同様に $g_m R_S \gg 1$ の近似が成り立っている場合に、増幅率 G の値が、 R_Z を付けない場合の増幅率の2分の1となるような抵抗 R_Z はどのような式で表されるか。さらに、このFETでは R_Z が数値的に何 Ω となるかを求めよ。

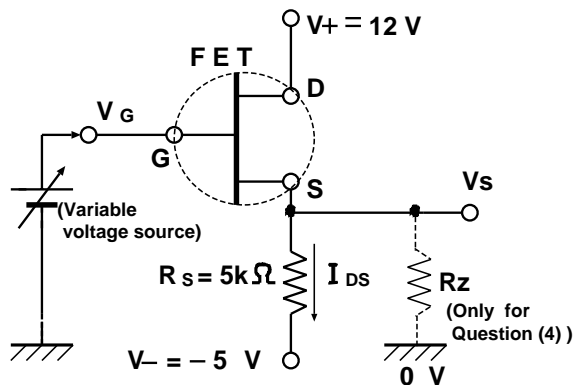


図1 . F E Tの電気的特性を測定した回路 (R_Z は設問(4)を解く際にのみ接続される抵抗である。)

表1 F E Tの測定値

(データの表)

V_G [V]	V_S [V]	(測定項目)
-3.19	-2.37	(実測データ)
-1.42	-0.79	
0.55	0.96	
2.76	3.00	
5.24	5.30	

==== 注 意 =====

必要ならばグラフ用紙の配布を受けられる。手を上げて要求して下さい。その場合記入したグラフ用紙も答案用紙と一緒に回収するので氏名、受験番号を記入しておくこと。

III-2 (選択)(真空) (100 点)

パイプの中の気体分子の移動を考えよう。

気体の圧力が真空に近いときには、管内で分子同士はほとんど衝突しないで、管壁に衝突するか全く衝突しないで端から出ていってしまう。これを分子流の状態という。一般にある断面を単位時間に通過する気体の量 Q は、単位時間にその断面を通過する気体の体積とその点での気体の圧力との積で表わされる。従って、 Q は例えば、 $\text{Pa} \cdot \ell \cdot \text{s}^{-1}$ という単位で表される ($1\ell=10^3\text{cm}^3$)。一方、パイプ全体を考えたときには、パイプ中を単位時間に通過する分子流の気体の量は両端の圧力差に比例して

$$Q = C(p_A - p_B)$$

と表される。ここで p_A および p_B はそれぞれパイプの一方の端 A および反対の端 B での気体の圧力で、 $p_A > p_B$ とする。このとき C をこのパイプのコンダクタンスという。

一定半径 $R[\text{cm}]$ で長さ $L[\text{cm}]$ のパイプ ($L \gg R$) の場合には、分子流については近似的に

$$C \simeq kR^3/L$$

となることが知られている。ここで定数 k は常温の空気の場合には $1.0 \times 10^5 \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ である。

この式の場合 C の単位は $\text{cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ となるが、実用的には $\ell \cdot \text{s}^{-1}$ で表すのが便利である。

- (1) 直径 40cm、長さ 20cm の円筒型の金属容器を真空にしたい。容器を真空にしていくと、一般に、容器の真空側の表面に吸着されている気体分子が放出されてくる。いま、この金属容器の内表面からは、 $10^{-6} \text{Pa} \cdot \ell \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}$ の割合で空気が放出され続けるとする。この容器を真空ポンプにつなぐために、半径 5cm、長さ 50cm のパイプの一方の端 A を容器に取り付け、パイプの反対の端 B から十分な排気能力のあるポンプで真空に引く。パイプのコンダクタンスだけを考慮すると容器の圧力はどこまで下げられるか。答の有効数字は一桁でよい。なお金属容器の内表面以外からのガスの放出は無視せよ。
- (2) 実際には使用したい真空度に見合うように、排気速度 (圧力 p_B のポンプ入口 B において単位時間に排気できる気体の体積) が適当な値を持つ真空ポンプを選定しなければ不経済になる。いま設問 1 の構成で容器の圧力を 10^{-4}Pa 程度まで真空に引きたい。このとき、真空ポンプの排気速度 S はどの程度のものにすればよいか。答の有効数字は一桁でよい。 S の単位は $\ell \cdot \text{s}^{-1}$ で表せ。
- (3) 実際に設問 1 の容器を 10^{-4}Pa の真空にするためのシステムの概略を図示せよ。真空ポンプおよび真空計の種類は下記のものから適当に選ぶこと。
イオンポンプ、電離真空計、ターボ分子ポンプ、ガイスラー管、油拡散ポンプ、クライオポンプ、ピラニゲージ、ロータリーポンプ、ペニングゲージ、メカニカルプースター
- (4) 設問 3 に示してある真空ポンプと真空計のうちそれぞれ 1 種類を選び、その特徴を簡単に説明せよ。

III-3 (選択) (液体窒素の性質) (100点)

液体窒素 (N_2) は1気圧 (101.3 kPa) での沸点の温度が77.3 Kであり、寒剤として放射線検出器の冷却、真空排気系の不純物除去 (コールドトラップ)、液体ヘリウムを用いた低温実験装置の予備冷却など、さまざまな分野の物理学実験で用いられている。この液体窒素の基本的な性質を調べるため、次のような実験を行った。

まず、液体窒素を容器に汲み入れ、液体と気体が共存するようにした。そして容器内の気体の圧力 P および液面近くの液体の温度 T を測定しながら、容器内を真空ポンプで徐々に排気していった。この測定の結果、液体窒素の飽和蒸気圧は沸点から65 Kまでの範囲で、

$$\ln (P/P_0) = A - (B/T) \quad (A)$$

でよく近似できることがわかった。ここで $P_0 = 101.3$ kPa、 $B = 669$ K である。さらに排気を続けると、しばらくして容器内の圧力は1 kPa に達した。

実験の後で文献を調べると、窒素の三重点と臨界点はそれぞれ63 K (12.5 kPa) と126 K (3.4 MPa) であるという。

- (1) この実験に適した容器の構造を簡単に説明せよ。
- (2) この実験に適した温度計の種類を一つだけあげ、その動作原理を簡単に説明せよ。
- (3) 式(A)の係数 A の値を見積もれ。
- (4) 縦軸に圧力 (常用対数目盛)、横軸に温度 (比例目盛) をとって、窒素の気相、液相、固相の存在する範囲を示す相図の概要を描け。
- (5) 共存する気相と液相との間には熱平衡が成り立つから、両相の化学ポテンシャルは等しい。このことから、共存曲線の形が

$$dP/dT = S/V \quad (B)$$

で与えられることを導け。ここで S は1モルあたりの気相と液相のエントロピーの差であり、また V はそれらの体積の差をあらわす。

- (6) 液体窒素の1モルあたりの蒸発潜熱 $L = T S$ を求めよ。ただし L は温度によらず一定とみなせるものとする。また、気体窒素に対して理想気体の状態方程式が近似的に適用できるものとし (モル気体定数は $R = 8.31$ J/Kmol)、さらに1モルあたりの気体の体積に比べてその液体の体積は無視できるものとする。
- (7) 1 kPa にいたるまで減圧を続ける過程で、容器内の窒素にはどのような変化が起こるか。

III-4 (選択) (放射線測定技術) (100 点)

図1は陽電子 (β^+) の検出装置を示している。遮蔽体により、よく方向の決まった陽電子は、磁場 (Magnet) で 90 度曲げられ運動量を測定される。磁場の入り口と出口には小さな検出器 S1 と S2 が置いてあり粒子の通過したことが確認され、同時に通過時刻が記録される。その後検出器 A の中でエネルギーを失い静止して、電子と反応して 2 つの γ 線を生ずる。これらの γ 線は検出器 B と C で検出される。測定は A、B、C の同時計測 (同じ時刻に信号が来た時にデータを取る) で行なった。使用した検出器の種類は表に示されている。また陽電子の運動量は $P = 1 \text{ MeV}/c$ であり、磁場による曲率半径は $r = 1 \text{ m}$ であった。次の設問に答えよ。

答えには数値計算の元になった式 (必要であればその導出) および数値計算結果の両方を記すこと。ちなみに陽電子の静止質量は $0.511 \text{ MeV}/c^2$ であり、光速は $3 \times 10^8 \text{ m/sec}$ である。

検出器名	種類	備考
S1 および S2	プラスチック・シンチレータ	非常に薄い
A	プラスチック・シンチレータ	厚い
B および C	半導体検出器	A,B,C は同時計測

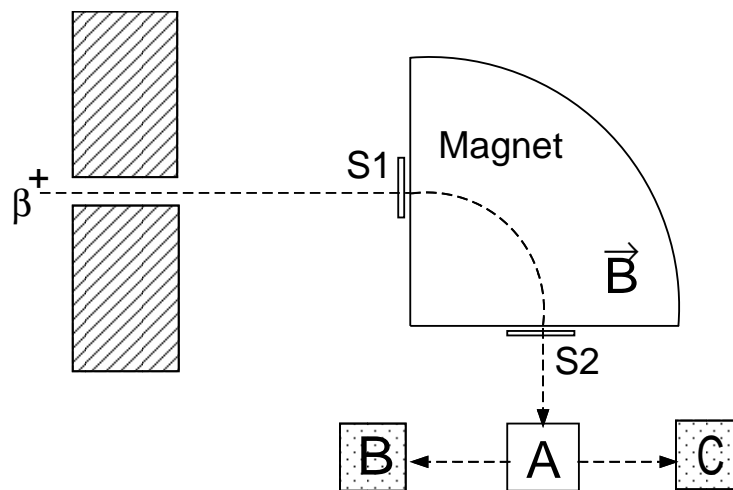


図 1: β^+ 検出装置

- (1) 検出器 S1 及び S2 での陽電子の通過時間差 $\Delta t = t_2 - t_1$ は幾らと予想されるか。
- (2) 磁場の強さはいくらか (非相対論的に考えても良い)。

- (3) 検出器 B で得られたエネルギースペクトルは図 2 に示されるようなものであった。右のピークは光電効果に起因するものであり、左の連続スペクトルはコンプトン散乱による。コンプトン端（連続スペクトラムのエネルギー最大点）に対応するエネルギーを与える式を導出し、その値を求めよ。光電効果とは γ 線が原子に吸収され $T = h\nu - B.E.$ の運動エネルギーを持った電子を放出する過程である。ここで $h\nu$ は γ 線のエネルギーであり、 $B.E.$ は電子の束縛エネルギーであるが無視できるほど小さいと考えてよい。またコンプトン散乱とは γ 線と物質中の自由電子との弾性衝突である。

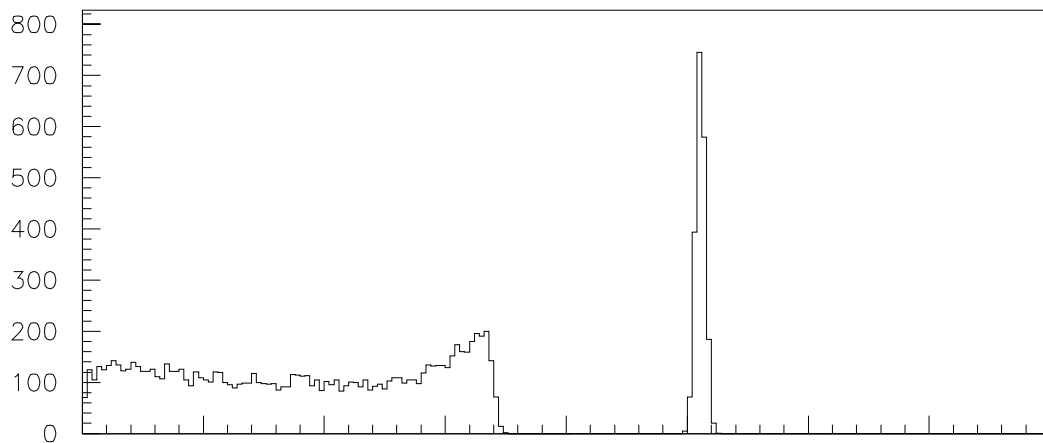


図 2: 検出器 B で得られたエネルギー分布図。

- (4) 検出器 A および C におけるエネルギー分布はどのようなものになるかを図示せよ。特にエネルギー軸（横軸）の値を書き込むのを忘れないように。また、ピークが在るときはそのエネルギー値を明示せよ。

III-5 (選択) (調和振動子) (100点)

一次元の量子的調和振動子を考える。運動量を p 、位置を q として、ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2,$$

で与えられるものとする。消滅、生成演算子を

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(q + ip), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(q - ip),$$

により定義する。準位演算子 $N = a^\dagger a$ の n 番目の規格化された固有状態を $|n\rangle$ とする。すなわち、 $N|n\rangle = n|n\rangle$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) このハミルトニアンで表される古典力学系では、エネルギーは非負の任意の値を取り得るが、量子論に移行すると、エネルギーは正の値の離散スペクトルを持つ。エネルギーがゼロの状態が存在しなくなる理由を簡潔に説明せよ。

- (2) 公式

$$e^{-A} B e^A = B + [B, A] + \frac{1}{2!} [[B, A], A] + \dots,$$

を用いることにより、 a を複素定数 θ だけシフトする変換、すなわち

$$U^{-1}(\theta) a U(\theta) = a + \theta \equiv \alpha(\theta),$$

をみたく演算子 $U(\theta)$ をひとつ求めよ。

- (3) $\alpha(\theta)|\theta\rangle = 0$ をみたく規格化された状態 $|\theta\rangle$ を、

$$|\theta\rangle = \Lambda(a^\dagger, \theta)|0\rangle,$$

という形で表せ。但し $\Lambda(a^\dagger, \theta)$ は、 a^\dagger, θ に依存する単項式の演算子とする。

- (4) この状態 $|\theta\rangle$ における、座標表示による規格化された波動関数

$$\psi(q) \equiv \langle q|\theta\rangle,$$

を求めよ。

- (5) 同様に、運動量表示の規格化された波動関数

$$\tilde{\psi}(p) \equiv \langle p|\theta\rangle,$$

を求めよ。

- (6) この状態 $|\theta\rangle$ における p と q の期待値 $\langle p \rangle = \langle \theta|p|\theta\rangle$, $\langle q \rangle = \langle \theta|q|\theta\rangle$ をそれぞれ求めよ。

- (7) この状態 $|\theta\rangle$ での p と q の分散 $\langle (\Delta p)^2 \rangle = \langle \theta|(p - \langle p \rangle)^2|\theta\rangle$, $\langle (\Delta q)^2 \rangle = \langle \theta|(q - \langle q \rangle)^2|\theta\rangle$, をそれぞれ求め、不確定性原理との関係を議論せよ。

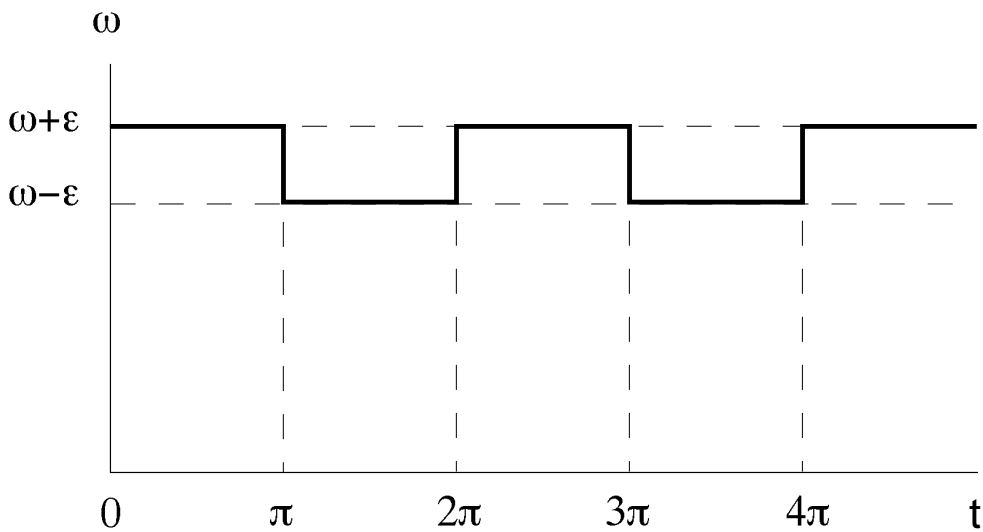
III-6 (選択) (パラメトリック振動) (100点)

振り子は振幅が小さい極限では、その角度 θ が二階の常微分方程式、 $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$ に従う。

$\zeta = \frac{d\theta}{dt}$ とし、系の状態を $\vec{x} = \begin{pmatrix} \theta \\ \zeta \end{pmatrix}$ と置くと、 \vec{x} は一階の常微分方程式、 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ に従う。

ここで $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ である。

- (1) 状態 \vec{x} を時間が t だけすぎた状態に移す写像は $F = \exp(At)$ で与えることができる。この写像 F を、2行2列の行列の形であらわに書き下せ。(ヒント)もとの微分方程式の一般解を求めておいて、初期条件 $\vec{x}(0)$ に対して時間が t だけ過ぎたとき、 $\vec{x}(t) = F\vec{x}(0)$ となるように行列 F の要素を決める、という方法でも求まる。
- (2) 振り子の場合はこの ω は振り子の長さや重力加速度の関数である。ブランコをこぐときには体を伸び縮みさせて実効的な振動数 ω を変動させる。その様子を単純化して次のような状況を考える。時間 $0 < t \leq \pi$ の間は $\omega + \varepsilon$ 、 $\pi < t \leq 2\pi$ の間は $\omega - \varepsilon$ というように、振動数自体を周期 2π で振動(パラメトリック振動)させる(図参照)。状態 \vec{x} を時刻が0から 2π 経った状態に移す写像 F の、行列式 $\det F$ 、トレース $\text{tr} F$ 、をなるべく簡単な形で表せ。



- (3) 状態空間の点 \vec{x} を、行列 F によって写像を繰り返せば、 \vec{x} がどう発展していくかを知ることができる。写像 F によって状態 \vec{x} が原点からどんどん遠ざかっていくなれば、振り子の運動は徐々に激しくなっていく。つまりブランコをこぐことに成功する。ここではいったん F を一般的な2行2列の行列 $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ として考えて、次の問に答えよ。

- (a) 2行2列の行列 F の固有値を、行列式 $\det F$ とトレース $\operatorname{tr} F$ を用いて表せ。
- (b) 2行2列の行列 F の行列式が $\det F = 1$ の条件を満たすとき、この行列のトレース $\operatorname{tr} F$ がどのような値をとった場合に振り子が不安定化するか。
- (4) 上の (3) の結果を (2) の結果に応用すると、 ε が小さい場合、振り子が不安定化するの ω の値が半整数と整数の近くであることがわかる。 ε が小さい極限について以下の問題に答えよ。
- (a) $\omega = 1/2 + \delta$ において、不安定化が起こる条件を δ と ε の関係で表せ。
- (b) $\omega = 1 + \delta$ において、不安定化の条件を δ と ε の関係で表せ。